

Fractales en la Aplicación del Método de Newton al Plano Complejo

Juneth A. Terán-Tarapué¹
Catalina M. Rúa-Alvarez²

Abstract. Newton's method is one of the most known methods for approximation of solutions of equations and systems of non-linear equations. In this paper some characteristics of Newton's method will be shown to approximate real solutions from numerical results. Furthermore, the application of the method to approximate complex solutions will be presented, by mean of the development of the well-known Cayley problem proposed in the year 1879 which states: "If we begin with a random point on the complex plane, what root of the function $f(z) = z^3 - 1$ will converge to Newton's method?". The answer to this problem lead us surprisingly to a fractal.

Keywords. Newton's method, complexes, iterations, fractal.

Resumen.

El método de Newton es uno de los más conocidos para aproximar soluciones de ecuaciones y de sistemas de ecuaciones no lineales. En este texto se mostrarán a partir de resultados numéricos algunas características del método de Newton para aproximar soluciones reales. Además se presentará la aplicación que tiene este método para aproximar soluciones complejas, a través del desarrollo del conocido problema de Cayley propuesto en el año 1879 dado por: "¿Si se parte de un punto aleatorio del plano complejo, a qué raíz de la función $f(z) = z^3 - 1$ convergirá el método de Newton?". La respuesta a este problema conduce sorprendentemente a una figura fractal.

Palabras Clave. Método de Newton, complejos, iteraciones, fractal.

1. Introducción

La solución de ecuaciones es uno de los problemas más importante en el cálculo científico y simulación numérica. En especial, las ecuaciones no lineales representan un tema de gran interés para muchos investigadores dado que encontrar su solución analítica no suele ser tan directo como en el caso de la búsqueda de soluciones de ecuaciones lineales. En consecuencia, se han estudiado y desarrollado diversos métodos numéricos con los cuales se pueden obtener

¹Universidad de Nariño, Departamento de Matemáticas y Estadística, Pasto, Colombia. e-mail: juneth0102@hotmail.com

² Universidad de Nariño, Departamento de Matemáticas y Estadística, Pasto, Colombia. e-mail: catalina.rua@udenar.edu.co

buenas aproximaciones de dichas soluciones, ver en [1, 3, 5, 6] y [11].

Una de las características que se tiene en cuenta al estudiar métodos numéricos es el orden de convergencia, que se refiere a la velocidad con la que una sucesión converge; de este modo se destaca los métodos numéricos que permiten obtener una aproximación confiable en el menor tiempo posible. Existen métodos de primer y segundo orden e incluso métodos de orden superior como se muestra en [1], los métodos de segundo orden se caracterizan por duplicar el valor de cifras exactas en cada iteración lo que los hace más veloces en comparación con métodos de primer orden.

Dentro de los métodos numéricos con orden de convergencia dos se encuentra el método de Newton que también se caracteriza por ser flexible es decir, a partir de este método se puede conseguir un método con orden de convergencia mayor, como es el caso del método de la secante que se constituye como una mejora al método de Newton donde se aproxima el valor de la derivada, ver en [10]. Además, el método de Newton puede aplicarse en diferentes campos de la ciencia como por ejemplo en medicina, para determinar en la ecuación de concentración en la corriente sanguínea la dosis que deberá ser inyectada a un paciente para alcanzar la máxima concentración segura; en demografía, para encontrar el crecimiento poblacional o la tasa de natalidad de una población, entre otras. Otra cualidad del método es que se puede generalizar para la búsqueda de aproximaciones de las soluciones de sistemas de ecuaciones no lineales $n \times n$ y de las soluciones de ecuaciones no lineales de variable compleja, se puede ampliar en [7] y [10].

La aplicación que se estudiará en las siguientes secciones es la del problema de Cayley, en la cual puntos arbitrarios del plano complejo se iteran con el método de Newton y el análisis de las zonas de convergencia de las sucesiones obtenidas permite conseguir figuras de naturaleza fractal caracterizadas por un efecto visual de pétalos.

2. Marco Teórico

2.1. Método de Newton

Muchas aplicaciones en las diferentes ramas de las ciencias conducen a la necesidad de la resolución de ecuaciones o sistemas de ecuaciones no lineales como sucede en la ecuación de las leyes de los gases ideales y no ideales, la ecuación de Kepler $f(x) = x - b - a \sin x$ donde a y b son parámetros reales o complejos, el modelo depredador-presa al discretizarse de forma implícita, el análisis de la respuesta transitoria de un reactor, entre otras, ver en [2] y [10].

En una gran variedad de casos no es posible determinar las soluciones analíticas de las ecuaciones no lineales involucradas en los modelos matemáticos y solo se puede obtener una aproximación de la solución buscada por medio de diferentes métodos numéricos. Uno de los más utilizados es el método de Newton al caracterizarse por su eficiencia y versatilidad, precisamente con este método se pueden obtener buenas aproximaciones de las soluciones de una ecuación no lineal y además es aplicable para determinar aproximaciones del vector solución de un sistema de ecuaciones no lineales e incluso para las soluciones de ecuaciones de variable compleja. Lo anterior se observa en [1] y [10].

