

REVISTA SIGMA

Departamento de Matemáticas y Estadística

Universidad de Nariño

Volumen X N° 13 (2017), páginas 33–41

Propuesta de enseñanza para la construcción de la fórmula de volumen prisma rectangular recto ¹

Alejandro García²
Gustavo Adolfo Marmolejo³

Abstract.

The teaching of the measure privileges the premature use of formulas whose inclusion makes no sense and meaning for students. In consequence, the reflection on processes of construction of formulas that emphasize in the link between the reached algorithm and the aforementioned concept are issues to consider. In this sense, the article exposes a teaching proposal that elicits the construction of the formula to calculate the volume of a straight rectangular prism. For the design of the teaching proposal we consider the visual perspective of [3, 4, 5]. In particular, different types of visual operations, dimensional changes and control variables were assumed as design variables. The visualization links the magnitude volume with the qualitative characteristics that, in a solid determine his study. Finally, the article sets out guidelines for the implementation of the proposal.

Keywords. Volume, Straight rectangular prism, Visualization, Control.

Resumen.

La enseñanza de la medida privilegia el uso prematuro de fórmulas cuya inclusión carece de sentido y significado para los estudiantes. Por tanto, la reflexión sobre procesos de construcción de fórmulas que enfatizan en el vínculo entre el algoritmo alcanzado y el concepto aludido, deben ser cuestiones a considerar. En este sentido, el artículo, expone una propuesta de enseñanza que suscita la construcción de la fórmula para calcular el volumen de un prisma rectangular recto. Para su diseño se consideró la perspectiva visual de [3, 4, 5], en particular, como variables de diseño, se asumieron diferentes tipos operaciones visuales, cambios dimensionales y variables de control. La visualización vincula la magnitud volumen a las características cualitativas que, en un sólido determinan su estudio. Finalmente, se exponen pautas para la aplicación de la propuesta.

Palabras Clave. Volumen, Prisma rectangular recto, Visualización, Control.

¹La propuesta de enseñanza expuesta en este artículo fue diseñada en el marco de la investigación *La visualización en el estudio de la fórmula del volumen del prisma rectangular recto. Un estudio de casos*. Trabajo realizado por el primero de los autores para optar al grado de Maestría en Educación, Énfasis Educación Matemática en la Universidad del Valle (Colombia), el segundo autor, por su parte, fungió como asesor. La investigación reseñada hace parte de un grupo de trabajos que consideran que el estudio de las matemáticas es un campo idóneo para suscitar el desarrollo de actividades cognitivas, entre otras, la visualización, el razonamiento y la construcción.

²Corresponding author: Profesor Institución Educativa Ateneo (Colombia). e-mail: alejogarcia1970@hotmail.com

³Corresponding author: Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad de Nariño. E-mail: usalgamav@gmail.com

1. Introducción

La Geometría promueve la relación con el entorno [1] y el desarrollo de la comunicación [8], el razonamiento, la visualización y la construcción [2]. Esta disciplina considera el estudio de los cuerpos sólidos y su volumen [15], al respecto, son aspectos que generan complejidad en su estudio tanto la medición y conservación de volúmenes [7] como el establecimiento de relaciones (o diferencias) entre esta magnitud y otras de naturaleza distinta [16, 7]. Lo anterior, se explica, por prácticas de enseñanza que, privilegian la exposición y aplicación de fórmulas, sin mediar la construcción del volumen desde una perspectiva cualitativa [9]. Entonces, el diseño, aplicación y evaluación de propuestas de enseñanza que susciten el estudio del volumen desde una perspectiva cualitativa, ha de ser un aspecto a considerar [9]. Donde sean objetos de atención, la discriminación de partes de figuras tridimensionales, el establecimiento de relaciones y la ejecución de acciones sobre ellas (visualización). En este sentido, el objetivo del artículo es exponer una propuesta de enseñanza que, induzca la reflexión de esta magnitud desde una perspectiva visual. La atención recae en el volumen del prisma recto, particularmente consideramos la construcción de la fórmula para el cálculo de su medida. Su aplicación propende, al cálculo de “volúmenes a través de composición y descomposición de figuras y cuerpos” [15, p. 85] y al establecimiento y utilización de “diferentes procedimientos de cálculo para hallar medidas de volúmenes” [10, p. 35].

