REVISTA DE CIENCIAS, Vol. 6 , No.3 de 2015.

Gravedad en un Mundobrane

Gravity in the Braneworld

Alexander Moreno Sánchez ⋆ .

Observatorio Astronómico Nacional.

Aceptado Diciembre 2014; Publicado en línea Marzo 2015.

ISSN 2256-3830.

Resumen

De forma hipotética, se ha supuesto que el universo es una tri-brane inmersa en un espaciotiempo anti-deSitter cinco dimensional, con la materia bariónica y oscura confinada sobre ella, en tanto que la gravedad puede actuar en todo el espaciotiempo completo, es decir en el espaciotiempo anti-de Sitter 5D, entonces puede considerarse que la propagación causal de señales luminosas y gravitacionales, en general pueden difererir. Se puede dar el caso de que una señal gravitacional viajando entre dos puntos sobre la brane pueda pasar al llamado bulk, y que bajo algunas circunstancias especiales, dicha señal pueda manifestarse de forma más rápida que una señal luminosa que viaje entre estos dos puntos. Es propósito de este trabajo ilustrar algunos elementos esenciales del modelo de braneworld, mostrar el hecho anterior, y determinar algunas consecuencias de este efecto sobre la cosmología.

***Palabras Claves*:** Cuerdas, Teoría-M, Kaluza-Klein, hipersuperficies.

Abstract

Hypothetically, it is assumed that the universe is a tri-brane immersed in an anti-de Sitter spacetime five dimensional, with the baryonic and dark confined to her subject, while gravity can act throughout the entire spacetime, ie in anti-de Sitter spacetime 5D, then it can be considered that the causal propagation of light and gravitational signals generally can difererir. It may be the case that a gravitational signal traveling between two points on the brane can pass the call bulk, and under some special circumstances, such a signal can manifest itself more quickly than a light signal traveling between these two points. Purpose of this paper is to illustrate some essential elements braneworld model, show the previous fact and determine some consequences of this effect on cosmology.

***Keywords*:** Sting, Theorie-M, Kaluza-Klein, hipersuperfaces.

1. Introducción

Los modelos de altas dimensiones han cobrado una singular importancia, debido a que suministran soluciones, enfoques y aproximaciones diferentes a los convencionales, fundamentalmente en la consideración de problemas de vieja data en la física; como por ejemplo, el problema de jerarquías de la física de partículas, el cual consiste en la

⋆ amorenosa@unal.edu.co

, alexbrane@gmail.com

débil intensidad del campo gravitacional en comparación con la intensidad de los otros campos, en otros términos se trata del problema existente entre la escala de energía de Planck y la escala electrodébil, igualmente y sin razón fundamental se observa, por lo menos a la fecha, una carencia marcada en la detección de radiación gravitacional, es decir en este momento no se ha logrado la detección de las llamadas ondas gravitacionales, por una u otra razón, además, entre otras muchas cosas, se carece de un marco conceptual fundamental para la unificación de las interacciones fundamentales, esto es de una teoría de la gravedad cuántica; a nivel observacional también encontramos hechos como el de la expansión acelerada del universo, la observación de la llamada materia oscura y energía oscura, y recientemente, las anomalías de la radiación cósmica de fondo [1] [2] [3] [4] [5] [6]. Esto, constituye toda una suerte de elementos y circunstancias que propícian el surgimiento de marcos teóricos o de teorías alternativas que den cuenta de los hechos anotados anteriormente como de otros que no se mencionan en este momento, es allí, donde radica la importancia de estudiar y analizar las consecuencias de dichos modelos como el que propone la teoría de los mundobranas o de braneworld. Se pretende en este corto trabajo ilustrar algunos aspectos de los llamados modelos brane, entre ellos la gravedad y la estructura global de una brane, y la propagación de señales gravitacionales y electromágneticas en un modelo braneworld [7] [8] [9] [10] [11] [12] .

2. Ecuaciones de Campo

En esta sección se mostrará el fundamento teórico que sudyace a la teoría del braneworld (es decir se hace una análisis desde el punto de vista geométrico), en particular se derivará la ecuación de campo sobre una 3-brane. Por simplicidad el volumen espaciotemporal se asume que tiene cinco dimensiones, sin asumir ninguna condición especial sobre el bulk. Posteriormente, se asumirá la simetría Z_2 (simetría espejo o de orbifold) y se confinará el tensor momentum-energía de materia sobre la brane [13] [14] [15] [16].