A continuación se define el método de Newton para aproximar la solución de una ecuación no lineal de variable real.

Definición 2.1. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable para la cual se debe determinar el valor de la raíz $x^* \in \mathbb{R}$ tal que $f(x^*) = 0$. Dada una aproximación $x_0 \in \mathbb{R}$, la iteración

que define el método de Newton es

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad (2.1)$$

siempre que $f'(x_n) \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Entre las principales características del método de Newton, se tienen:

- El orden de convergencia es la velocidad con la cual una sucesión converge. Teniendo en cuenta esto, se puede verificar que el método de Newton tiene orden de convergencia dos o convergencia cuadrática. Así, al compararse con el método de bisección y el método de punto fijo, que son métodos numéricos también empleados para la aproximación de raíces, el error en el método de Newton disminuye más rápidamente con el paso de las iteraciones.
- El método de Newton puede ser obtenido de tres formas diferentes: desde su interpretación geométrica, a partir del estudio de aproximaciones sucesivas de la recta tangente; por expansiones de series de Taylor, hasta obtener un error de orden dos y por último, desde la iteración del punto fijo donde se mejora su orden de convergencia.
- Este método tiene teoremas que garantizan su convergencia local y global. La primera asegura la convergencia del método de Newton con una aproximación inicial x_0 “cercana” a la raíz que se desea aproximar, es decir en una vecindad de la raíz. Por otro lado, la convergencia global es menos restrictiva en cuanto a la elección del x_0 .
- El método de Newton puede emplearse para aproximar raíces complejas y soluciones de sistemas de ecuaciones no lineales.

No obstante el método de Newton presenta algunas desventajas, por ejemplo:

- Si $f'(x_n) = 0$ para algún $n \in \mathbb{N}$, el método no puede continuar iterando y es necesario realizar una modificación a este o aplicar otro método de aproximación. Un ejemplo donde se tiene esta dificultad sucede en la aproximación de raíces múltiples, como se explica en [10].
- Una dificultad similar a la anterior se tiene cuando $\lim_{n \rightarrow \infty} f'(x_n) = 0$, es decir si las pendientes son cercanas a cero. Pues es muy probable que (2.1) no converja a la raíz deseada, o se puede tener convergencia muy lenta según el valor inicial x_0 .
- Para algunas funciones, encontrar su derivada es un trabajo tedioso e incluso dependiendo del problema podría no tenerse información sobre su derivada. En estos casos es recomendable aplicar modificaciones del método de Newton donde se usen aproximaciones de derivadas, como es por ejemplo el método de la secante.
- Según la naturaleza de la función f , la convergencia del método de Newton puede ser muy lenta. Esto se tiene en [10] para la función oscilante $f(x) = e^{-x} - \sin(x)$ donde $f(x) = 0$ tiene infinitas soluciones. Luego la función de iteración del Método de Newton (2.1) se vuelve muy sensible a la elección de una aproximación inicial pudiendo converger a distintos límites y hacer que la convergencia del método sea lenta. Este también es el caso de algunos problemas de aplicación como los de *oscilación amortiguada de una estructura ante un movimiento oscilatorio* dados, por ejemplo, por la función $y(t) = 10e^{-\frac{t}{2}} \text{Cos}(2t)$ donde t es el tiempo de oscilación, ver [8].

Como se mencionó anteriormente la convergencia del método de Newton puede ser garantizada *localmente*, por lo tanto se debe elegir un x_0 que sea *suficientemente cercano* a la raíz x^* . Sin embargo, también hay teoremas que dan criterios para la convergencia global y algunos de estos teoremas se enuncian en [1, 5, 6, 10] y [11].

Por su importancia en este trabajo, en el siguiente teorema se da cuenta de la convergencia local del método de Newton.

Teorema 2.2. *Sea $f \in C^2[a, b]$. Si $x^* \in [a, b]$ es tal que $f(x^*) = 0$ y $f'(x^*) \neq 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que el método del Newton genera una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a x^* para cualquier aproximación inicial $x_0 \in [x^* - \delta, x^* + \delta]$.*

Como en la mayor parte de los problemas no se tiene información del tamaño de δ , para cumplir con el criterio de convergencia dado en el Teorema 2.2, se utilizan algunas estrategias para acotarlo como iterar pocas veces el método de bisección, analizar la gráfica de la función e incluso usar información que otros investigadores han presentado sobre la aplicación de interés. Otros teoremas de convergencia se pueden ver en [1] y [10].

Cuando en las aproximaciones obtenidas con el método de Newton los errores son pequeños, cada error es proporcional al cuadrado del error previo, lo cual ocasiona que la convergencia sea más rápida. Esta característica del método de Newton es la de ser cuadráticamente convergente, como se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 2.3. *Sea $f \in C^2[a, b]$ y $x^* \in [a, b]$ tal que $f(x^*) = 0$ y $f'(x^*) \neq 0$. Si x_0 es lo suficientemente cercana a x^* , la sucesión $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ generada por el método de Newton converge a x^* con un orden de convergencia de al menos 2.*

Con el fin de hacer comparaciones entre las aproximaciones obtenidas con el método de Newton y las raíces exactas de funciones, a continuación se presenta la aplicación de este método para aproximar la raíz real de la función $f(x) = x^3 - 1$, de la cual se conoce su valor exacto.