2. Referentes conceptuales que guiaron el diseño

La visualización permite ilustrar proposiciones, relaciones e ideas matemáticas, suscitar preguntas que guíen el desarrollo de una actividad, ayudar a discernir las formas de proceder en una tarea e inspirar bosquejos estrategias globales [13]. Esta actividad cognitiva es susceptible de aprendizaje [3, 14] y depende del tipo de registro semiótico considerado [4], para nuestro caso, las figuras geométricas tridimensionales. En este sentido, son cuestiones de interés la caracterización de objetos matemáticos [3] que susciten el desarrollo de la visualización. La construcción de la fórmula para calcular la medida del volumen de un prisma rectangular recto, es un ejemplo de objeto matemático que, suscita lo anterior.

Para el diseño a explicitar se adaptó, lo propuesto por Duval [3, 4, 5] en cuanto al funcionamiento cognitivo de las figuras en el estudio de las matemáticas. En particular, se contempló aspectos relacionados con el desarrollo de la aprehensión operatoria y la deconstrucción dimensional de formas. La primera alude a la transformación heurística de las figuras, la segunda, “consiste en descomponer la figura en unidades figurales de dimensión inferior a la figura de partida” [4, p. 20]. En este sentido adaptando lo propuesto por [13] para figuras 2D, el diseño contempló tanto la inclusión de operaciones visuales (Cuadro 1) como de cambios dimensionales de distinta naturaleza (Cuadro 2). Mientras que las primeras aluden a las “acciones que se aplican sobre la figura en estudio y que producen sobre ella transformaciones figurales” [14, p. 17], los segundos, al paso de focalizar la atención de la superficie de una figura a hacerlo en alguna de sus unidades 1D constituyentes [3].

Para promover la inclusión de las operaciones y cambio dimensionales reseñados, se contemplaron variables de control visual (en palabras de Marmolejo y González, [11], estructuras o elementos de control visual), o sea “todo conjunto de elementos y estrategias a las que se recurre, explícitamente o implícitamente, para expresar los caminos visuales a privilegiar en el desarrollo y comprensión de las tareas propuestas” (pág. 310). Puntualmente, se privilegió, las variables de control visual que aluden a la visibilidad, es decir, a la “introducción de ciertos elementos en la figura o la consideración de algunas de sus características, privilegian

Operación
<i>Reconfiguración:</i> “Hay una única figura de inicio y se requiere generar n copias de ella, colocarlas unas al lado de otras sin superposición mediante la aplicación de traslaciones o rotaciones o reflexiones” [13, p. 74]
<i>Configuración:</i> “Alude al ensamblaje de un conjunto de figuras independientes entre sí para representar una nueva, compuesta por la unión de las figuras dadas” [13, p. 74].
<i>Superposición directa:</i> “cuando se toma una unidad patrón y se superpone sobre otra para dar forma a otra” [13, p. 78].
<i>Fraccionamiento Parcial Simple:</i> Cuando en una figura se señala por partes la unidad patrón por la que está constituida [13, p. 80].
<i>Fraccionamiento Parcial:</i> Cuando en una figura se muestra solo una parte de las unidades en las que está compuesta [13, p. 80].

Cuadro 1: . Operaciones visuales incluidas en el diseño

Cambio dimensional
<i>Fijo:</i> paso de centrar la atención en partes tridimensionales de un sólido a hacerlo en algunas de sus partes bidimensionales, unidimensionales o cero dimensionales, las cuales son reconocidas como elementos estáticos y no separables de la figura.)
<i>Desdoblamiento:</i> cuando en un sólido, una o más de sus partes (bidimensionales, unidimensionales o cero dimensionales), las cuales constituyen simultáneamente al menos dos de sus sub-configuraciones tridimensionales, son discriminadas como elementos independientes entre sí.

Cuadro 2: . Cambios dimensionales a suscitar en la resolución de las tareas

u obstaculizan unas formas de ver en detrimento de otras” (pág. 316). La visibilidad aparece de tres maneras, a saber: Factores de visibilidad, quienes “destacan el atributo de forma en una configuración y suscitan la aplicación de operaciones particulares” (pág. 316); Contraste, “estímulos que destacan atributos de color y textura en la configuración de partida” (pág. 317); e índices “corresponden a letras, segmentos continuos, puntos sobredimensionados, flechas curvas y rectas, trazos, nombres de las unidades a las que se alude, valor de la medida de unidad y espacios en blanco” (pág. 318). En los cuadros 3 y 4 se tipifican las variables de control visual incluidas en la propuesta de enseñanza en estudio y se articulan a la operaciones visuales y cambios dimensionales que suscitan.