En el escenario braneworld, nuestro mundo 4-dimensional es descrito por una pared de dominio $3-brane$ $(M, h_{\mu\nu})$, en un espaciotiempo 5-dimensional $bulk$ $(V, g_{\mu\nu})$, y donde se denota el vector normal unitario a la brane M por n^α así que la métrica inducida sobre M se puede expresar como $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - n_\mu n_\nu$. El punto de partída formal es la ecuación de Gauss, de la teoría de variedades [2]

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} e^\alpha_a e^\beta_b e^\gamma_c e^\delta_d = R_{abcd} + K_{ad}K_{bc} - K_{ac}K_{bd} \ , \tag{1}$$

y para obtener las consideraciones dinámicas del modelo se hace uso de la ecuación de Codazzi

$$R_{abcd} n^\mu e^\alpha_a e^\beta_b e^\gamma_c = K_{ab|c} - K_{ac|b} \ , \tag{2}$$

realizando un proceso algebraico de contracción de índices se obtiene

$$R_{bd} = R_{\beta\delta} e^\beta_b e^\delta_d - K^a_d K_{ba} + K K_{bd} \ , \tag{3}$$

tenemos de consideraciones, en variedades e hipersuperficies como de espacio, la siguiente expresión

$$R_{\beta\delta} e^\beta_b e^\delta_d = R_{\beta\delta} e^\beta_b e^\delta_d - R^\alpha_{\beta\nu\delta} n_\alpha n^\nu e^\beta_b e^\delta_d \ , \tag{4}$$

expresión , que se reemplaza en la ecuación de Gauss contraída, para obtener, la siguiente expresión

$$R_{bd} = R_{\beta\delta} e^\beta_b e^\delta_d - R^\alpha_{\beta\nu\delta} n_\alpha n^\nu e^\beta_b e^\delta_d + K K_{bd} - K^a_d K_{ba} \ , \tag{5}$$

tomando el tensor de Einstein en cuatro dimensiones, tenemos

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} h_{ab} R \ , \tag{6}$$

de tal manera que a partir de la ecuación de Gauss contraída, se puede obtener el tensor de Ricci y el escalar de curvatura, obteniéndose la siguiente expresión para el tensor de Einstein [6] [7] [8] [9] [10]

$$G_{ab} = G_{\alpha\beta} e^\alpha_a e^\beta_b + \frac{1}{2} R^\mu_\nu n_\mu n^\nu h_{ab} + K K_{ab} - K^d_b K_{ad} - \frac{h_{ab}}{2} \left(K^2 - K^{bd} K_{bd} \right) - E_{\mu\nu} \ , \tag{7}$$

[2] Siguiendo el libro, An advanced course in general relativity de Eric Poisson, los índices látinos a, b, c, ..., recorren 0,1,2,3; en tanto que los índices griegos $\mu, \nu, \ldots$, recorren 0,1,2,3,4.

donde $G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}$, $E_{\mu\nu} = R^{\mu}_{\alpha\nu\beta}n_\mu n^\nu e^\alpha_a e^\beta_b$. Haciendo uso de la ecuación de campo de Einstein en cinco dimensiones

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = \kappa^2 T_{\alpha\beta} \ , \tag{8}$$

y descomponiendo el tensor de Riemann en el tensor de curvatura de Weyl, el tensor de Ricci y el escalar de curvatura, podemos obtener la siguiente expresión

$$G_{ab} = \frac{2\kappa^2}{3}\left[T_{\alpha\beta}e^\alpha_a e^\beta_b + \left(T_{\mu\nu}n^\mu n^\nu - \frac{T}{4}\right)h_{ab}\right] + KK_{ab} - K^d_b K_{ad} - \frac{h_{ab}}{2}\left(K^2 - K^{bd}K_{bd}\right) - E_{ab} \ , \tag{9}$$

donde $E_{ab} = C^{\mu}_{\alpha\nu\beta}n_\mu n^\nu e^\alpha_a e^\beta_b$, término conocido como radiación oscura.