2.1.1. El método de Newton para aproximar raíces de $x^3 - 1 = 0$

La función de variable real

$$f(x) = x^3 - 1 \tag{2.2}$$

tiene tres raíces, una real y dos complejas, que pueden ser aproximadas a través del método de Newton.

La Figura 1 tiene la gráfica de la función (2.2) y se muestra el punto de corte de esta con el eje x (color azul). Evidentemente esta gráfica solo muestra sus raíces reales. Sin embargo el análisis de la factorización de la función de (2.2),

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1),$$

permite dar cuenta de sus otras dos raíces

- De $x - 1 = 0$ se concluye que $x = 1$ es una raíz real.
- Por otro lado, de $x^2 + x + 1 = 0$ se tienen las raíces complejas conjugadas $x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ y $x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Se aproxima la raíz real de (2.2) con el método de Newton. Primero se debe escoger una aproximación inicial, como ya se mencionó se suelen utilizar ciertas estrategias para que se cumpla el criterio de convergencia del Teorema 2.2. Así teniendo en cuenta la gráfica de la

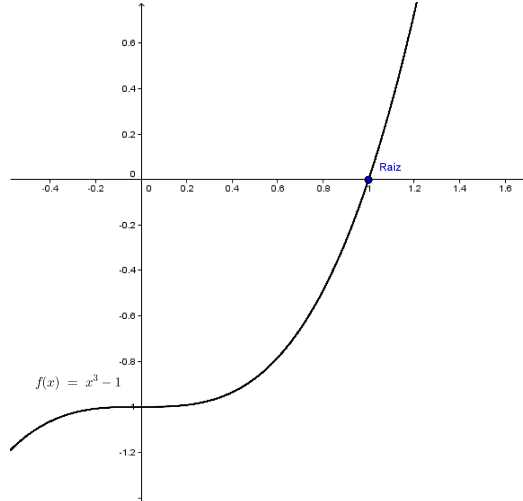


Figura 1: Gráfica de $f(x) = x^3 - 1$.

Figura 1 se escoge una aproximación inicial cercana de la raíz $x^* = 1$, como es $x_0 = 0.5$. Luego se define la función de iteración del Método de Newton para la función (2.2) la cual está dada por

$$N_f = x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 1}{3x_n^2} = \frac{2x_n^3 + 1}{3x_n^2} \quad (2.3)$$

Finalmente, se itera (2.3) con un máximo de 100 iteraciones, tolerancia de 10^{-11} y tomando el error relativo $e_n = \frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_{n+1}|}$ como criterio de parada (otros criterios de parada se pueden ver en [1]). En la Tabla 1 se presentan los resultados de las aproximaciones y el error relativo, donde la primera columna contiene el número de iteraciones, la segunda la aproximación que se va obteniendo en cada iteración y en la tercera su respectivo error relativo.

i	x_i	$Error(e_i)$
0	5×10^{-1}	7×10^{-1}
1	1.666667	3.537906×10^{-1}
2	1.231111	1.829979×10^{-1}
3	1.040671	3.904064×10^{-2}
4	1.001569	1.566215×10^{-3}
5	1.000002	2.503389×10^{-6}
6	1.000000	0.000000×10^0

Tabla 1: Iteraciones del método de Newton para $f(x) = x^3 - 1$.

En este caso $\delta = 0.5$, fue suficiente para garantizar la convergencia por el Teorema 2.2. Además iniciando con $x_0 = 0.5$ es posible verificar la convergencia de segundo orden del método de Newton para este problema como se aseguró en el Teorema 2.3. A partir de la tercera fila de la Tabla 1 se comprueba numéricamente que la aplicación de la iteración del método de Newton para la función (2.2) converge cuadráticamente, adicionalmente se observa que el error disminuye con el aumento de iteraciones como era esperado.

El teorema a seguir, tomado de [11], determina las condiciones para la convergencia cuadrática del método de Newton.

Teorema 2.4. Sea $f \in C^2[a, b]$ y $x^* \in [a, b]$ tal que $f(x^*) = 0$. Si $f'(x^*) \neq 0$, entonces el método de Newton es local y cuadráticamente convergente a x^* . Además, el error e_i en el paso i satisface que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{e_{i+1}}{e_i^2} = M, \quad (2.4)$$

donde $M = \frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$.

Como f en (2.2) es diferenciable y $f'(1) = 3 \neq 0$ el Teorema 2.4 garantiza la convergencia local y cuadrática para la iteración (2.3). En la segunda fila de la Tabla 2 se verifica con $M = 1$ que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{e_{i+1}}{e_i^2} = 1.$$

puesto que los resultados numéricos convergen a este valor con el aumento de las iteraciones.

i	0	1	2	3	4	5
$\frac{e_i}{e_{i-1}^2}$	—	0.722022	1.462021	1.165802	1.027585	1.020529

Tabla 2: Estudio del error para cada iteración del método de Newton aplicado a $f(x) = x^3 - 1$.