3. La propuesta

Estructurada para desarrollarse en cinco momentos, en todos se calcula la medida del volumen de un sólido: los cuatro primeros momentos mediante la inclusión de unidades de medida y el último a través de un algoritmo. En el primer momento, el sólido es arbitrario y la unidad de medida un cubo isométrico a los cubos en que está fraccionado el sólido a medir (M1.1 y M1.2). En el segundo momento, se considera un prisma recto y la unidad es un prisma constituido por un número determinado de cubos (M2.1 y M2.2). A continuación, el sólido a medir continúa siendo un prisma recto pero las unidades de medida son de forma prismática (M3.1). En el cuarto momento, la unidad no está definida, es el estudiante quien debe considerarla (M4.1). En el momento cinco, se incluye la fórmula construida en el proceso realizado para resolver la problemática expuesta (M5.1, M5.2, M5.3, M5.4 y M5.5).

Variables de control visual	Operación/cambio dimensional
<p>Proyección: - Perspectiva caballera: “representa nuestra visión real de los cubos, en la que las aristas más distantes se ven más pequeñas y las líneas paralelas que se alejan se ven convergentes” [9, p. 196].</p> <p>- Paralela o dimétrica: “análoga a la perspectiva excepto en que las líneas paralelas se representan siempre como paralelas, independientemente de su dirección” (p. 196).</p> <p>- Isométrica: “caso particular de la Proyección paralela, donde los cubos se sitúan de forma que las tres aristas que salen de determinado vértice se dibujan con la misma longitud y forman ángulos de 120 grados ”(p. 196).</p>	<p>Facilita la discriminación de las operaciones de refraccionamiento y el desdoblamiento. Obstaculiza el fraccionamiento parcial simple y el cambio dimensional Fijo.</p>
<p>Fraccionamiento -Lineal: es cuando en una figura se presenta unidades figurales 1D con líneas punteadas que conforman un patrón de medida 3D.</p> <p>- Numérico: se presenta en una figura, cuando se muestran las medidas de las longitudes de las unidades figurales 1D, que conforman el cuerpo sólido.</p> <p>- Parcial: se presenta en la figura cuando se muestra la medida de solo una parte de las unidades figurales 1D que compone una unidad de medida 3D.</p>	<p>Induce la discriminación del Fraccionamiento parcial y el cambio dimensional operatorio. Obstaculiza la superposición directa y el desdoblamiento.</p>
<p>Número de unidades Alude a la cantidad de unidades de medida que deben considerarse al calcular la medida del volumen de un sólido geométrico.</p>	<p>Promueve el refraccionamiento y el desdoblamiento.</p>
<p>Ubicación del fraccionamiento introducido es la posición en que se encuentra un fraccionamiento de unidades figurales 3D que componen un cuerpo sólido geométrico</p>	<p>Suscita la superposición directa y el fraccionamiento parcial simple. Obstaculiza la anamorfosis y el desdoblamiento.</p>

Cuadro 3: Variables de control visual incluidas en el diseño y operaciones o cambios dimensionales que afectan

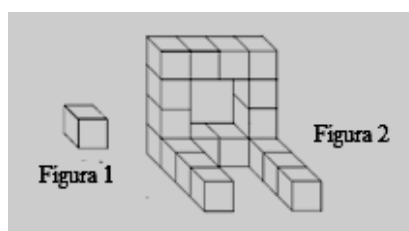
Mientras que en el primero de los momentos se considera la operación de configuración por reiteración, el cambio dimensional fijo y las proyecciones en perspectivas junto al fraccionamiento simple; en el segundo, lo es la superposición directa, la configuración por reiteración y el cambio dimensional fijo; en este caso las variables de control son las perspectivas, el contraste en tono y grosor, y el fraccionamiento parcial simple. El tercer momento, por su parte, contempla la configuración por reiteración, la superposición directa y el refraccionamiento, operaciones direccionadas por las variables de control contraste en tono y grosor, líneas punteadas que indican fraccionamientos parciales, perspectivas, posición del fraccionamiento y el número de unidades. En cuanto al cuarto momento, no se aplican operaciones visuales, pues, se solicita proponer un procedimiento que permita calcular el volumen de un ortoedro. Para terminar, en el último de los momentos, la operación de anamorfosis es la única a considerar y se incluyen como variables de control la perspectiva, el fraccionamiento numérico e índices.