De la ecuación de Codazzi y con la ecuación de Einstein 5-dimensional, se encuentra [11] [12] [13] [14]

$$K^\nu_{\mu|\nu} - K_{|\mu} = \kappa^2 T_{\alpha\beta}n^\beta h^\alpha_\mu \ . \tag{10}$$

3. Modelo de Randall-Sundrum

Considerando una métrica general, que de cuenta de soluciones de tipo cosmológico, tal como

$$ds^2_5 = -N^2(t,y)dt^2 + A^2(t,y)\gamma_{ij}dx^i dx^j + B^2(t,y)dy^2 \ , \tag{11}$$

en la cual podemos hacer $B^2(y) \to 1$, con lo cual se libera la coordenada adicional u extra de la función $B^2(y)$, así obtenemos [1] [2]

$$ds^2_{4+1} = -N^2(y)dT^2 + A^2(y)\gamma_{ij}dx^i dx^j + dy^2 \ , \tag{12}$$

entonces podemos simplificar

$$ds^2_{4+1} = \left(N^2(y)\delta_{ij} + A^2(y)\gamma_{ij}\right)dx^\mu dx^\nu + dy^2 \ , \tag{13}$$

de tal forma que se puede hacer la siguiente identificación [3] $\left(N^2(y)\delta_{ij} + A^2(y)\gamma_{ij}\right) = e^{\frac{-2|y|}{l}}\eta_{\mu\nu}$. Esta identificación general permitirá desarrollar el modelo de braneworld y solucionar en principio el problema de jerarquías, el cual es un problema fundamental en la física de altas energías.

En el marco de los modelos de braneworld, como por ejemplo en los modelos de Randall y Sundrum, se considera que las branes estan sumergidas en un espaciotiempo AdS_5, en donde se puede introducir un sistema de coordenado Gausiano normal, así que las cooordenadas en tal espaciotiempo se pueden denotar como $x^\mu = (x^a, y)$ con lo cual puede considerarse que la métrica adopta la siguiente expresión [3] [4] [9] [10] [15] [16]

$$ds^2 = e^{-2K|y|}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + dy^2 \ , \tag{14}$$

el factor de curvatura exponencial, introducido anteriormente, significa que el volumen en el espacio 5D se puede hacer pequeño cuando y se hace grande. En su primer artículo Randall y Sundrum mostraron que la jerarquía entre la escala electrodébil de TeV y la aparente escala de Plank de $10^{19}GeV$, se puede explicar por el factor de curvatura, aún si el tamaño de la dimensión extra es relativamente pequeña (distancia entre branes). Ya en su segundo artículo mostraron que si no existía una segunda brane, y la dimensión extra se extendía al infinito, la gravedad puede permanece efectivamente localizada sobre la única brane existente, ya que el volumen integrado permanece finito cuando $y \to \infty$, esta es la razón por la cual se propuso este modelo como una alternativa a la compactificación, es decir como un manera diferente de estudiar y de introducir dimensiones adicionales de tipo espacial infinitas.

El éxito experimental de la ley Inversa del Cuadrado y de la Teoría General de la Relatividad, es que parecen en todas las situaciones implicar cuatro dimensiones espaciotemporales no compactas (universo 3+1). La concepción clásica o tradicional es que las dimensiones adicionales pueden ser aceptadas tan sólo si ellas son compactas y suficientemente pequeñas para ser consistentes con las pruebas gravitacionales corrientes, como también es que si existen n-dimensiones extras compactas, la escala de Planck, debe relacionarse con la escala gravitacional en altas dimensiones, mediante $M^2_{Pl} = M^{2+n}V_n$, donde V_n, es el volumen del espacio n-dimensional.

[3] En realidad la métrica Randall-Sundrum tiene su origén en la teoría de cuerdas, propiamente dicha, y es allí donde se encuentra plenamente justificado el factor de curvatura exponencial.

El modelo Randall-Sundrum, muestra que nada de lo establecido anteriormente, es necesariamente cierto, ya que lo establecido esta basado en las propiedades de una geometría factorizable, la historia puede cambiar significativamente cuando tal consideración sea omitida, talvéz la consecuencia más dramática es que quizá vivimos en un espaciotiempo de $4+n$ dimensiones con n dimensiones de tipo no compactas, en perfecta compatibilidad con la gravedad experimental.

