

# Simulación interactiva del problema de dos cuerpos perturbados por un objeto de masa variable dependiente de la posición: un ilustrativo ejemplo para el estudio de la cinemática de cometas

Interactive Simulation Of The Two-Body problem perturbed by object with variable mass that depend of position: a illustrative example for study the cinematics of comets

J.E. García-Farieta <sup>a</sup>\*, R. Casas <sup>b</sup>.

<sup>a</sup>Universidad Nacional de Colombia - Sede Bogotá.

<sup>b</sup>Departamento de Física - Grupo de Astrofísica.

Aceptado Diciembre 2014; Publicado en línea Marzo 2015.

ISSN 2256-3830.

## Resumen

En este documento se realiza una simulación interactiva de la perturbación al problema de dos cuerpos ocasionada por la presencia de un tercer cuerpo cuya masa varía explícitamente con la posición e interactúa gravitacionalmente con los otros dos. Una aproximación a la solución del problema se obtiene del estudio del sistema compuesto por dos partículas aisladas, el cual resulta siendo una solución restringida del problema de tres cuerpos, con todas las interacciones modeladas mediante potenciales Keplerianos. Las ecuaciones de movimiento se obtienen a partir de las ecuaciones de Lagrange sin consideraciones adicionales respecto a fuerzas generalizadas. Dado el número de variables en el sistema y considerando el término perturbativo, se tiene que el problema no es integrable analíticamente, por lo que se recurre a la simulación como parte del proceso de estudio. En este contexto en particular, resulta de interés hacer una comparación con la cinemática de cometas.

**Palabras Claves:** Perturbación, tres cuerpos, simulación, ecuaciones de Lagrange, masa variable en función de la posición.

## Abstract

In this document we perform an interactive simulation to the two bodies problem with a disturbance caused by the presence of a third body with mass varies with the position explicitly and interacts gravitationally with the other two. An approach to the problem solution is obtained from two isolated particles, that is a restricted solution to the three body problem, all interactions are modeled as Keplerian potential. The equations of motion are derived from Lagrange's equations without additional considerations that generalized forces. Given the number of variables in the system and considering the perturbation term, we find that the problem is not integrable analytically, so it uses simulation as part of the study. In particular is interesting to compare the kinematics of comets.

**Keywords:** Disturbance, three bodies, simulation, Lagrange equations, variable mass depending on the position.

---

\* joegarciafa@unal.edu.co

## **1. Introducción**

La dinámica de cuerpos celestes es un problema inquietante desde hace varios siglos, que puede ser estudiado desde el punto de vista de la mecánica celeste no relativista, exclusivamente considerando la ley de gravitación Universal; bajo este formalismo se describen satisfactoriamente las trayectorias que tales cuerpos pueden tener bajo fuerzas atractivas. Un caso particular de éste problema es la restricción exclusiva a un sistema de tres cuerpos (dos primarios y un perturbador), siendo el objetivo determinar la posición del tercer cuerpo, esto es, encontrar las ecuaciones de movimiento para todo el sistema considerando la perturbación causada por las interacciones gravitacionales con los cuerpos primarios.

Una primera aproximación a la solución del problema se obtiene del problema de dos cuerpos, ya que en éste las ecuaciones de movimiento son integrables analíticamente [1]. Introduciendo pequeñas perturbaciones, se obtiene que para períodos de tiempo relativamente grandes, los cuerpos se ven afectados gravitacionalmente, alterando su trayectoria a medida que transcurre el tiempo; para configuraciones de tres o más cuerpos, las ecuaciones diferenciales que se obtienen no son solubles con métodos analíticos, por lo que es viable utilizar integradores numéricos. Las ecuaciones de movimiento se obtienen utilizando el formalismo de Lagrange sin consideraciones adicionales respecto a fuerzas generalizadas no conservativas. Sin embargo, pese a que es bien conocido que las ecuaciones de Lagrange se pueden aplicar directamente a sistemas mecánicos cuya masa varía con el tiempo, esto no es cierto si la masa varía explícitamente con la posición; esta sutil diferencia es tratada y discutida en [2]. En este sentido es de tener en cuenta que la variación de la masa con la distancia se entiende como fluctuaciones propias del cuerpo, es decir, no atribuidas a efectos extrínsecos; esto en realidad no es del todo cierto, aunque en primera aproximación resulta ilustrativo para examinar la cinemática del cuerpo de interés, dada la existencia de este tipo de perturbaciones. A modo de ejemplo se sabe que los cometas, cerca de su perihelio, pierden grandes cantidades de material debido a la incidencia de radiación solar sobre su superficie, en algunos casos se han de adoptar modelos que tengan en cuenta este flujo de material, el cual es difícil de modelar por la manera espontánea y completamente aleatoria con que aparecen los chorros de material expulsado. De acuerdo con el modelo planteado por Whipple [3], las variaciones de masa se pueden describir con la ley del inverso del cuadrado de la distancia, de este modo el cuerpo puede ser descrito como un objeto compuesto por pequeñas partículas que añaden o restan masa durante su recorrido orbital, en lugar de ser efectos de eyección de masa. Desde el punto de vista de Lagrange estos efectos pueden ser entendidos como una fuerza generalizada que surge naturalmente de las ecuaciones de movimiento.