Igualmente al comparar el error y la razón que garantiza el orden de convergencia en las tablas 1 y 2 respectivamente, se observa que a medida que e_i tiende a M el número de cifras exactas se duplica como es característico de los métodos *cuadráticamente convergentes*.

Hasta aquí se ha mostrado como el método de Newton es eficiente para aproximar el valor de la raíz real de la función cúbica (2.2), pero este método también es útil para aproximar las raíces complejas no solo de (2.2), sino de cualquier función de variable compleja que sea derivable en \mathbb{C} y que cumpla con otras condiciones. Hay que resaltar que los números reales son números complejos con parte imaginaria igual a cero, entonces el estudio de las raíces de la función $f(z) = z^3 - 1$, de variable compleja z , incluye tanto las raíces reales como las complejas.

Se desarrolla en la siguiente sección el método de Newton para aproximar las raíces complejas de una función.

2.2. Método de Newton en \mathbb{C}

Dada una función diferenciable $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ y una aproximación inicial $z_0 \in \mathbb{C}$, para obtener la solución de $f(z) = 0$ la iteración del método de Newton es

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}, \quad (2.5)$$

donde $f'(z_n) \neq 0$ para $n \in \mathbb{N}$.

La función de iteración (2.5) es similar a (2.1), pero hay que tener en cuenta que las operaciones en este caso se realizan con números complejos es decir que las operaciones tendrán una componente real y una imaginaria. Además determinar que las funciones de variable compleja no son diferenciables en los complejos es más complicado que en el caso real.

La función de iteración (2.5) se puede considerar también, como una función racional compleja de la siguiente forma

$$N_{fz} = \frac{z_n f'(z_n) - f(z_n)}{f'(z_n)}. \quad (2.6)$$

El estudio de la dinámica relacionada a una función racional resultante de aplicar un método iterativo para aproximar las raíces de un polinomio complejo da paso al estudio del comportamiento de las órbitas de un número complejo y dichas órbitas deberían ser atraídas por las raíces del polinomio complejo, en este caso se conocen como *cuencas de atracción*. Lo interesante de este estudio es que no todas las órbitas son cuencas de atracción, como se puede ver en [4] y [10].

Como se afirma en ([9], pp 133) “Si aplicamos el método de Newton a una ecuación no lineal $f(z) = 0$, resulta que los ceros de f son puntos fijos de N_{fz} y recíprocamente”. Estos puntos fijos pueden ser superatractores, atractores, repulsores o indiferentes y el estudio de las cuencas de atracción de estos puntos permite dar cuenta del *comportamiento fractal* que caracteriza a este tipo de funciones. En la siguiente sección se presenta uno de los problemas más interesantes de la aplicación del método de Newton en el plano complejo, en este problema se estudian las zonas de convergencia de las raíces complejas de una función particular $f(z) = z^3 - 1$.

2.3. El problema de Cayley

En 1879 Arthur Cayley enunció el siguiente problema (del que se puede obtener más información en [10])

“¿Si se parte de un punto aleatorio del plano complejo, a qué raíz de la función $f(z) = z^3 - 1$ convergerá el método de Newton?”.

El problema de Cayley junto a trabajos desarrollados por Schröder abrieron el camino al estudio de las iteraciones del método de Newton para funciones complejas, como se indica en [4, 9] y [10].

Cayley estudiaba la convergencia del método de Newton para las funciones complejas cuadráticas $f(z) = az^2 + bz + c$. En particular, había mostrado que dado un punto inicial z_0 del plano complejo, las iteraciones obtenidas a través del método de Newton producían una sucesión $\{z_0, z_1, z_2, \dots\}$ que en caso de converger lo hacía a una de las dos raíces del polinomio cuadrático. Se estudia este caso.

Para el caso de polinomios complejos cuadráticos tomando como ejemplo a $f(z) = z^2 - 1$ con raíces 1 y -1 , se tiene que la iteración del método de Newton es

$$z_{n+1} = z_n - \frac{z_n^2 - 1}{2z_n} = \frac{z_n^2 + 1}{2z_n}, \quad (2.7)$$

siempre que $z_n \neq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Cayley demostró que la mediatriz correspondiente al segmento que une las dos raíces divide al plano en dos regiones, (cada región contiene una raíz), y que los puntos de cada región o semiplano son atraídos a la raíz que contenga. La Figura 2 ilustra el procedimiento de Cayley y en ella se han pintado del mismo color todos los puntos que a través del método de Newton convergen a una de las dos raíces 1 o -1 , (rojo para la raíz negativa y verde para la positiva).

Luego de estudiar el anterior problema, Cayley se propuso encontrar la solución para los polinomios de grado tres, iniciando su trabajo con $f(z) = z^3 - 1$. Cayley falló al intentar encontrar la solución de $f(z) = z^3 - 1$, porque el caso de los polinomios de grado 3 estaba muy lejos de ser trivial como el caso de los de grado 2. En la Figura 3 se ha graficado lo que Cayley había establecido en su momento, a cerca de las zonas de convergencia de las raíces de $f(z) = z^3 - 1$. En esta figura nuevamente se ha asignado a cada raíz un color distinto y

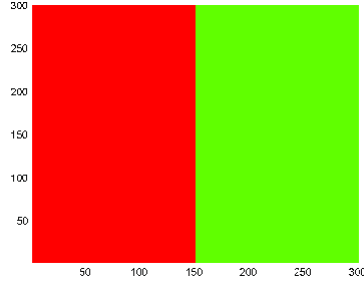


Figura 2: Cuencas de atracción del polinomio $f(z) = z^2 - 1$.

los puntos que convergen a cierta raíz a través del método de Newton se pintaron del mismo color. Así el color naranja se relaciona con los puntos que deberían converger a la raíz real, mientras que los colores amarillo y verde se asignaron a los puntos que convergen con cada una de las raíces complejas conjugadas, respectivamente.