Se muestra que la masa de Planck esta determinada por la curvatura de las altas dimensiones más que por el tamaño de las dimensiones extras. Esta curvatura no entra en conflicto con la invarianza cuadridimensional de Poincaré. La razón de lo establecido anteriormente, es que la curvatura del espacio cinco-dimensional soporta un "estado acotado" de un gravitón en altas dimensiones sin masa permaneciendo confinado a una pequeña región del espacio [4] [1] [2] [3].

En el escenario braneworld no se realiza una compactificación para localizar la gravedad en la brane, sino que por el contrario se considera que la curvatura del volumen (bulk) permite tratar la gravedad, para evitar que 'escape' en las dimensiones extras, en tanto que a bajas energías interviene una constante cosmológica de tipo volumétrica (bulk), la cual "presiona"la gravedad

$$\Lambda_5 = -\frac{6}{\kappa^2 l^2} = -6\mu^2 \;, \tag{15}$$

donde l es el radio de curvatura del espacio AdS_5 y donde μ es la correspondiente escala de energía. Esto es como si la constante cosmológica volumétrica actuara para presionar el campo gravitacional cercano a la brane. La métrica de los modelos RS, se puede escribir de forma general como

$$ds^2 = e^{-2K(y)}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + dy^2 \;, \tag{16}$$

en la que se ha introducido la función $K(y)$, la cual contiene información de la dimensión extra.

Ahora bien, llevando la métrica a la ecuación de campo gravitacional [17] [18] [19] [20], obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$6K'^2 = -\kappa^2\Lambda_2 \;, \;\; 3K'' = \kappa^2\lambda\delta(y) \;, \tag{17}$$

solucionando la primera ecuación se obtiene la siguiente solución

$$K(y) = \sqrt[2]{-\frac{\kappa^2\Lambda_5}{6}}y \equiv k \mid y \mid \;, \tag{18}$$

corresponde a la función introducida anteriormente, lo cual nos dice que Λ_5 debe ser negativo, ahora, si se integra la segunda ecuación desde $-\varepsilon$ a $+\varepsilon$ y tomando el límite $\varepsilon \to 0$, y en consideración de la simetría Z_2 (simetría de orbifold o periódica sobre una circunferencia), encontramos $6K' = \kappa^2\lambda$, lo cual junto a $K(y) = k \mid y \mid$ conduce a que $\Lambda_5 = -\frac{\kappa^2\lambda^2}{6}$, que es la expresión análoga a lo que se conoce como ajuste-fino entre la tensión de la brane y la constante cosmológica volumétrica, así que mediante un ajuste adecuado permite obtener la solución RS estática.

En el modelo RSI (modelos de dos branes), localizadas en $y = 0, \quad y = L$, con simetría Z_2, y donde se considera que en cada brane existe una tensión, las cuales son iguales y opuestas, es decir $\pm\lambda$, donde

$$\lambda = \frac{3M_p^2}{4\pi l^2} \;, \tag{19}$$

de este modo en la brane de tensión positiva existe la escala fundamental de energía M_5 (llamada brane oculta), y en la brane de tensión negativa encontramos localizados los campos del Modelo Estándar que están confinados sobre esta brane (llamada brane visible). Debido al factor de curvatura exponencial, la escala efectiva sobre la brane visible en $y = L$ es la escala de Planck M_p, donde [3]

$$M_p^2 = M_5^3 l\left[1 - e^{-2L/l}\right] \;, \tag{20}$$

expresión que muestra una aproximación a la solución del problema de jerarquías, cuando $L \to \infty$, $M_p^2 = M_5^3 l$, luego existe un valor bien definido para la masa de Planck, incluso si la dimensión adicional es infinita [4].