Dado el número de variables dinámicas del sistema y considerando el término perturbativo, el problema no es integrable analíticamente, por lo que se recurre a la simulación como parte del proceso de estudio. En la simulación interactiva se aprecia la evolución de las trayectorias para cada uno de los cuerpos sujetos a atracción gravitatoria, y se pueden alterar las condiciones iniciales en un espacio de tres dimensiones. Las ecuaciones de movimiento se han integrado utilizando el método de Cash-Karp 5(4). Este método se basa en dos esquemas integrados de Runge-Kutta, específicamente utiliza seis evaluaciones de la función de interés para calcular soluciones precisas de cuarto y quinto orden, eligiendo la diferencia entre estas soluciones se obtiene un valor medio con un error de cuarto orden; esta estimación de error resulta conveniente para los algoritmos de integración adaptativos, proporcionando un excelente rendimiento en una amplio número de situaciones. La simulación se ha implementado con el software Easy Java Simulations [4], el cual permite desarrollar un entorno interactivo 3D para la visualización en tiempo real de los valores de posición y velocidad asociados a elementos gráficos.

## **2. Modelo**

El problema de los tres cuerpos es un modelo que describe el movimiento de tres partículas aisladas, que no tiene en cuenta otro tipo de interacciones más que la fuerza gravitacional entre ellos. En algunas configuraciones que involucran el movimiento de una partícula alrededor de otra, se puede realizar una aproximación a través de la solución del problema de dos cuerpos [5], esto significa que todas las posibles interacciones que puedan influir en el movimiento de esos cuerpos se deben únicamente a un potencial Kepleriano. Sin embargo la presencia de un tercer cuerpo en el sistema genera una fuerza de perturbación asociada a la interacción gravitacional que modifica

la dinámica del sistema.

El problema de tres cuerpos puede ser formulado en términos de ecuaciones diferenciales ya sea con origen de coordenadas en el espacio eligiendo un sistema inercial de referencia ó en el centro de masa uno de los cuerpos [6], en este caso el sistema elegido es inercial. Dentro de las consideraciones hechas se tiene que los cuerpos son simétricamente esféricos y que su masa esta uniformemente distribuida. Las ecuaciones de movimiento en el problema de tres cuerpos sin perturbaciones están dadas por la ecuación (1) en un sistema inercial de referencia [7].

