REVISTA DE CIENCIAS, Vol. 4 , No.1 de 2014.

Cálculo fraccional

Fraccional calculus

Victor Giraldo Buesaquillo Gómez [a] ⋆ , Alejandro Pérez Riascos [b], Alvaro Rugeles Pérez [c].

[a]*Departamento de Física. Universidad de Nariño, Pasto.*
[b]*Instituto de Física, Universidad Nacional Autónoma de México, México, D.F.*
[c]*Departamento de Física. Universidad de Nariño, Pasto.*

Aceptado Octubre; Publicado en línea Enero.

ISSN 2256-3830.

Resumen

Este artículo presenta algunos conceptos fundamentales del cálculo fraccional. Se parte de una revisión de los aspectos históricos relevantes y se establece las principales definiciones de derivada fraccional y sus propiedades. También se realiza una descripción de herramientas de uso frecuente en cálculo fraccional como la función gamma, la función de Mittag-Leffler, la derivada fraccional de Riemann-Liouville y la derivada fraccional de Caputo. Además se incluyen las transformadas de Laplace de algunas funciones y de las derivadas fraccionales, que son útiles en la solución de ecuaciones diferenciales fraccionales.

***Palabras Claves*:** Cálculo fraccional, Derivada fraccional de Riemann-Liouville, Derivada fraccional de Caputo, funciones de Mittag-Leffler.

Abstract

In this paper we present an introduction to the fractional calculus. We start with a short historical revision of this field, and then we study the different definitions of fractional derivative and its properties. In this context we introduce the Mittag-Leffler function, the Riemann-Liouville fractional derivative and the Caputo fractional derivative. Finally, we discuss the Laplace transform of fractional derivatives and some properties that are useful in solving fractional differential equations. This text gives to the reader an introductory overview about fractional calculus.

***Keywords*:** Fractional calculus, Riemann-Liouville fractional derivative, Caputo fractional derivative, Mittag-Leffler functions.

1. Introducción

El cálculo fraccional es una teoría cuyos fundamentos se empezaron a indagar desde los inicios del cálculo ordinario, inicialmente como una crítica a la notación de Leibniz de derivada y más adelante alcanzó una estructura matemática convincente gracias a la contribución de matemáticos de renombre como Riemann, Liouville y Abel [1,2,3]. Este formalismo matemático encuentra aplicaciones en diferentes áreas de la física, la química, la biología, entre otras [4,5,6,7].

⋆ vicbfisico@gmail.com

En el cálculo ordinario, la aplicación sucesiva de los operadores de derivación e integración sugiere solo valores enteros n para el orden de esta operación, una unidad por cada vez que se aplica el operador. No obstante, se puede obtener una expresión general para estos operadores y proponer, además, un valor arbitrario α a dicho orden [8]. Es así como surge el cálculo fraccional para estudiar las derivadas e integrales de orden arbitrario α [1,8,9]. El cálculo fraccional ha recorrido un camino casi tan extenso como el del cálculo ordinario, sin embargo, éste no es el caso de las aplicaciones. No obstante, se prevé que esto pueda cambiar ya que son muchas las áreas de la ciencia que se han ido interesando por este campo.

En este artículo, en la sección 2 se hace una introducción histórica de las ideas que se fueron desarrollando para pasar del cálculo ordinario al cálculo de orden arbitrario y se mencionan algunos personajes históricos por la importancia de sus aportes al cálculo fraccional. Posteriormente en la sección 3 se introduce la función gamma [10] debido a su frecuente aparición en las definiciones estudiadas y también la función de Mittag-Leffler [8], la cual aparece en la solución de ecuaciones diferenciales fraccionales. Luego, en la sección 4 se definen las derivadas fraccionales de Riemann-Liouville y de Caputo que son las que se usan generalmente en las aplicaciones [1,9,11]. Finalmente en la sección 5 se estudia la transformada de Laplace de las funciones y derivadas mencionadas las cuales juegan un papel importante en la solución de ecuaciones diferenciales fraccionales.

2. Reseña histórica

Se podría pensar que el cálculo fraccional es un campo relativamente nuevo, no obstante, sus orígenes se remontan a Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) [1,2,3,11] quien introdujo la notación $d^n f(x)/dx^n$ para la derivada n-ésima de una función $f(x)$, generando inquietudes a personajes como Guillaume François Antoine, marqués de L'Hôpital, quien ya para 1695 reflexionaba acerca de las posibles consecuencias de usar el valor $n = 1/2$, siendo esto una paradoja en ese entonces [3,11]. Sin embargo, en 1730 Leonhard Paul Euler cuestionó seriamente la posibilidad de valores fraccionarios para n [2]. Más tarde, en 1772 Joseph-Louis de Lagrange desarrolla la ley de los exponentes para la aplicación sucesiva de diferenciales de ordenes enteros m y n, $\frac{d^m}{dx^m}\frac{d^n}{dx^n}f(x) = \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}}f(x)$, y esto impulsó en los matemáticos el interés por la regla correspondiente para valores arbitrarios de m y n [1]. Es así como en 1812 Pierre Simon Laplace obtiene expresiones para ciertas derivadas fraccionales de casos particulares [8]. Adicionalmente, en 1819 Sylvestre François Lacroix encuentra la derivada fraccional de $y = x^m$ siendo m un entero positivo [3,11]. Primero calcula la n-ésima derivada de la función y con $m > n$:

$$\frac{d^n}{dx^n}y = \frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}. \tag{1}$$

La aparición del operador factorial en la ecuación (1) sugiere la posibilidad de una generalización con ayuda de la función gamma $\Gamma(z)$ [2] [10], escribiendo la ecuación (1) de la siguiente manera:

$$\frac{d^n}{dx^n}y = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)}x^{m-n}. \tag{2}$$

Este cambio permite reemplazar m y n por valores reales positivos tales que $m > n$. No obstante, este resultado no sugiere aplicaciones importantes para la derivada de orden arbitrario [3]. A partir de estos acontecimientos se empiezan a establecer definiciones de derivada fraccional de una función arbitraria $f(x)$ para funciones en general. Es así como en 1822 Jean-Baptiste Joseph Fourier propone la siguiente definición [1,2]:

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)p^\alpha \cos\left(p(x-u) + \frac{1}{2}\alpha\pi\right) du dp, \tag{3}$$

donde α es un valor real, positivo o negativo [11]. Sin embargo, la ecuación (3) es extensa y aún no se proponen aplicaciones para derivadas de este tipo. No fue sino hasta el año 1823 que el matemático noruego Niels Henrik Abel aplicó el cálculo fraccional en la solución de una ecuación integral que surgió en la formulación del problema de la tautócrona [1,11]. Este problema consiste en encontrar la forma de la curva $y = f(x)$ sobre un plano vertical tal que un objeto al deslizarse por ella sin rozamiento llegue al final de su recorrido en un tiempo que sea independiente