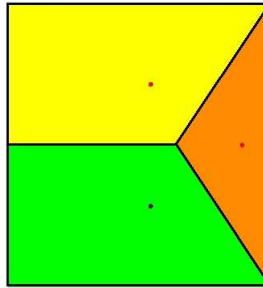


Figura 3: Tratamiento errado de Cayley para las cuencas de atracción del polinomio $f(z) = z^3 - 1$.

Con el fin de responder al problema de Cayley en la siguiente sección se estudia la aplicación del método de Newton a la función $f(z) = z^3 - 1$ y el comportamiento de las cuencas de atracción de sus raíces.

3. Resultados y Discusión

A continuación se pretende simular la solución del problema de Cayley, enunciado en la subsección 2.3. Donde en este caso la función de iteración del método de Newton para $f(z) = z^3 - 1$ está dada por

$$z_{n+1} = z_n - \frac{z_n^3 - 1}{3z_n^2}. \quad (3.1)$$

Además, se analiza si las iteraciones convergen a alguna de sus tres raíces. Se itera para obtener sus tres raíces:

- $z_1 = 1 + 0i = 1$.
- $z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \approx -0.5 + 0.866025i$.
- $z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \approx -0.5 - 0.866025i$.

Las tablas 3, 4 y 5 muestran las iteraciones del método de Newton con una tolerancia de 10^{-11} , un máximo de 100 iteraciones y sus respectivas aproximaciones iniciales.

i	$Re(z_i)$	$Im(z_i)$	$Error$
0	5.866667×10^{-1}	3.714463×10^{-1}	5.870872×10^{-1}
1	6.867859×10^{-1}	-3.772995×10^{-1}	7.554099×10^{-1}
2	7.490080×10^{-1}	2.066484×10^{-1}	5.872536×10^{-1}
3	9.733641×10^{-1}	-1.453482×10^{-1}	4.174174×10^{-1}
4	9.780484×10^{-1}	3.640819×10^{-3}	1.490626×10^{-1}
5	1.000482	-1.670545×10^{-4}	2.275433×10^{-2}
6	1.000000	-1.608537×10^{-7}	5.097755×10^{-4}
7	1.000000	$-6.569641 \times 10^{-14}$	2.599545×10^{-7}
8	1.000000	$-2.103629 \times 10^{-27}$	6.761368×10^{-14}

Tabla 3: Iteraciones para la aproximación inicial $z_0 = 0.88 + 0.88i$.

i	$Re(z_i)$	$Im(z_i)$	$Error$
0	3.333333×10^{-1}	-3.333333×10^{-1}	8.498366×10^{-1}
1	2.222222×10^{-1}	1.277778	1.614938
2	-3.838161×10^{-2}	7.849484×10^{-1}	5.574901×10^{-1}
3	-5.627218×10^{-1}	5.759533×10^{-1}	5.644569×10^{-1}
4	-3.870941×10^{-1}	8.979334×10^{-1}	3.667646×10^{-1}
5	-4.974191×10^{-1}	8.520995×10^{-1}	1.194670×10^{-1}
6	-4.999668×10^{-1}	8.662269×10^{-1}	1.435528×10^{-2}
7	-5.000000×10^{-1}	8.660254×10^{-1}	2.041874×10^{-4}
8	-5.000000×10^{-1}	8.660254×10^{-1}	4.169688×10^{-8}
9	-5.000000×10^{-1}	8.660254×10^{-1}	1.650465×10^{-15}

Tabla 4: Iteraciones para la aproximación inicial $z_0 = 0.5 + 0.5i$.

i	$Re(z_i)$	$Im(z_i)$	$Error$
0	3.333333×10^{-1}	3.333333×10^{-1}	8.498366×10^{-1}
1	2.222222×10^{-1}	-1.277778	1.614938
2	-3.838161×10^{-2}	-7.849484×10^{-1}	5.574901×10^{-1}
3	-5.627218×10^{-1}	-5.759533×10^{-1}	5.644569×10^{-1}
4	-3.870941×10^{-1}	-8.979334×10^{-1}	3.667646×10^{-1}
5	-4.974191×10^{-1}	-8.520995×10^{-1}	1.194670×10^{-1}
6	-4.999668×10^{-1}	-8.662269×10^{-1}	1.435528×10^{-2}
7	-5.000000×10^{-1}	-8.660254×10^{-1}	2.041874×10^{-4}
8	-5.000000×10^{-1}	-8.660254×10^{-1}	4.169688×10^{-8}
9	-5.000000×10^{-1}	-8.660254×10^{-1}	1.650465×10^{-15}

Tabla 5: Iteraciones para la aproximación inicial $z_0 = 0.5 - 0.5i$.