En resumén, el modelo RSI, propone un mecanismo para solucionar el problema de jerarquías introduciendo una dimensión extra pequeña, con un espacio intermembrana tipo AdS_5, en tanto que en el segundo modelo RSII introduce una brane con tensión positiva y donde la segunda membrana se remueve al infinito, de tal forma que aun

[4] Es decir, que las fluctuaciones o interacciones gravitacionales descritas mediante los gravitones permanezcan acotadas o constreñidas a las vecindades de la brane, para evitar que la energía de dichas interacciones termine escapando.

si no existe la otra brane y la dimensión extra se extiende hasta el infinito, la gravedad permanece efectivamente localizada sobre la brane existente, ya que el volumen completo permanece finito cuando la dimensión extra tiende a infinito, esto es lo que se ha propuesto como una alternativa a la compactificación [21] [22] [23] [24] [25].

4. Conclusiones

En las secciones anteriores se ha hecho una descripción ”gruesa”de los modelos de braneworld o mundobranas, se han destacado algunos elementos relevantes, se ha mencionado que existe un estado acotado de gravitón localizado cerca de la brane, como también, se ha mostrado la compatibilidad de la física del modelo estándar con la existencia de una dimensión extra infinita, y finalmente, se ha mostrado que los ‘atajos’ o ‘cortos circuitos’ a travéz de la quinta dimensión permiten obtener una ventaja de las señales gravitacionales sobre las electromagnéticas. Como elemento general podemos destacar que este tipo de modelos, aunque hipotéticos, permiten reproducir sin mayores modificaciones lo conocido de la física estándar, esto sólo es coherencia en el sistema , pero no quiere decir que la naturaleza sea asi, en el futuro con resultados concretos, experimentos especiales y observaciones detalladas y metículosas, se descartarán estos modelos o deberán tomarse verdaderamente en serio.

Referencias

[1] M. Szydlowski, M. P. Dabrowski, W. Godlowski, Astro-ph/0212100v2.
[2] M. Szydlowski, M. P. Dabrowski, W. Godlowski, Astro-ph/0212100v3.
[3] L Randall, R. Sundrum, Phys. Rev. Lett., 83 (1999), 3370.
[4] L Randall, R. Sundrum, Phys. Rev. Lett., 83 (1999), 4690.
[5] J. Garriga, T. Tanaka, hep-th/9911055v4.
[6] D. Langlois, qr-qc/0207047v1.
[7] T. Shiromizu, K. Maeda, M. Sasaki, Phys. Rev. D 62, 024012 (2000).
[8] Poisson. E, *An advanced course in general relativity*, Unv. Guelph, 2002.
[9] Maartens. R, *Geometry and dynamics of the Brane World*, gr-qc/0101059v2.
[10] S. Mukohyama, T. Shiromizu, K. Maeda, Phys. Rev. D 62, 024028 (2000).
[11] C. Barceló, M. Visser, hep-th/0004056v1.
[12] Collins. P. D. B, Martin.A. D, *Particles Physics and Cosmology,* John Wiley and Sons, 2000.
[13] T. Shiromizu, K. Maeda, M. Sasaki, Phys. Rev. D 62, 024012 (2000).
[14] Poisson. E, *An advanced course in general relativity*, Unv. Guelph, 2002.
[15] Maartens. R, *Geometry and dynamics of the Brane World*, gr-qc/0101059v2.
[16] Maartens. R, *Brane-World Gravity*, Cosmology and Gravitation, Portmouth. U.K, 2004.
[17] E. Flanagan, S. H. Henry, I. Wasserman, Phys. Rev. D 62, 044039 (2000).
[18] P. Binetruy, C. Defayet, U. Ellwanger, D. Langlois, hep-th/9910219**.**
[19] Éanna, É., S. H. Henry, Cosmological expansion in the braneworld, Phys. Rev. D, 62,044039, (2000).
[20] T. Padmanabhan, Dark Energy and Gravity, IUCAA, Ganeshkhind, Pune - 411 007, India, 2007. M.
[21] P. Horava, E. Witten, Nucl. Phys. B460 (1996), 506, ibid B475, 94.
[22] J. Garriga, T. Tanaka, hep-th/9911055v4.
[23] R. Caldwell, D. Langlois, qr-qc/0103070v1.
[24] S. Mukohyama, T. Shiromizu, K. Maeda, Phys. Rev. D 62, 024028 (2000).
[25] C. Barceló, M. Visser, hep-th/0004056v2.