[2] La función gamma y sus propiedades se analizan en detalle en la sección 3.1.

del lugar en que se inicie el movimiento. En otras palabras, dos objetos sobre la misma curva, uno situado a mayor altura que el otro, recorren la curva en el mismo tiempo. Si el tiempo de caída es una constante conocida, la ecuación integral de Abel para $f(x)$ tiene la forma $k = \int_0^x (x-x')^{1/2} f(x')dx'$, donde k es una constante que aparece en el proceso de obtención de dicha ecuación [11]. Como se verá más adelante, la integral que aparece en la ecuación anterior representa la integral fraccional de orden $1/2$ excepto por un factor constante. Con ayuda de derivadas fraccionales [3], la solución de la citada ecuación integral es $\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}}k = \sqrt{\pi} f(x)$. Este resultado genera controversia ya que, según el mismo, la derivada fraccional de orden $1/2$ de la constante k es diferente de cero, a pesar de ello este acontecimiento es relevante para el cálculo fraccional ya que lo vuelve útil [1,2].

En 1832 el matemático Joseph Liouville, considerando la derivada de orden arbitrario de la función $f(x) = e^{ax}$, obtiene una definición de derivada fraccional a partir del desarrollo en series de una función arbitraria $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{a_n x}$ que es $\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n^\alpha e^{a_n x}$, siendo α en general un número complejo [1,2,11]. Esta definición es solamente aplicable a valores de α para los cuales la serie converge. También encuentra la siguiente expresión para la derivada fraccional de $f(x) = x^{-a}$ con $x > 0$ y $a > 0$: $\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} x^{-a} = \frac{(-1)^\alpha \Gamma(a+\alpha)}{\Gamma(a)} x^{-a-\alpha}$, donde el término $(-1)^\alpha$ puede conducir a números complejos [2,11]. No obstante, estos resultados solo son válidos para un conjunto restringido de funciones, razón por la cual no tienen buena acogida. De esta manera Liouville decide estudiar primero la integral fraccional para luego deducir el operador inverso, es decir, la derivada fraccional, obteniendo la siguiente definición de integral fraccional [1,2]:

$$\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}} f(x) = \frac{1}{(-1)^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{x} t^{\alpha-1} f(x+t)dt, \quad Re(\alpha) > 0, \tag{4}$$

la cual se conoce como integral fraccional de Liouville de orden α. Un resultado similar obtiene Georg Friedrich Bernhard Riemann [2] quien, usando una serie de Taylor, deduce una fórmula para la integración de orden arbitrario dada por $\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt + \phi(x)$, donde debido a la aparición del límite inferior de integración a, Riemann incluye una función complementaria $\phi(x)$ que genera confusión debido a su carácter arbitrario [1,2]. Finalmente en 1884 el matemático Matthhieu Paul Hermann Laurent obtiene la primera definición de integral fraccional que es aceptada por los matemáticos modernos [2]:

$${}_aD_x^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \quad Re(\alpha) > 0. \tag{5}$$

donde el símbolo ${}_aD_x^{-\alpha} f(x)$ denota la integral fraccional de orden α. La expresión (5) también es conocida como la fórmula de Riemann-Liouville ya que si $a = 0$ o $a = -\infty$ se recuperan las fórmulas obtenidas por Riemann y Liouville respectivamente. En este contexto los matemáticos Grünwuald en 1867 y Letnikov en 1868 [1] ponen a prueba la definición (5) al generalizar la definición de derivada de orden entero a un orden arbitrario α con la expresión ${}_aD_x^\alpha f(x) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x-a}{n}\right)^{-\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f\left(x - k\frac{x-a}{n}\right)$ y encuentran que la definición de Riemann-Liouville coincide con esta generalización [8,11]. Con unos pasos sencillos que se explican en [8] se puede calcular el operador inverso de la definición (5) y obtener la derivada fraccional de Riemann-Liouville, la cual se convierte en una definición fundamental en el cálculo fraccional principalmente en el marco de un formalismo puramente matemático ya que en problemas aplicados aparecen ciertos factores desconocidos que generan debate. Lo anterior debido a que la derivada de Riemann-Liouville tiene ciertas desventajas para modelar fenómenos reales con ecuaciones diferenciales fraccionales [8,9].

Más adelante el cálculo fraccional crece al punto que se desarrollan diferentes definiciones de derivadas e integrales fraccionales y se encuentran aplicaciones en muchas áreas de las ciencias. Se puede mencionar al respecto que en 1917 Hermann Weyl definió una integral fraccional adecuada a funciones periódicas cuya definición es ${}_xW_\infty^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^\infty (t-x)^{\alpha-1} f(t)dt, \;\; Re(\alpha) > 0$ [11].

Por otra parte, algunas aplicaciones del cálculo fraccional mostraron una dificultad para encontrar el significado físi-

[3] En este caso $\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^x (x-t)^{1/2} f(t)dt$.

co de las condiciones iniciales de problemas con derivadas fraccionales debido a que, al trabajar con las definiciones planteadas, un problema sólo queda claro cuando se consideran condiciones iniciales nulas. Ante dicha dificultad en 1969 el físico matemático italiano Michele Caputo propone una nueva definición de derivada fraccional que permite interpretar físicamente las condiciones iniciales en problemas aplicados [8]. Para cada valor $n \in \mathbb{Z}$ la definición dada por Caputo es la siguiente [8,9]:

$$ {}_{-\infty}D_t^{\alpha} f(t) \,=\, \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{-\infty}^{t} \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau, \;\; n-1 \,<\, \alpha \,<\, n. \tag{6}$$

Lo importante de la definición (6) es que cuando se usa en ecuaciones diferenciales fraccionales las condiciones iniciales adquieren la misma forma que las que se usan en ecuaciones diferenciales de orden entero [8,9].

Una vez mencionadas algunas definiciones de derivada fraccional se debe referir también que al aplicar estas definiciones sobre una función exponencial aparece una función importante en cálculo fraccional llamada función de Mittag-Leffler [4] . Existen diferentes variantes de esta función como la función de Mittag-Leffler de un término, definida y estudiada por Mittag-Leffler en 1903, y sus generalizaciones a dos y tres términos introducidas por Agarwal en 1953 y por Prabhakar en 1971, respectivamente [12]. Estas funciones desempeñan un papel análogo al de la función exponencial en el cálculo ordinario con la ventaja que amplían la precisión en la descripción de ciertos fenómenos físicos [13].