Variables de control visual	Operación/cambio dimensional
Indices	
“alude a la introducción de elementos suplementarios que resaltan unidades a considerar o que guían la manera de ver” [11, p. 318].	Coadyuva a la discriminación del fraccionamiento parcial y el desdoblamiento.
Contraste	
En tono y grosor “entre las unidades de dimensión 1 que conforman el contorno de la figura en estudio” [11, p. 317] Líneas punteadas de fraccionamiento: son unidades de dimensión 1 que conforman unidades 3D en una figura de un cuerpo sólido. Líneas de referencia de cota: son líneas rectas que delimitan una unidad también de dimensión 1, es decir la distancia entre dos puntos que conforman una arista de la figura del cuerpo sólido. Líneas de dimensión o de cota: son líneas rectas que establecen la medida de una unidad de dimensión 1 que conforman el contorno de la figura del cuerpo sólido	Facilita la identificación de las operaciones de Anamorfosis y el cambio dimensional operatorio, e interfiere negativamente en la de superposición directa.

Cuadro 4: Variables de control visual incluidas en el diseño y operaciones o cambios dimensionales que afectan

3.1. Momento 1

M1.1. En la Figura 1 se representa un cubo, cuántos se necesitaron para construir la figura 2?

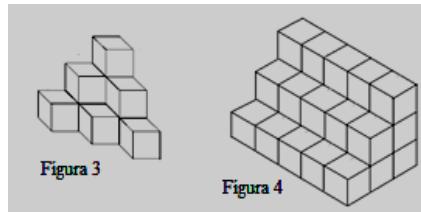


Describe, paso a paso, el proceso utilizado para responder la pregunta, si es el caso, realiza dibujos para expresarte mejor.

M1.2. Definición 1: El volumen de un sólido geométrico es la cantidad de espacio que ocupa. Para calcular su medida se utilizan unidades cúbicas de medida. En la tarea 1.1, se utilizó como unidad de medida el cubo de la Figura 1.

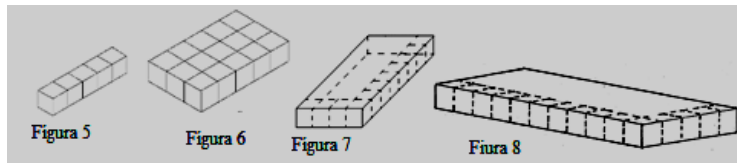
Si consideras la Figura 1 como unidad de medida, cuál es la medida del volumen de las figuras 3 y 4?

Describe, paso a paso, los procesos utilizados para responder la pregunta, si es el caso, realiza dibujos para expresarte mejor.



3.2. Momento 2

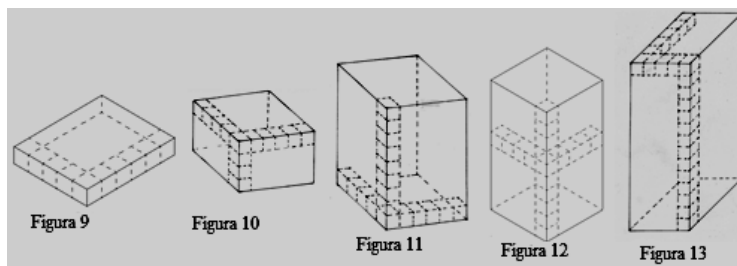
M2.1. La Figura 5 representa un prisma, cuántos necesitas para construir las Figuras 6, 7 y 8 explica, paso a paso, tu procedimiento, si es necesario realiza dibujos.



M2.2. Si tomamos como unidad de medida uno de los cubos que conforman la Figura 5, ¿cuál es el volumen de las figuras 6, 7 y 8?. Utiliza dos procedimientos diferentes para resolver esta tarea, explica, paso a paso, cada uno, si es necesario, utiliza dibujos.