De los resultados mostrados en las anteriores tablas se puede decir que:

- Con la condición inicial, $z_0 = 0.88 + 0.88i$, se observa en la Tabla 3 que la aproximación obtenida fue $z = 1 - 2.103629 \times 10^{-27}i$, equivalente a la raíz $z_1 = 1$.
- Por otro lado, con la condición inicial $z_0 = 0.5 + 0.5i$ se observa en la Tabla 4 que la aproximación obtenida fue $z = -0.5 + 8.660254 \times 10^{-1}i$, de donde esta se relaciona con la raíz compleja $z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
- Finalmente, al observar la Tabla 5 que presenta las iteraciones partiendo de la condición inicial $z_0 = 0.5 - 0.5i$ se tiene que la aproximación obtenida fue $z = -0.5 - 0.8660254 \times$

$10^{-1}i$ que corresponde a la aproximación de la raíz $z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

En la columna 3 de la Tabla 3 se nota como en un total de 8 iteraciones el error descende rápidamente y desde la iteración 5, en la columna 1, las cifras decimales exactas se duplican con cada nueva iteración. Similarmente sucede en las tablas 4 y 5. Además, se observa al comparar los resultados de las tablas 4 y 5 que si se usan como aproximaciones iniciales a $z_0 = 0.5 - 0.5i$ y su conjugada $z_0 = 0.5 + 0.5i$, respectivamente, el método de Newton converge a las raíz compleja $z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ y su conjugada $z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Incluso al usarse una aproximación inicial real, se tiene que el método de Newton converge a una raíz real. Esta última observación no es necesariamente válida con aproximaciones complejas como se observa en la Tabla 6.

i	$Re(z_i)$	$Im(z_i)$	$Error$
0	2.026667	6.466667×10^{-1}	1.035482
1	1.411155	3.884504×10^{-1}	6.674807×10^{-1}
2	1.074449	1.793367×10^{-1}	3.963572×10^{-1}
3	9.819858×10^{-1}	2.832462×10^{-2}	1.770711×10^{-1}
4	9.994709×10^{-1}	-1.025254×10^{-3}	3.416350×10^{-2}
5	9.999992×10^{-1}	1.084658×10^{-6}	1.154345×10^{-3}
6	1.000000	$-1.677344 \times 10^{-12}$	1.332045×10^{-6}
7	1.000000	1.941397×10^{-24}	1.774350×10^{-12}

Tabla 6: Aproximación con el método de Newton de la raíz $z_1 = 1$ a partir de $z_0 = 3 + i$.

Donde se tomó como condición inicial a $z_0 = 3 + i$ y se obtuvo la aproximación $z = 1.000000 + 1.941397 \times 10^{-24}i$ de la raíz $z_1 = 1$ en un total de 8 iteraciones para una tolerancia de 10^{-11} .

El estudio del problema de Cayley es equivalente al estudio del comportamiento de las zonas de convergencia o cuencas de atracción de las raíces de la función $f(z) = z^3 - 1$. La siguiente subsección da cuenta de esto.

3.1. Zona de convergencia para la raíz real de $f(z) = z^3 - 1$

La raíz $z = 1$ es la única raíz real de la función $f(z) = z^3 - 1$, equivalentemente el punto $x = 1$ es una raíz de $f(x) = x^3 - 1$ y es un punto fijo de N_f en (2.3). Para comprobar que $x = 1$ es un punto fijo de N_f basta con reemplazar el valor de x en la función y notar que $N_f(1) = 1$. Sin embargo, $x = 1$ es un punto fijo atractor de N_f y su comportamiento atractor se puede observar en la Figura 4.

La Figura 4 es la gráfica de la diagonal $y = x$ y la función N_f , se considera un punto inicial (x_0, y_0) y partir de este se traza una paralela al eje x que corta a la diagonal en un punto A . Luego por el punto A se traza una paralela al eje y que corta al gráfico de N_f en un punto (x_1, y_1) y se repite el proceso las veces que se considere necesario. Lo que se puede observar es una gráfica en forma de escalera que converge al punto $(1, 0)$. La siguiente definición, que se enuncia en [10], es la de punto fijo atractor.

Definición 3.1. Sea p un punto fijo de f . Decimos que p es un atractor si existe un intervalo abierto J que contenga a p tal que para cada $x \in J$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = p,$$

donde $f^n(x)$ es la potencia n -ésima de la función $f(x)$.