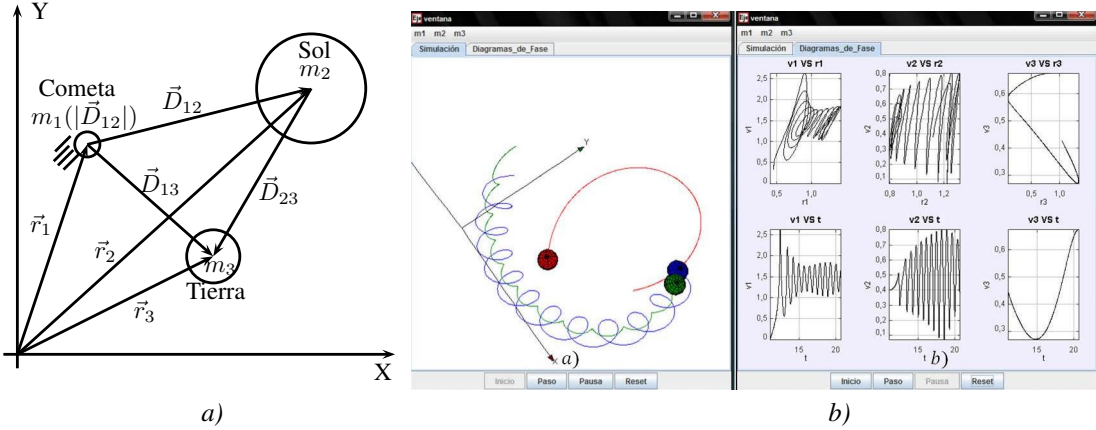


Fig. 1. a) Representación esquemática del problema de tres cuerpos: el sistema de interés consta de dos cuerpos cuyas masas son constantes y un tercer cuerpo cuya masa varia con la distancia relativa a uno de los otros dos cuerpos, en analogía con el sistema Cometa-Tierra-Sol; b) Entorno gráfico de simulación con los respectivos diagramas de fase para una configuración con condiciones iniciales arbitrarias.

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = -G \sum_{j=1, j \neq i}^3 \frac{m_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \quad (1)$$

En este caso particular vale notar que  $m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 + m_3 \ddot{\vec{r}}_3 = 0$ , por lo que al integral dos veces respecto al tiempo se encuentra una constante de movimiento, resultado de la conservación de  $\vec{p}$ , y se deduce que el centro de masa del sistema describe un movimiento uniforme, i.e.  $\vec{R}_{CM} = \alpha t + \beta$ , con  $\alpha$  y  $\beta$  constantes propias del movimiento.

Al considerar sistemas con masa variable explícitamente con la distancia, la ecuación (1) deja de ser adecuada para describir este tipo de sistemas, las ecuaciones de Lagrange también se deben modificar, puesto que en su formulación tradicional no contempla este tipo de fenómenos. Como motivación, considérese el caso hipotético de una partícula de masa  $m(x)$ , sobre la que actúa una fuerza que depende de la posición, velocidad, y tiempo, en general; la ecuación de movimiento esta dada por  $m'(x)x^2 + m(x)\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t)$ , sin embargo utilizando la forma tradicional de las ecuaciones de Lagrange se obtiene la ecuación (2); claramente existe una incongruencia en un factor de un medio.

$$\frac{1}{2} m'(x)x^2 + m(x)\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t). \quad (2)$$

Las ecuaciones modificadas de Lagrange pueden obtenerse a partir del trabajo realizando por desplazamientos virtuales, es decir: no reales e infinitesimales, de donde es simple ver que  $\left(\frac{d\vec{p}_i}{dt} - \vec{F}_i\right) \cdot \delta\vec{r}_i = 0$ ; teniendo en cuenta que  $\vec{p}_i = m(|\vec{r}_i|)\dot{\vec{r}}_i$ , y que los desplazamientos  $r_i$  pueden ser reescritos en términos de coordenadas generalizadas  $q_i$ , fácilmente se puede obtener las ecuaciones de Lagrange que contemplan fenómenos de masa variable con la distancia en concordancia con la ecuación (3). Ahora, nuestro sistema de interés consta de tres cuerpos, dos cuerpos cuyas masas son constantes y un tercer cuerpo de masa variable con la distancia relativa a uno de los otros dos cuerpos, en analogía con el sistema Cometa-Tierra-Sol (ver Fig. 1a); es claro que la única fuente de variación de masa del Cometa será el Sol, en tanto la Tierra únicamente perturbará gravitacionalmente el movimiento de los otros dos cuerpos. Como es natural, el lagrangiano del sistema estará dado por la ecuación (4), en donde  $D_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$  y  $m_1 = m_1(|D_{12}|)$ .

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + \frac{1}{2} \sum_i^N v_i^2 \frac{dm_i}{dq_i} = 0 \quad (3)$$

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^3 \left[ \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) + \sum_{j=1, j \neq i}^3 \frac{G m_i m_j}{D_{ij}} \right] \quad (4)$$

A partir de las ecuaciones de Lagrange modificadas, ec. (3), las ecuaciones de movimiento que se obtienen para este sistema están dadas por las ec. (5), (6) y (7). En tanto la dependencia de la masa con la distancia relativa a un cuerpo se puede describir con la ec. (8), de acuerdo con el modelo cometario de Whipple [3].