3.3. Momento 3

M3.1. Tarea 3.1 La figura 9 representa un prisma, cuántos necesitas para construir las figuras 10, 11, 12 y 13? Explica paso a paso tu procedimiento, si es necesario realiza dibujos.



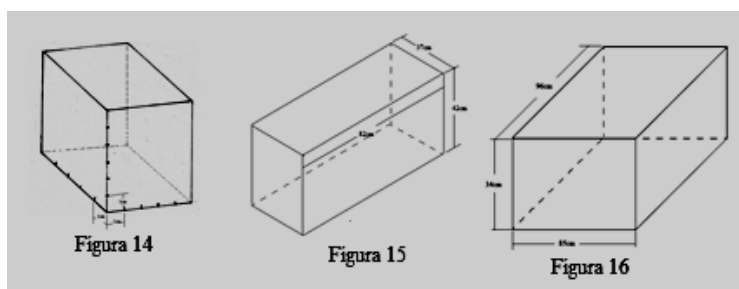
3.4. Momento 4

M4.1. Considerando todo lo anterior, describe tres procedimientos distintos, que te permitan calcular el volumen de cualquier ortoedro. ¿Cuál te permite calcular el volumen de la manera mas rápida?. Explica tu respuesta.

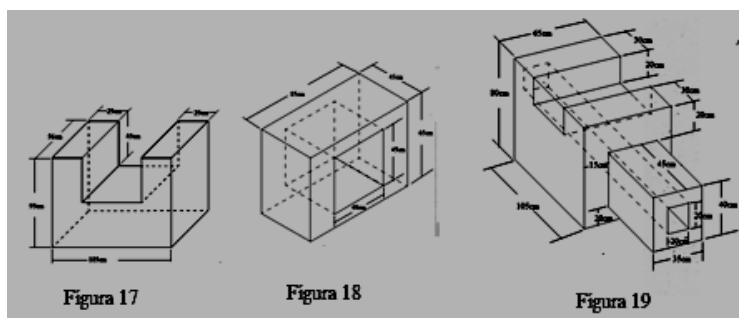
3.5. Momento 5

M5.1. Definición 2: Centímetro cúbico, es una unidad para medir volumen y corresponde a un patrón representado por un cuerpo que ocupa un espacio euivalente a un cubo de 1cm de arista, y se escribe de esta manera cm^3 .

Tomando como unidad de medida un cm^3 , calcula el volumen de los siguientes prismas. Explica paso a paso tu procedimiento, si es necesario realiza dibujos.



M5.2. Calcula el volumen de las Figuras 17, 18 y 19 ,escribe la respuesta en cm^3 . Explica paso a paso tu procedimiento, si es necesario realiza dibujos.



M5.3. Tomando como unidad de medida un cubo con arista de 1cm de arista ($1cm^3$), representa 3 prismas distintos, cada uno con un volumen de 300. Explica el proceso, paso a paso, que realizaste en cada caso, si es necesario realiza dibujos.

M5.4. Representa un prisma recto y transformalo en un paralelepipedo con igual volumen. Teniendo en cuenta el proceso anterior, escribe de forma detallada un método que te permita calcular el volumen de cualquier paralelepipedo.

4. Cuestiones a considerar

“La importancia de construir una fórmula matemática es que el alumno difícilmente la olvida o si no la recuerda, puede utilizar el procedimiento para reconstruirla” [6]. Para el caso de la fórmula que permite calcular la medida del volumen de un prisma recto, la visualización aporta adicionalmente sentido y significado al proceso de construcción de la fórmula, pues, incluye la magnitud volumen como un objeto “manipulable” y promueve la discriminación de diferentes formas de proceder, en consecuencia, la explicitación de variados puntos de vista, lo que conlleva a la discusión y negociación de conocimiento. Todo lo anterior beneficia el desarrollo de la autonomía, la concientización de procesos realizados y la elicitación de conclusiones. De esta manera, la inclusión en el aula de propuestas de enseñanza como la aquí expuesta aporta elementos para que el estudio del volumen deje ser una cuestión

estrictamente numérica (que privilegie como recurso único y fundamental el conteo uno a uno de unidades de medida o la aplicación de fórmulas), particularidad que explica muchas de las dificultades encontradas por los estudiantes al reflexionar sobre la magnitud y sus medidas (ver [12]).