Con esto se ha hecho una breve introducción histórica al concepto de derivada fraccional, teniendo en cuenta que se ha dejado de lado bastantes acontecimientos relevantes. Por ejemplo en [1] se hace una recopilación de las primeras aplicaciones relacionadas con la solución de algunas ecuaciones diferenciales fraccionales sencillas como la ecuación integral de Abel y problemas de difusión en el transporte en medios finitos, además de incluir un buen resumen histórico. En [8] también se citan algunas aplicaciones en diferentes áreas como viscoelasticidad, electrónica, reacciones químicas y biología. Además existen otros textos con aportes importantes a las ecuaciones diferenciales fraccionales [11] y otro enfocado al uso de la definición de Caputo de derivada fraccional [9]. En el contexto actual existen gran cantidad de publicaciones con aplicaciones del cálculo fraccional en viscoelasticidad [4], mecánica cuántica [14], biología [6], semiconductores [7], propagación de ondas electromagnéticas [15] y materiales [16], por mencionar solo algunos campos. Además el cálculo fraccional es una rama de investigación abierta en la que existen diferentes asuntos no resueltos como buscar la interpretación física del uso de derivadas fraccionales para explicar ciertos fenómenos, encontrar una interpretación geométrica de los operadores del cálculo fraccional y unificar las diferentes definiciones de derivada fraccional en un solo formalismo.

3. Funciones especiales utilizadas en el cálculo fraccional

En esta sección se define la función gamma [8,10] y la función de Mittag-Leffler [8,17] mencionadas en la sección previa que son fundamentales en el estudio del cálculo fraccional.

3.1. *Función gamma*

Existen diferentes formas de definir la función gamma $\Gamma(z)$ [10]. A continuación se presenta la forma integral de la función gamma con $z \in \mathbb{C}$:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \;\; Re(z) > 0, \; t > 0, \tag{7}$$

que representa una generalización de la función factorial real a valores complejos [10,18]. Como se indica en la sección 4 la función gamma interviene en la definición de derivada fraccional, de ahí su importancia en este texto.

[4] La función de Mittag-Leffler y sus propiedades se analizan en detalle en la sección 3.2.

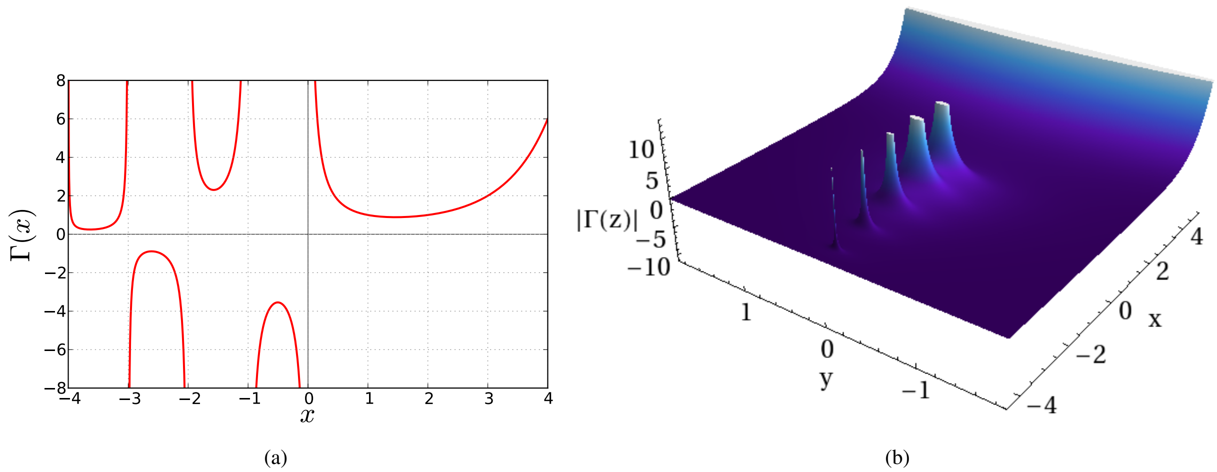


Figura 1. Gráfica de $\Gamma(z)$ con base en la ecuación (7). (a) $\Gamma(x)$ de dominio real. Se observa que la función gamma no está definida para enteros negativos y cero. (b) Valor absoluto de $\Gamma(z)$, siendo $z = x + iy$.

Con base en las diferentes definiciones de la función gamma $\Gamma(z)$ se demuestra que esta existe para todos los valores de z, excepto para $z = 0, -1, -2, -3, ...$ [17]. Sin embargo, la representación integral (7) sólo está definida para $Re(z) > 0$. Por otra parte, al calcular por partes la integral (7) evaluada en $z + 1$ se encuentra que $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$ y por ende se demuestra que para un entero positivo n se cumple la propiedad $\Gamma(n + 1) = n!$ [10]. También suele ser útil definir una nueva función llamada función beta para evitar el uso de una combinación de valores de la función gamma [8]. La función beta se define mediante la ecuación:

$$\beta(z, w) = \int_0^1 \tau^{z-1}(1 - \tau)^{w-1} d\tau, \quad Re(z) > 0, \quad Re(w) > 0. \tag{8}$$

En [8] se demuestra que la función beta cumple $\beta(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}$. Resta decir que otra propiedad relacionada con la función gamma es la fórmula de reflexión de Euler: $\Gamma(1 - z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ [8,17].

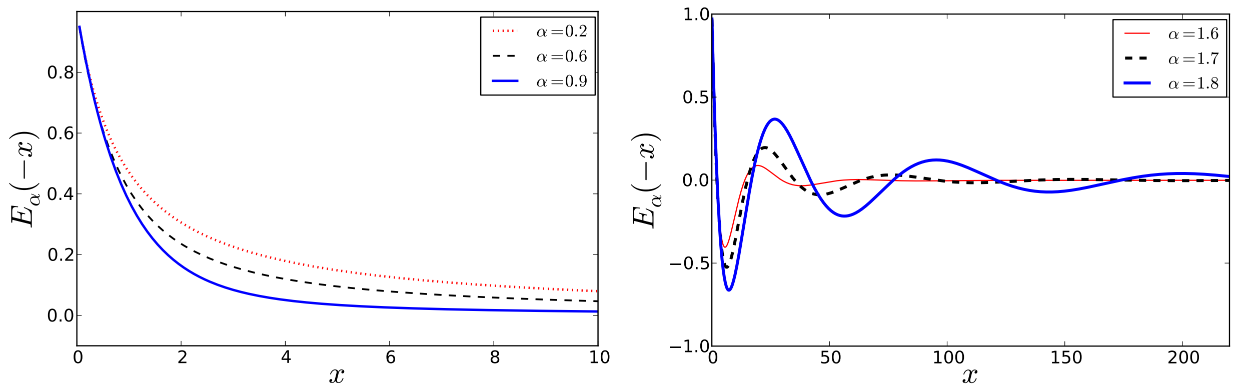
Para ilustrar mejor el dominio de definición de la función (7) en la Figura 1 se grafica la función gamma de variable real y el valor absoluto de la función gamma de variable compleja. Se observa que los valores para los cuales la función gamma no está definida se encuentran en la parte negativa del eje real.