$$\ddot{\vec{r}}_1 = G \left[ \frac{m_2(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{D_{21}^3} + \frac{m_3(\vec{r}_3 - \vec{r}_1)}{D_{31}^3} \right] - \frac{1}{m_1 D_{12}} \frac{\partial m_1}{\partial D_{12}} \left[ \frac{G m_2}{D_{12}} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + \frac{G m_3}{D_{13}} (\vec{r}_3 - \vec{r}_1) + (\dot{\vec{r}}_2 - \dot{\vec{r}}_1) \dot{\vec{r}}_1 \right] \quad (5)$$

$$\ddot{\vec{r}}_2 = G \left[ \frac{m_3(\vec{r}_3 - \vec{r}_2)}{D_{23}^3} - \frac{m_1(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{D_{12}^3} \right] + \frac{G}{D_{12}^2} \frac{\partial m_1}{\partial D_{12}} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \quad (6)$$

$$\ddot{\vec{r}}_3 = G \left[ -\frac{m_1(\vec{r}_3 - \vec{r}_2)}{D_{31}^3} - \frac{m_2(\vec{r}_3 - \vec{r}_2)}{D_{23}^3} \right] \quad (7)$$

$$m_1 = m_{01} \left( 1 - \frac{\beta}{D_{12}^2 + \beta} \right), \quad \text{con } \beta > 0 \text{ y } m_{01} = cte \quad (8)$$

Este conjunto de ecuaciones no tienen solución analítica, además se puede apreciar los términos perturbativos que dominan en la ec. (5) debido al cuerpo de masa variable, que a su vez afecta la dinámica de los otros dos cuerpos. En la simulación estos términos se tienen en cuenta para observar gráficamente la evolución del movimiento de cada cuerpo en un diagrama de fase.

### 3. Resultados

La evolución dinámica del sistema de tres cuerpos perturbados, con partículas autogravitantes e incluyendo el término asociado a la variación de masa se describe mediante el Lagrangiano (4), con las correspondientes ecuaciones de movimiento (5), (6) y (7). En la Fig. 1b se muestra el entorno gráfico que se desarrolló utilizando el software Easy Java Simulations [4]; se crearon dos ventanas en las que se visualiza en tiempo real la evolución del sistema de manera gráfica, con el trazado de trayectorias, y su correspondiente evolución en el espacio de fases. La simulación se realiza definiendo las variables de posición y velocidad en componentes cartesianas, para un total de 18 ecuaciones; a las variables de posición y velocidad se les asignaron los elementos gráficos necesarios para crear un ambiente amistoso de simulación, con botones, menús, y gráficas; los controles se implementaron en forma de caja, y barra de desplazamiento para manipular la masa de cada cuerpo, la posición en cada coordenada rectangular ( $x, y, z$ ) y la velocidad ( $v_x, v_y, v_z$ ), así como el parámetro  $\beta$ , que define la tasa de cambio de la masa. En la Fig. 3 se observa la solución mas “simple” a este problema, para la cual el parámetro  $\beta = 0$ , estas soluciones corresponden al problema restringido de tres cuerpos para soluciones conocidas con orbitas cerradas y estables, las condiciones iniciales se pueden obtener de [9].

Las pequeñas variaciones del parámetro  $\beta$  inducen fuertes cambios en las trayectorias de los cuerpos como se muestra en la Fig. 3; teniendo en cuenta además que éste tipo de problemas es muy susceptible a las condiciones iniciales utilizadas [10]. Adicionalmente se tuvo en cuenta que el método numérico empleado en la simulación, no produce una aproximación continua para la solución del problema inicial, sino que genera aproximaciones a dicha solución en algunos puntos específicos. El método numérico que se consideró más adecuado fue el Cash-Karp 5(4), dado que presenta una gran rapidez de cálculo, funciona adecuadamente con pocos recursos informáticos y proporciona una buena aproximación a la solución del problema para un intervalo de tiempo relativamente alto de acuerdo con el numero de orbitas que los cuerpos realizan, con ello se logra contrastar lo predicho por (4) y (5)-(7). Esta herramienta de simulación proporciona una visión más amplia acerca del movimiento de cuerpos celestes en el espacio, considerando diversos casos particulares creados por el mismo entorno al alterar las condiciones iniciales.