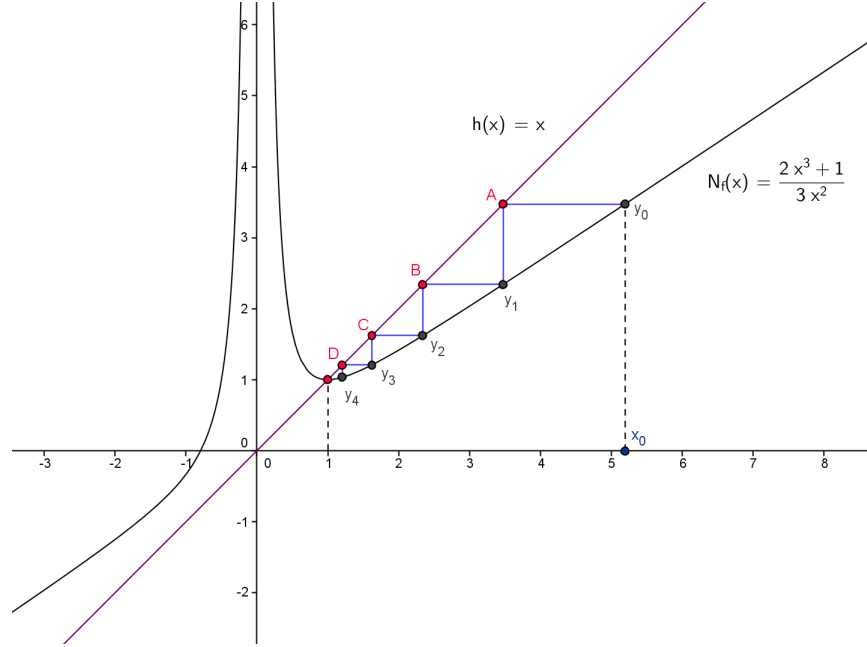


Figura 4: Comportamiento atractor de la raíz real $x = 1$.

Consideremos el intervalo $J = (1 - \delta, 1 + \delta)$ para un $\delta > 0$ lo suficientemente pequeño, tal que $x = 1 \in J$ de aquí como $x \in J$ se tiene que $f(x) \rightarrow 1$, así

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} N_f^n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^3 + 1}{3x^2} \right)^n = 1. \quad (3.2)$$

De este modo $x = 1$ es un punto fijo atractor de N_f .

3.2. Zona de convergencia para las raíces complejas de $f(z) = z^3 - 1$

La función racional compleja obtenida al iterar el método de Newton para encontrar las raíces de $f(z)$ es

$$N_{fz} = \frac{2z^3 + 1}{3z^2}. \quad (3.3)$$

Para gráficar el comportamiento de las cuencas de atracción de $f(z)$ se considera un subdominio del plano complejo y cada punto de este se itera en el método de Newton, como aproximación inicial, para averiguar a que raíz de $f(z)$ converge. Luego se asigna a cada raíz un color y los puntos que convergen a cierta raíz se pintan del mismo color. Así cada zona con color característico se considera una zona de convergencia de la raíz que contiene.

En la Figura 5 se muestra el comportamiento de las zonas de convergencia de las tres raíces de $f(z)$. Se observan tres zonas de convergencia con tres colores azul, rojo y vino tinto pero, además, la zona de la frontera presenta un comportamiento caótico que es característico del conocido como *caos matemático* y produce el maravilloso efecto visual de una flor. Las figuras 2, 5 y 6 se realizaron usando MATLAB.

Como se menciona en [4] y [10], una función analítica o de iteración puede descomponer al plano en dos regiones disyuntas la primera se conoce como el *conjunto de Fatou* que es la zona con comportamiento estable y su frontera se conoce como el *conjunto de Julia* cuyo

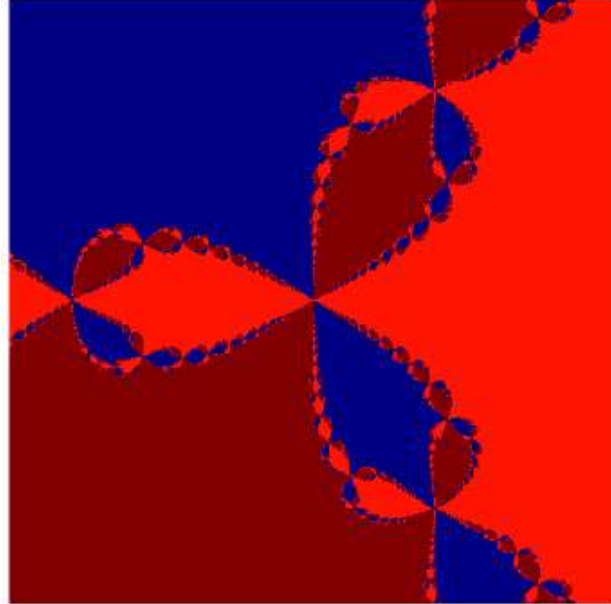


Figura 5: Fractal asociado a $f(z) = z^3 - 1$.

comportamiento es caótico, dándole la característica de las figuras fractales como las que se observan en las figuras 5 y 6.

En la Figura 6 se muestra una extensión del problema de Cayley. Para generar esta figura se iteró cada punto de un subdominio del plano complejo, como aproximación inicial, en la iteración del método de Newton para $f(z) = z^4 - 1$ y se obtuvo cuatro zonas de convergencia con sus respectivas fronteras.