3.2. *Función de Mittag-Leffler*

La función de Mittag-Leffler es una función típica del cálculo fraccional y su importancia radica en que aparece directamente en problemas de física, biología, ingeniería y ciencias aplicadas [8,17]. Generalmente se usan tres variantes de dicha función. La más sencilla es la función de Mittag-Leffler de un término [11]:

$$E_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + 1)}, \quad Re(\alpha) > 0, \tag{9}$$

donde $z = x + iy$ es la variable compleja con x e y reales y α es una constante compleja con parte real positiva. La función (9) está relacionada con funciones de uso común para determinados valores de α. A continuación se citan algunos ejemplos de la función $E_\alpha(-x)$ con $x \in \mathbb{R}$ y α entero [8]:



(a) Exponencial decreciente

(b) Función oscilatoria

Figura 2. Gráficas de la función de Mittag-Leffler $E_\alpha(-x)$ en función de x. (a) $E_\alpha(-x)$ para valores de α comprendidos entre 0 y 1. La función tiene aproximadamente un decrecimiento exponencial. (b) $E_\alpha(-x)$ con valores de α entre 1 y 2. La función tiene un comportamiento oscilatorio.

$$E_\alpha(-x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } \alpha = 1, \\ \\ \cos(\sqrt{x}) & \text{si } \alpha = 2, \\ \\ \frac{1}{3}\left(e^{-x^{1/3}} + 2e^{\frac{x^{1/3}}{2}} \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x^{1/3}\right)\right) & \text{si } \alpha = 3, \\ \\ \cos\left(\frac{x^{1/4}}{\sqrt{2}}\right) \cosh\left(\frac{x^{1/4}}{\sqrt{2}}\right) & \text{si } \alpha = 4. \end{cases}$$

Sin embargo, para valores de α reales no siempre se obtienen expresiones conocidas o sencillas y por lo tanto se acude a métodos numéricos y computacionales con el objetivo de analizar dichas funciones. Con base en estos métodos se observa que la función de Mittag-Leffler de variable real $E_\alpha(-x)$ para valores de α tales que $0 < \alpha < 1$ tiene un comportamiento aproximadamente exponencial y cuando $1 < \alpha < 2$ la función es oscilatoria, lo cual se ilustra en la Figura 2. Adicionalmente, las funciones de Mittag-Leffler de orden racional $\alpha = p/q$ con $p, q = 1, 2, 3, ...$, satisfacen las relaciones [9]:

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^p E_p(z^p) = E_p(z^p), \tag{10}$$

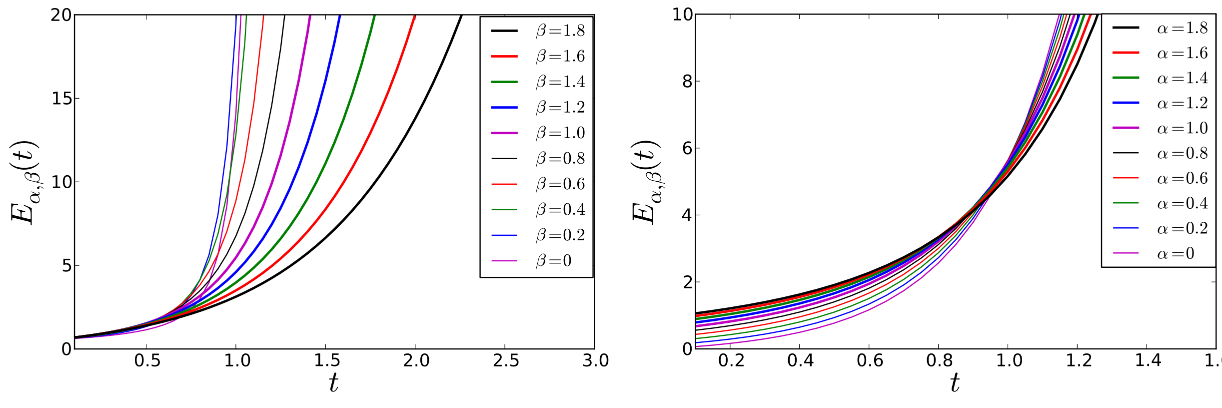
y también [9]

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^p E_{\frac{p}{q}}(z^{\frac{p}{q}}) = E_{\frac{p}{q}}(z^{\frac{p}{q}}) + \sum_{k=1}^{q-1} \frac{z^{k\frac{p}{q}} - p}{\Gamma(k\frac{p}{q} + 1 - p}. \tag{11}$$

Las ecuaciones (10) y (11) se usan en la determinación de la transformada de Laplace de algunas funciones relacionadas con la función de Mittag-Leffler. Por otra parte, se introduce la función de Mittag-Leffler de dos términos [8,9] cuya definición es:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}, \tag{12}$$

siendo z variable compleja, α y β constantes complejas con parte real positiva. Cuando $\beta = 1$ la definición (12) se reduce a la función de Mittag-Leffler de un término, $E_\alpha(z) = E_{\alpha,1}(z)$. Los siguientes son algunos casos en los que la función de Mittag-Leffler de dos términos se reduce a funciones ordinarias [8]:



(a) (b)

Figura 3. Gráficas de la función de Mittag-Leffler de dos términos $E_{\alpha,\beta}(x)$ dada por (12) con α, β y x reales. (a) $E_{\alpha,\beta}(x)$ con $\alpha = 0.5$ y diferentes valores de β. (b) $E_{\alpha,\beta}(x)$ con $\beta = 0.5$ y diferentes valores de α.

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \begin{cases} \frac{e^z-1}{z} & \text{si } \alpha = 1 \text{ y } \beta = 2, \\ \frac{1}{z^{m-1}}\left\{e^z - \sum_{k=0}^{m-2}\frac{z^k}{k!}\right\} & \text{si } \alpha = 1 \text{ y } \beta = m, \\ \cosh(z) & \text{si } \alpha = 2 \text{ y } \beta = 1, \\ \frac{\sinh(z)}{z} & \text{si } \alpha = 2 \text{ y } \beta = 2. \end{cases}$$

En la Figura 3 se presenta la gráfica de la función de Mittag-Leffler de dos términos $E_{\alpha,\beta}(x)$ con α, β y x reales. Se observa que los parámetros α y β atenúan la función en el sentido que las curvas se ensanchan a medida que dichos parámetros se incrementan. También es común en las aplicaciones el uso de la función de Mittag-Leffler generalizada [12]:

$$E^{\gamma}_{\alpha,\beta}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma+n)}{n!\Gamma(\alpha n+\beta)\Gamma(\gamma)} z^n, \tag{13}$$

donde z es variable compleja, α, β y γ son constantes complejas con parte real positiva. La función (13) puede resultar a partir de la derivada de la función de Mittag-Leffler de dos términos y aparece en la descripción de sistemas viscoelásticos. Es de notar que $E^1_{\alpha,\beta}(z) = E_{\alpha,\beta}(z)$. Las definiciones (9)-(13) en algunos casos conducen a expresiones en las que la suma infinita se reduce a una función analítica, no obstante, la mayor parte de las veces se mantiene la complejidad de dicha función por lo que se suele recurrir a métodos numéricos para su análisis.