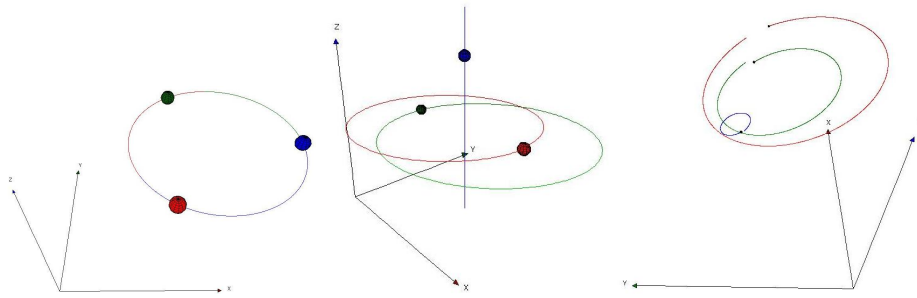


Fig. 2. Simulación del problema de tres cuerpos con  $\beta = 0$ . Para condiciones iniciales bien definidas las orbitas son estables, cerradas y bien comportadas; de izquierda a derecha: solución planar circular de Lagrange, solución de Sitnikov, y solución para la configuración colineal de Euler.

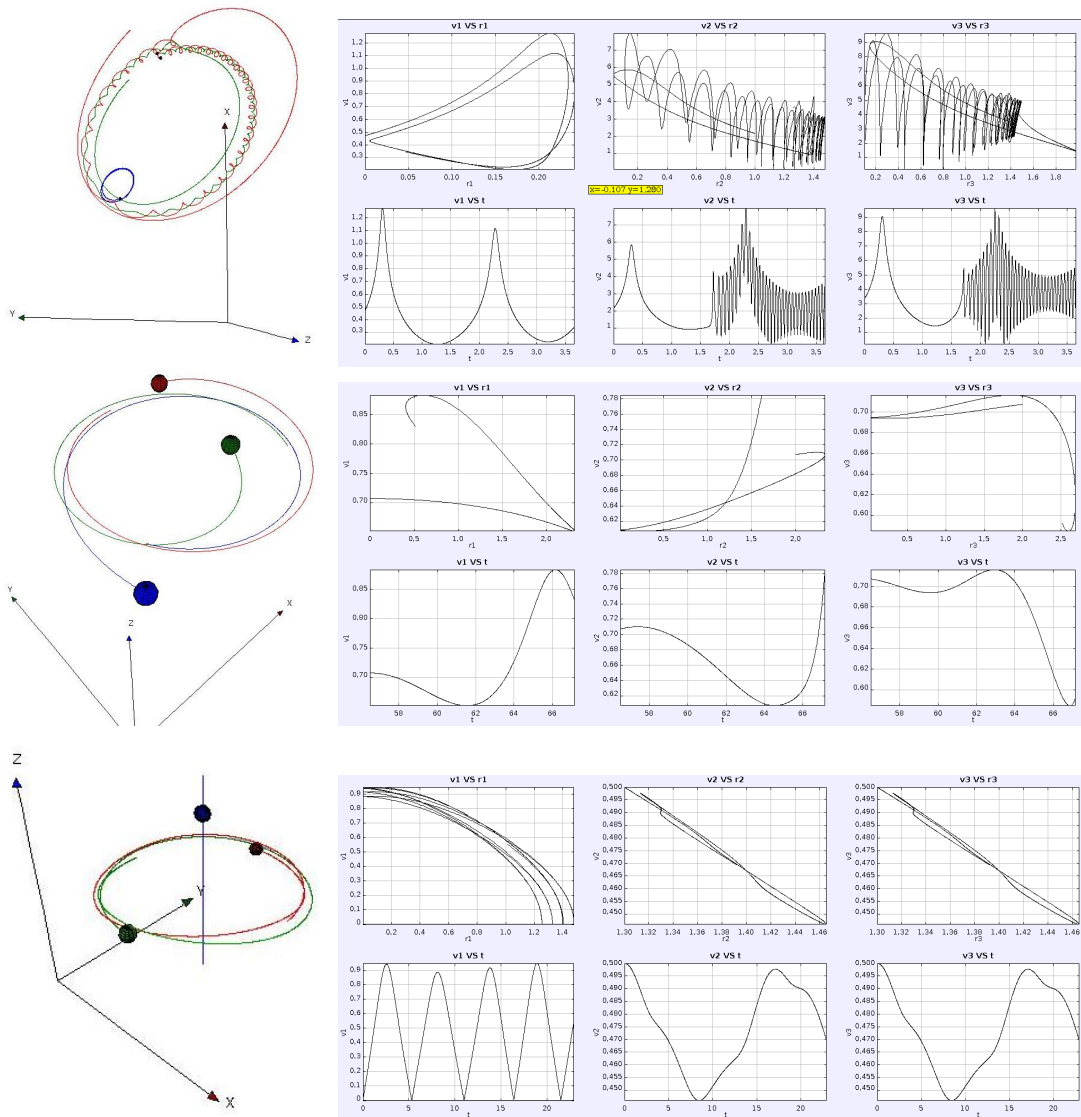


Fig. 3. Simulación de de orbitas inestables manteniendo las condiciones iniciales de la Fig. 3, con  $\beta \approx 1$ . De arriba hacia abajo: configuración planar circular de Lagrange con masa variable, Sitnikov con masa variable, y configuración colineal de Euler con masa variable.

#### 4. Conclusiones

Se obtuvieron las ecuaciones de Lagrange modificadas para estudiar sistemas con masa variable en función de la distancia entre cuerpos. Estas ecuaciones producen naturalmente términos proporcionales al cuadrado de la velocidad como  $\frac{1}{2} \sum_i^N v_i^2 \frac{dm_i}{dq_i}$ .

Con el formalismo Lagrangiano se obtuvieron las ecuaciones de movimiento para un sistema análogo a Cometa-Tierra-Sol, siendo de interés la dinámica del sistema inducida por las variaciones de masa del cometa en función de su distancia relativa al Sol, con ello se pone de manifiesto, en las ecuaciones dinámicas, la importancia de los términos perturbativos.

Se trazaron distintas trayectorias, estables e inestables, cerradas y abiertas, para condiciones iniciales bien conocidas del problema de tres cuerpos; la solución numérica en tiempo real proporciona una descripción gráfica de los movimientos de cada cuerpo y su consistencia con las trayectorias en el espacio de fases hasta que el método numérico diverje.

La evolución en tiempo real de los diagramas de fase adquieren relevancia a la hora de determinar trayectorias y comportamientos anómalos en el estudio de estos sistemas físicos; con ello la simulación facilita la comprensión de la evolución de las órbitas, proporcionando además evidencia sobre la existencia de la perturbación debida a la masa de los cuerpos en cuestión.