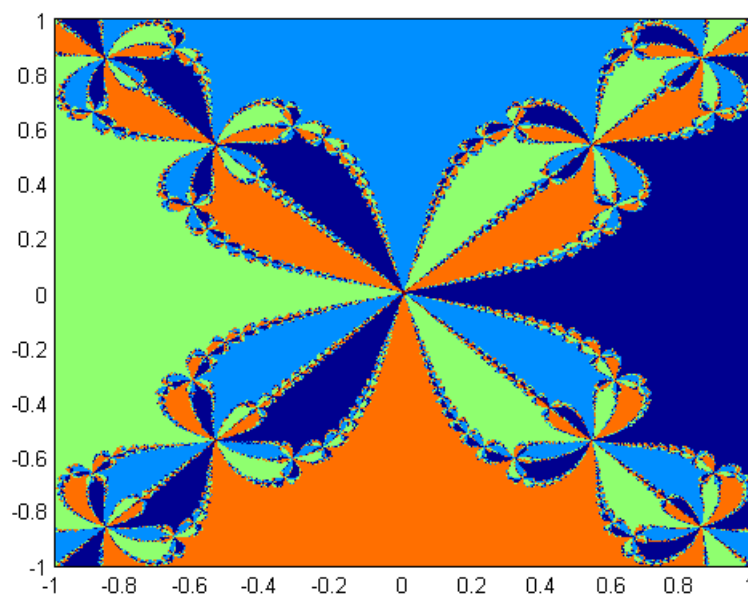


Figura 6: Fractal asociado a $f(z) = z^4 - 1$.

4. Conclusiones

- El método de Newton es una excelente opción para aproximar soluciones tanto de funciones de variable real como compleja. Además, converge rápidamente entre 7 y 8 iteraciones para una tolerancia de 10^{-11} indicando una buena precisión computacional.
- En los resultados numéricos obtenidos, se da cuenta de la convergencia cuadrática del método de Newton, la aplicación de este método al problema de Cayley cumple con los teoremas de convergencia satisfactoriamente.
- Iterar el método de Newton para aproximar soluciones conjugadas de una función de variable compleja se hace satisfactoriamente desde aproximaciones conjugadas, como se pudo observar en la Tabla 5, y también iterando desde alguna aproximación inicial compleja, como se ve en la Tabla 6.
- El análisis del carácter atractor o zona de convergencia de una raíz real de alguna función de variable compleja permite notar que hay al menos una vecindad centrada en ella que es una cuenca de atracción (Figura 4). Similarmente se puede hacer con las raíces complejas, en este caso las raíces de la función son puntos fijos de la iteración y el análisis recae sobre la característica de estos puntos de ser atractores o repulsores (Figura 5). El estudio de las zonas de convergencia para las raíces complejas se puede ampliar con los trabajos de Julia y Fatou que se pueden ver en [4].

Agradecimientos

Este trabajo hace parte de los objetivos del proyecto de investigación estudiantil **Generalización del método de Newton**, asesorado por la Dra. Catalina María Rúa Álvarez dentro del marco del grupo de investigación GESCAS, y financiado por la Vicerrectoría de Investigaciones, Postgrados y Relaciones Internacionales de la Universidad de Nariño.

Referencias

- [1] Burden R. and Faires J. (2002). *Análisis Numérico: Séptima Edición*, Thomson Learning. 2, 4, 5
- [2] Chapra S. and Canale R. (2006). *Métodos Numéricos para Ingenieros: Quinta Edición*, McGraw-Hill/Interamericana Editores. 2
- [3] Chicharro F. (2017). *Análisis Dinámico y Aplicaciones de Métodos Iterativos de Resolución de Ecuaciones no Lineales* (tesis doctoral). Universitat Politècnica de Valencia, Valencia, España. 2
- [4] Falconer K. (1990). *Fractal Geometry: mathematical foundations and applications*, John Wiley & Sons. 7, 11, 13
- [5] Gutiérrez J., Olmos M. and Casillas J. (2010). *Análisis Numérico*, McGraw-Hill/Interamericana Editores. 2, 4
- [6] Mora W. (2010). *Introducción a los métodos numéricos. Implementaciones en Basic-Calc de Libre Office y WxMaxima: Primera Edición*. Recuperado de https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/Libros/WMora_MetodosNumericos/WMora-ITCR-MetodosNumericos.pdf 2, 4
- [7] Pita C. (1995). *Cálculo Vectorial: Primera edición*. Universidad Panamericana Escuela de Ingeniería, Prentice Hall. 2

- [8] Pasada M. (2008 - 2009). *Apuntes del curso Ingeniería Informática: Cálculo Numérico*. Recuperado de: http://www.ugr.es/~mpasadas/ftp/Tema2_apuntes.pdf [3](#)
- [9] Rubiano G. (2007). *Método de Newton, MATHEMATICA y fractales: historia de un página*. Recuperado de <https://revistas.unal.edu.co/index.php/bolma/article/view/40459/42303> [7](#)
- [10] Salinas S. and Gutierrez J. (2013). *Dinámica del método de Newton*. Universidad de la Rioja, servicio de publicaciones. [2](#), [3](#), [4](#), [7](#), [10](#), [11](#)
- [11] Sauer T. (2013). *Análisis numérico: Segunda edición*. Pearson Educación. [2](#), [4](#), [5](#)

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
UNIVERSIDAD DE NARIÑO
e-mail: juneth0102@hotmail.com
e-mail: catalina.rua@udenar.edu.co