3.3. *Función hipergeométrica*

Existe un conjunto de ecuaciones diferenciales de uso común en física que se generalizan por medio de la llamada ecuación diferencial hipergeométrica [18]:

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]y' - \alpha\beta y = 0, \tag{14}$$

donde α, β y γ son constantes y sus soluciones se pueden expresar por medio de una serie en términos de la función gamma conocida como función hipergeométrica [18]:

$$F(\alpha,\beta;\gamma;z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n)\Gamma(n+1)}z^n. \tag{15}$$

La función hipergeométrica es simétrica por intercambio de α y β. En este trabajo se usan dos variantes de la función hipergeométrica que son la función hipergeométrica confluente de Kummer [9]:

$${}_1F_1(\alpha;\beta;z)=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\beta+n)n!}z^n,\ \ \alpha\in\mathbb{R},\ \ -\beta\notin\mathbb{N}_0, \tag{16}$$

y la función hipergeométrica de Gauss [9]:

$${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n)n!}z^n,\ \ \alpha,\beta\in\mathbb{R},\ \ -\gamma\notin\mathbb{N}_0. \tag{17}$$

Las funciones (16) y (17) aparecen al calcular la derivada de Caputo (sección 4.2) de las funciones $\sin(z)$ y $\cos(z)$ respectivamente, así como al representar ciertas funciones de Mittag-Leffler.

4. Derivada fraccional

De acuerdo a lo estudiado en la sección 2, a lo largo de la historia se han desarrollado diferentes definiciones para la derivada fraccional y dado que aún no existe una teoría fundamental que pueda unificarlas, en este trabajo se introducen las definiciones más importantes de derivada fraccional como lo son las definiciones de Riemann-Liouville [8] y de Caputo [9].

4.1. *Derivada fraccional de Riemann-Liouville*

La derivada fraccional de Riemann-Liouville de una función $f(t)$ se denota por ${}_aD_t^{\alpha}f(t)$ [8,11] y para los propósitos de este trabajo se usa la siguiente definición:

$${}_aD_t^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^n\int_a^t(t-\tau)^{n-\alpha-1}f(\tau)d\tau, \tag{18}$$

donde $\alpha\geq 0$ es el orden real de la derivada perteneciente al intervalo $n-1\leq\alpha<n$ con n entero, además, $t>a$. La definición (18) se aplica a funciones $f(t)$ que tienen n derivadas continuas en el intervalo $[a,t)$, tales que $\int_a^t|f(x)|dx<\infty$. Debido a que la derivada de Riemann-Liouville está definida por medio de una integral, que depende de los valores que la función asuma en el intervalo de integración, se dice que es un operador no local. Por otra parte, en la referencia [8] se demuestra que la definición (18) está relacionada con la derivada de orden entero de tal manera que la derivada fraccional de Riemann-Liouville se reduce a la derivada de orden entero n cuando $\alpha=n$, ${}_aD_t^{n}f(t)=\frac{d^n}{dt^n}f(t)$. También es importante señalar que la derivada fraccional de Riemann-Liouville es una operación lineal y que la definición (18) puede aplicarse a funciones de varias variables, sustituyendo la derivada entera ordinaria $\frac{d^n}{dt^n}$ por la respectiva derivada parcial. Por su parte, en la Figura 4 se observa que las derivadas fraccionales ofrecen un espectro más amplio que las derivadas enteras, lo que permite mejorar la precisión en la descripción de algunos fenómenos físicos.

A continuación se describen algunas propiedades de la derivada fraccional de Riemann-Liouville. En este apartado se supone que α, $\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha>0$, $\beta>0$, n es el menor entero mayor que α y m es el menor entero mayor que β. Para facilitar la comprensión de estas propiedades a continuación se introduce la definición de integral fraccional de Riemann-Liouville de una función $f(t)$ [8]:

$${}_aI_t^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t(t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)d\tau,\ \ a<t<\infty, \tag{19}$$

donde $f(t)$ tiene n derivadas continuas en el intervalo $[a,t)$ y $\int_a^t |f(t)|dt < \infty$. Con esto en mente se tienen las siguientes propiedades [8,9]:

- La derivada fraccional de Riemann-Liouville de una integral fraccional es:

$$ {}_aD_t^{\beta}\, {}_aI_t^{\alpha} f(t) = {}_aI_t^{\alpha-\beta} f(t), \;\; \alpha \geq \beta, \tag{20}$$

  y

$$ {}_aD_t^{\beta}\, {}_aI_t^{\alpha} f(t) = {}_aD_t^{\beta-\alpha} f(t), \;\; \alpha \leq \beta. \tag{21}$$

  Por lo tanto la derivada fraccional de Riemann-Liouville es el operador inverso de la integral fraccional de Riemann-Liouville, es decir, ${}_aD_t^{\alpha}\, {}_aI_t^{\alpha} f(t) = f(t)$.

- La integral fraccional de Riemann-Liouville de una derivada fraccional de Riemann-Liouville se expresa así [8]:

$$ {}_aI_t^{\alpha}\, {}_aD_t^{\alpha} f(t) = f(t) - \sum_{j=1}^{n} {}_aD_t^{\alpha-j} f(a) \frac{(t-a)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)}. \tag{22}$$

  Esta propiedad muestra que el operador integral fraccional de Riemann-Liouville no es en general el operador inverso de la derivada fraccional de Riemann-Liouville.