La simulación computacional se convierte en un laboratorio "ideal", más aún en el campo de la mecánica celeste, en el que difícilmente se encuentran herramientas que permitan observar y hacer cálculos simultáneamente. La simulación de la perturbación al problema de los dos cuerpos se realizó en EJS, haciendo uso del entorno y de las herramientas de este programa; teniendo en cuenta que éste tipo de problemas no tiene solución única por ser tratada con métodos numéricos, la simulación es resultado del estudio aproximado de su evolución, en la que se permite variar las condiciones iniciales de acuerdo a los límites prefijados.

#### References

- [1] Meyer, Kenneth Ray, Glen R. Hall, and Daniel Clyde Offin. Introduction to Hamiltonian dynamical systems and the N-body problem. Springer Science+ Business Media, 2009.
- [2] Pesce, C. P. The application of Lagrange equations to mechanical systems with mass explicitly dependent on position. Journal of Applied Mechanics, 70(5), 751-756. 2003
- [3] Whipple, F. L. A Comet Model. III. The Zodiacal Light. The Astrophysical Journal, 121, 750. 1955
- [4] F. Esquembre. Easy Java Simulations 4.1. <http://fem.um.es/Ejs>. 2008.
- [5] P.E. Zadunaisky. Introducción a la Astrodinámica: Teoría y métodos Numéricos. 1a ed. Buenos Aires: Comisión Nacional de Actividades Espaciales, 1998.
- [6] Marchal, C. The three-body problem. Elsevier. Chicago. 2012
- [7] Bate, Roger R., et al. Fundamentals of astrodynamics: (dover books on physics). Dover publications, 2013.
- [8] Chenciner, A., Montgomery, R. A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses. Annals of Mathematics-Second Series, 152(3), 881-902. 2000
- [9] Howell, K. C., and H. J. Pernicka. Numerical determination of Lissajous trajectories in the restricted three-body problem. Celestial Mechanics 41.1-4. 107-124. 1987
- [10] Laskar, Jacques, and Philippe Robutel. Stability of the planetary three-body problem. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy 62.3. 193-217. 1995