Finalmente es necesario llamar la atención al hecho que los educadores debemos reflexionar sobre la inclusión de referentes teóricos (validados en Educación matemática) en el diseño, aplicación y evaluación de propuestas de enseñanza, lo cual posibilitará a los profesores tanto formas distintas de asumir y promover el vínculo enseñanza- aprendizaje de las matemáticas, como de comprender, adaptar y aplicar las sugerencias curriculares realizadas por el MEN. Pero, para que lo anterior sea posible, es necesario que los programas de cualificación y formación docente consideren como objeto de reflexión (funcional y experimentalmente), variados referentes conceptuales que, de una forma u otra, aportan elementos para comprender fenómenos particulares que subyacen al estudio de las matemáticas, en este sentido, referentes como el de la visualización [3, 4, 5, 14, 13, 11, 12] desempeñan un papel preponderante.

Referencias

- [1] Barrantes, L. M., Balletbo, F. I., y Fernández, L. M. (2014). Enseñar Geometría en Secundaria. *Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, innovación y Educación*, pp. 1-14. [34](#)
- [2] Duval, R.(1998), “Geometry from a cognitive point of view”, en C. Mammana y V. Villani (eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp. 37-51. [34](#)
- [3] Duval, R. (1999), *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*, trad. de Myriam Vega Restrepo, Artes Gráficas Univalle, Cali. [33](#), [34](#), [40](#)
- [4] Duval, R. (2003), “Voir en mathématiques”, en E. Filloy (ed.), *Matemática educativa. Aspectos de la investigación actual*, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN, México, pp. 41-76. [33](#), [34](#), [40](#)
- [5] Duval, R. (2004), *Cómo hacer que los alumnos entren en las representaciones geométricas. Cuatro entradas y... una quinta*, trad. de María del Carmen Chamorro, Instituto Superior de Formación del Profesorado, Ministerio de Educación y Ciencia, Madrid (Colección Aulas de Verano). [33](#), [34](#), [40](#)
- [6] Estrada, W. (2002). De la generación espontánea de las fórmulas de volumen a su construcción. En C. J. Luque, *Memorias XIII Encuentro de Geometría y I encuentro de Aritmética*, pp. 167-181. Bogotá, Colombia. [39](#)
- [7] Fernández, E., y Marmolejo, G.A. (2013). Volumen y capacidad en grado quinto de primaria. Desarrollo de procesos aditivos y multiplicativos en mediciones directas e indirectas. *Revista científica, Educación científica y Tecnológica*, 601-605. [34](#)
- [8] García, M., y Guillén, G. (2010). Aplicación de un modelo elaborado para categorizar la geometría de los sólidos en la ESO a libros de texto de tres editoriales. *Investigación en Educación Matemática*, XIV, 327-340. [34](#)
- [9] Gutiérrez, Á. (1998). Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial. *Revista Ema*, 3(3), 193-220. [34](#), [36](#)
- [10] ICFES. (2011). *Lineamientos para la aplicación muestral*. Bogotá: ISBN de la versión impresa: 978-958-11-0572-4. [34](#)
- [11] Marmolejo, G. A. y González M. T. (2015). Control Visual en la construcción del área de superficies planas en los textos escolares. Una metodología de análisis. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 18(3), 301-328. [34](#), [37](#), [40](#)

- [12] Marmolejo, G. A. y González, M.T. (2015). El área de superficies planas en el campo de la educación matemática. Estado de la cuestión. *REIEC*, 10(1), 45-57 [40](#)
- [13] Marmolejo, G. A. y González, M. T. (2013). Visualización en el área de regiones poligonales. Una metodología de análisis de textos escolares. *Educación Matemática*, 61-102. [34](#), [35](#), [40](#)
- [14] Marmolejo, G.A. y Vega, M. (2012). La visualización en las figuras geométricas. Importancia y complejidad de su aprendizaje. *Educación Matemática*, 7-32. [34](#), [40](#)
- [15] MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencia en Lenguaje, Matemáticas Ciencias y Ciudadanas*. Santafé de Bogotá: MInisterio de Educación Nacional. [34](#)
- [16] Sainz, L. O. (2014). *La visualización en geometría: un estudio en 3^o ESO*. Facultad de Educación, Universidad de Cantabria. [34](#)

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
UNIVERSIDAD DE NARIÑO

e-mail: alejogarcia1970@hotmail.com

e-mail: usalgamav@gmail.com