- Para la derivada entera D^k, con $k \in \mathbb{N}$, de una derivada fraccional de Riemann-Liouville se cumple la regla

$$ D^k\, {}_aD_t^{\alpha} f(t) = {}_aD_t^{\alpha+k} f(t), \tag{23}$$

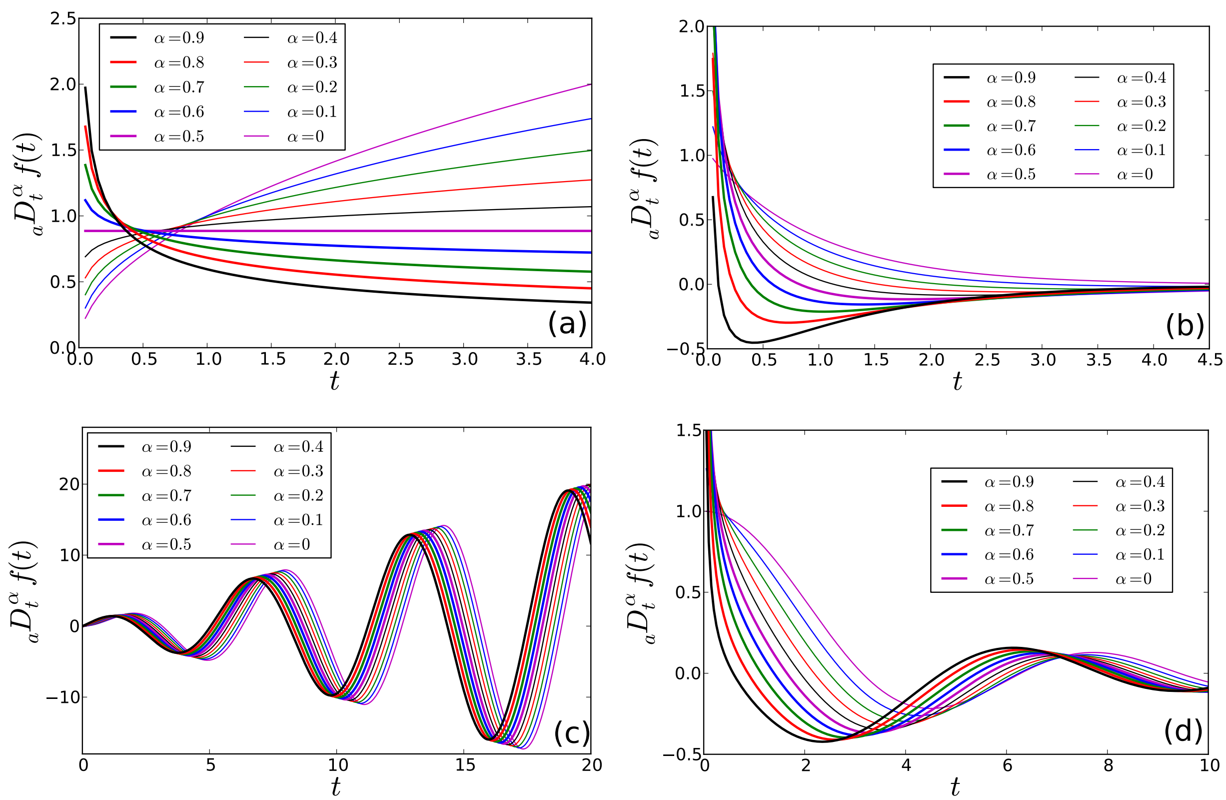


Figura 4. Gráficas de la derivada de Riemann-Liouville ${}_aD_t^{\alpha} f(t)$ de algunas funciones $f(t)$ dadas, con $a = 0$ y $0 \leq \alpha < 1$. (a) $f(t) = \sqrt{t}$. (b) $f(t) = e^{-t}$. (c) $f(t) = t \sin t$. (d) $f(t) = \sin t/t$. Se observa que entre las derivadas enteras de orden 0 y 1 existe un continuo de derivadas fraccionales lo que amplía el concepto de derivada ordinaria.

que es la misma del cálculo ordinario. No obstante, para el caso inverso la regla es diferente [8,9] y se escribe así:

$$ {}_aD_t^{\alpha} D^k f(t) = {}_aD_t^{\alpha+k} f(t) - \sum_{j=1}^{n} D^{k-j} f(a) \frac{(t-a)^{-(j+\alpha)}}{\Gamma(1-j-\alpha)}, \;\; \alpha \geq \beta. \tag{24} $$

- La regla de composición de derivadas fraccionales es la siguiente [8]:

$$ {}_aD_t^{\alpha}\, {}_aD_t^{\beta} f(t) = {}_aD_t^{\alpha+\beta} f(t) - \sum_{j=1}^{m} {}_aD^{\beta-j} f(a) \frac{(t-a)^{-(\alpha+j)}}{\Gamma(1-j-\alpha)}. \tag{25} $$

Es de anotar que el uso de las propiedades anteriores supone la existencia de todas las derivadas fraccionales de Riemann-Liouville que intervienen en las mismas [8,9].

En las tablas 1 y 2 se dan las derivadas fraccionales de orden real α de algunas funciones de la variable real t para $t > 0$. El orden de la derivada fraccional se asume como cualquier valor arbitrario a menos que se diga lo contrario. Las derivadas de la tabla 1 se han calculado para $a = 0$, mientras que en la tabla 2 se ha tomado $a = -\infty$. Para cada función se indican las restricciones sobre los valores de las constantes b, λ y ν [8]. Hacer un análisis detallado de la obtención de las tablas 1 y 2 puede ser bastante extenso, no obstante, dicho estudio se puede revisar en [8].

Función $f(t)$	**Derivada fraccional** ${}_0D_t^{\alpha} f(t)$, $t > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$	
$H(t)$	$\frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$	
$H(t-b)$	$\frac{(t-b)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$,	$t > b$
$H(t-b)$	0,	$0 \leq t \leq b$
$H(t-b)f(t)$	${}_aD_t^{\alpha} f(t)$,	$t > b$
$H(t-b)f(t)$	0,	$0 \leq t \leq b$
$\delta(t)$	$\frac{t^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)}$	
$\delta^{(n)}(t)$	$\frac{t^{-\alpha-n-1}}{\Gamma(-n-\alpha)}$,	$n \in \mathbb{N}$
$\delta^{(n)}(t-b)$	$\frac{(t-b)^{-\alpha-n-1}}{\Gamma(-n-\alpha)}$,	$t > b$, $n \in \mathbb{N}$
$\delta^{(n)}(t-b)$	0,	$0 \leq t \leq b$, $n \in \mathbb{N}$
t^{ν}	$\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1-\alpha)} t^{\nu+\alpha}$,	$\nu > -1$
$e^{\lambda t}$	$t^{-\alpha} E_{1,1-\alpha}(\lambda t)$	
$\cosh(\sqrt{\lambda} t)$	$t^{-\alpha} E_{2,1-\alpha}(\lambda t^2)$	
$\frac{\sinh(\sqrt{\lambda} t)}{\sqrt{\lambda} t}$	$t^{1-\alpha} E_{2,2-\alpha}(\lambda t^2)$	
$t^{\beta-1} E_{\nu,\beta}(\lambda t^{\nu})$	$t^{\beta-\alpha-1} E_{\nu,\beta-\alpha}(\lambda t^{\nu})$,	$\beta > 0$, $\nu > 0$

Tabla 1
En esta tabla se usa la definición (18) para calcular la derivada de Riemann-Liouville de las funciones indicadas, con $a = 0$ y $\alpha > 0$. $H(t)$ es la función de Heaviside siendo $H(t) = 1$ para $t \geq 0$ y $H(t) = 0$ para $t < 0$. Por otra parte, $\delta(t)$ es la función delta de Dirac donde $\delta(t) = \infty$ para $t = 0$ y 0 para $t \neq 0$ con la condición que $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$. A su vez $E_{\alpha,\beta}(t)$ es la función de Mittag-Leffler de dos términos [8].

Función $f(t)$	**Derivada fraccional** ${}_{-\infty}D_t^{\alpha} f(t)$, $t > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$	
$H(t-b)$	$\frac{(t-b)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$,	$t > b$
$H(t-b)$	0,	$t \leq b$
$H(t-b)f(t)$	${}_aD_t^{\alpha} f(t)$,	$t > b$
$H(t-b)f(t)$	0,	$t \leq b$
$e^{\lambda t}$	$\lambda^{\alpha} e^{\lambda t}$,	$\lambda > 0$
$e^{\lambda t+\nu}$	$\lambda^{\alpha} e^{\lambda t+\nu}$,	$\lambda > 0$
$\sin(\lambda t)$	$\lambda^{\alpha} \sin(\lambda t + \pi\alpha/2)$,	$\lambda > 0$, $\alpha > -1$
$\cos(\lambda t)$	$\lambda^{\alpha} \cos(\lambda t + \pi\alpha/2)$,	$\lambda > 0$, $\alpha > -1$

Tabla 2
En esta tabla se usa la definición (18) para calcular la derivada de Riemann-Liouville con $a = -\infty$ y $\alpha > 0$. La función $H(t)$ es la función de Heaviside siendo $H(t) = 1$ para $t \geq 0$ y $H(t) = 0$ para $t < 0$. Por otra parte, $E_{\alpha,\beta}(t)$ es la función de Mittag-Leffler de dos términos [8].

La obtención analítica de derivadas fraccionales de funciones diferentes a las que aparecen en las tablas 1 y 2 puede resultar difícil, es el caso de la derivada de Riemann-Liouville de la función $t\sin(t)$. Un caso más complejo puede ser la derivada fraccional de la función de Mittag-Leffler generalizada. Esto obliga a utilizar métodos numéricos para obtener resultados como los que se presentan en las Figuras 4 y 5.

4.2. *Derivada fraccional de Caputo*

La derivada fraccional de Riemann-Liouville se ha desarrollado con una formulación para usos estrictamente matemáticos, sin embargo, existen ciertas áreas de las ciencias naturales y aplicadas en las cuales dicha definición requiere de una revisión [8]. No obstante, se han acumulado una serie de trabajos, especialmente en la teoría de viscoelasticidad [4,19] y de sólidos mecánicos con memoria [20] donde las derivadas fraccionales son usadas para mejorar la descripción de las propiedades de los materiales estudiados. El modelamiento matemático conduce a ecuaciones diferenciales de orden fraccional y a la necesidad de formular las condiciones iniciales para tales ecuaciones que tengan una interpretación física conveniente. No obstante, la aproximación dada por la definición (18) conduce a unas condiciones iniciales que dependen del valor límite inferior $t = a$ y pese a que el problema de valores iniciales con tales condiciones iniciales ya se ha resuelto, dichas soluciones no tienen la respectiva interpretación física [8].

La propuesta de derivada fraccional de Caputo es [8,9]:

$$ {}_a^C D_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau, \tag{26}$$

donde se usa los parámetros y restricciones establecidas en la definición de Riemann-Liouville, además n es un número entero que satisface la condición $n - 1 < \alpha < n$ y $f(x)$ cumple que sus derivadas n-ésima y de órdenes inferiores son continuas e integrables. Así, la expresión (26) está definida y es única en el intervalo (a, b) [9]. Por otra parte, la definición (26) se reduce a una derivada de orden entero n en el límite cuando $\alpha \to n$ [8], esto se demuestra al integrar por partes la ecuación (26) y calcular el límite:

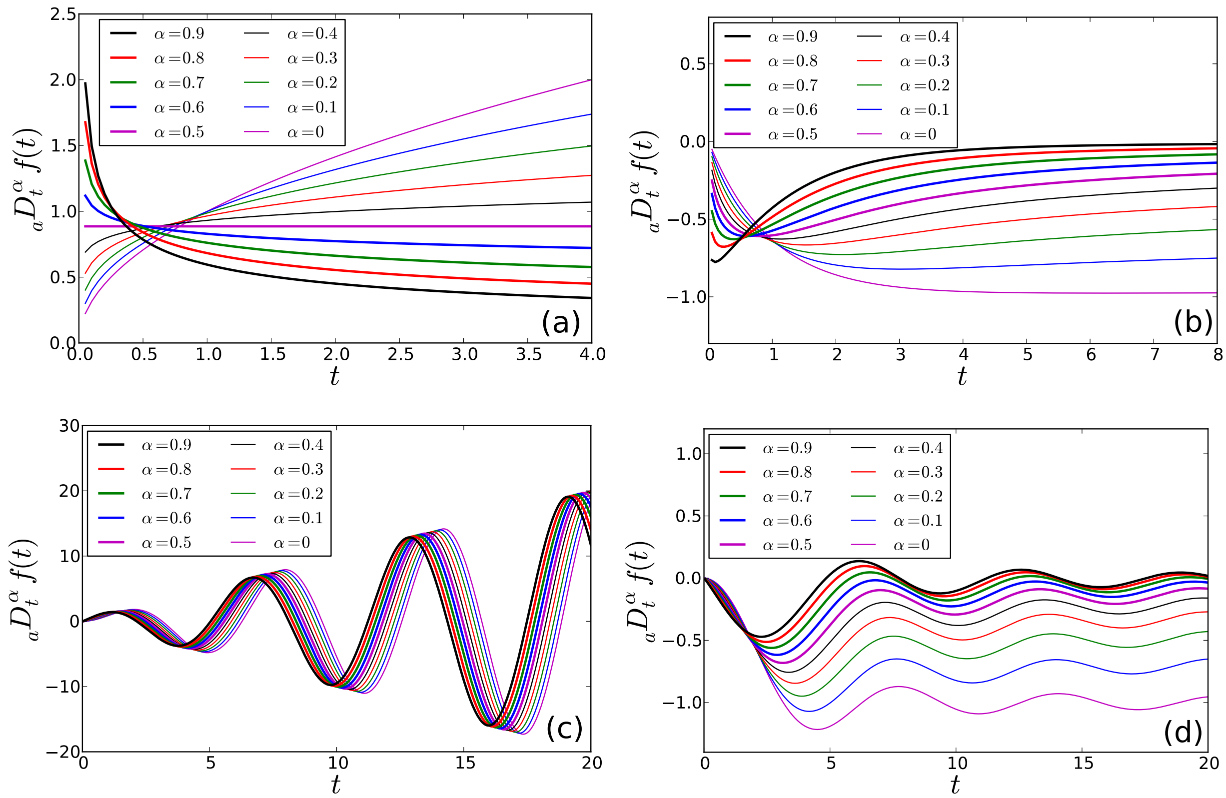


Figura 5. Gráficas de la derivada fraccional de Caputo (26) de ciertas funciones $f(t)$, con $a=0$ y $0 \leq \alpha < 1$. (a) $f(t)=\sqrt{t}$. (b) $f(t)=e^{-t}$. (c) $f(t)=t\sin t$. (d) $f(t)=\sin t/t$.

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha\to n} {}_a^C D_t^\alpha f(t) &= \lim_{\alpha\to n}\left(\frac{f^{(n)}(a)(t-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha} f^{(n+1)}(\tau)d\tau\right)\\ &= f^{(n)}(a) + \int_a^t f^{(n+1)}(\tau)d\tau \\ &= f^{(n)}(t),\ \ n=1,2,3,...,\end{aligned} \tag{27}$$

que es posible gracias a que el término $(t-\tau)^{n-\alpha}$ no converge cuando $t=\tau$ dado que $n>\alpha$. También se observa que la ecuación (26) depende de la derivada n-ésima de una función $f(t)$ y si ésta función es constante, la derivada fraccional de Caputo es cero, tal como en el cálculo ordinario. La definición (26) también aplica para funciones de varias variables si se sustituye la derivada entera total por su respectiva derivada parcial. Una propiedad útil en cálculo fraccional es:

- Para $m=1,2,3,...$ y $n-1<\alpha<n$ se cumple:
$$ {}_a^C D_t^\alpha D^m f(t) = D^m {}_a^C D_t^\alpha f(t) = {}_a^C D_t^{\alpha+m} f(t), \tag{28}$$
donde D^m es la derivada de orden entero m y $f^{(s)}(0)=0$ para $s=n,n+1,n+2,...,m$. Por tanto la derivada fraccional de Caputo no tiene restricciones para $f^{(n)}(0)$ cuando $s=0,1,2,...,n-1$.

En la Figura 5 se presenta la derivada de Caputo de algunas funciones y en la tabla 3 se resumen algunos ejemplos analíticos de derivada fraccional de Caputo. En [9] se estudia las funciones que aparecen en la tabla 3.

Con lo anterior se completa el resumen de las definiciones de derivadas fraccionales con más aplicaciones, no obstante, existen otras definiciones tales como la planteada por Hermann Weyl [2], la de Matthieu Paul Hermann Laurent [3], y la de Grünwald-Letnikov [8].

Función $f(t)$	**Derivada fraccional** ${}_0D_t^{\alpha} f(t)$	
t^{ν}	$\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1-\alpha)} t^{\nu-\alpha}$,	$\nu \in \mathbb{N}_0$ y $\nu \geq n$ ó $\nu \notin \mathbb{N}$ y $\nu > n-1$
t^{ν}	0,	$\nu \in \mathbb{N}_0$ y $\nu < n$
$(t+c)^{\nu}$	$\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1-n)} \frac{c^{\nu-n-1} t^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} {}_2F_1^{(-)}$,	$c, \nu \in \mathbb{R}$ y $c > 0$
$e^{\lambda t}$	$\lambda^n t^{n-\alpha} E_{1,n-\alpha+1}(\lambda t)$	
$\sin(\lambda t)$	$\frac{\lambda^n i(-1)^{m/2} t^{n-\alpha}}{2\Gamma(n-\alpha+1)} \left[-{}_1F_1^{(+)} + {}_1F_1^{(-)} \right]$,	n par, $\nu \in \mathbb{R}$
$\sin(\lambda t)$	$\frac{\lambda^n i(-1)^{(m-1)/2} t^{n-\alpha}}{2\Gamma(n-\alpha+1)} \left[{}_1F_1^{(+)} + {}_1F_1^{(-)} \right]$,	n impar, $\nu \in \mathbb{R}$
$\cosh(\lambda t)$	$\frac{\lambda^n i(-1)^{m/2} t^{n-\alpha}}{2\Gamma(n-\alpha+1)} \left[{}_1F_1^{(+)} + {}_1F_1^{(-)} \right]$,	n par, $\nu \in \mathbb{R}$
$\cosh(\lambda t)$	$\frac{\lambda^n i(-1)^{(m-1)/2} t^{n-\alpha}}{2\Gamma(n-\alpha+1)} \left[-{}_1F_1^{(+)} + {}_1F_1^{(-)} \right]$,	n impar, $\nu \in \mathbb{R}$

Tabla 3
En esta tabla se usa la definición (26) para calcular la derivada de Caputo con $a = 0$, $t > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $n-1 < \alpha < n$ y $n \in \mathbb{N}$. La función $H(t)$ es la función de Heaviside siendo $H(t) = 1$ para $t \geq 0$ y $H(t) = 0$ para $t < 0$. Por otra parte, $\delta(t)$ es la función delta de Dirac donde $\delta(t) = \infty$ para $t = 0$ y 0 para $t \neq 0$ con la condición que $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$. A su vez $E_{\alpha,\beta}(t)$ es la función de Mittag-Leffler de dos términos. También ${}_1F_1^{(+)} = {}_1F_1(1; n-\alpha+1; i\lambda t)$, ${}_1F_1^{(-)} = {}_1F_1(1; n-\alpha+1; -i\lambda t)$ y ${}_2F_1^{(-)} = {}_2F_1(1, n-\nu; n-\alpha+1; -x/c)$ son las funciones hipergeométricas definidas en la sección 3.3 [9].

Para finalizar se hace necesario establecer cuál es la relación entre la derivada fraccional de Riemann-Liouville y la definición de Caputo, relación que es dada por la siguiente expresión [8,21]:

$$ {}_aD_t^{\alpha} f(t) = {}_a^C D_t^{\alpha} f(t) + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(1+j-\alpha)} (t-a)^{j-\alpha}, \tag{29} $$

la cual se da cuando se cumplen las condiciones adecuadas para f establecidas en las diferentes definiciones de derivada fraccional planteadas. Así, para funciones derivables hasta orden $n-1$ en a y para las que exista ${}_aD_t^{\alpha} f(t)$ se puede establecer una nueva definición de derivada de Caputo [8,21]:

$$ {}_a^C D_t^{\alpha} f(t) = {}_aD_t^{\alpha} \left[f(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} (t-a)^j \right], \tag{30} $$

donde se observa que las definiciones de Caputo y de Riemann-Liouville difieren por la derivada fraccional de una serie. Además, la ecuación (29) explica la razón por la cual las gráficas de las derivadas fraccionales de las funciones $f(t) = \sqrt{t}$ y $f(t) = t \sin t$ en las Figuras 4 y 5 coinciden, ya que la suma en la ecuación (29) se hace cero dejando idénticas las definiciones de Riemann-Liouville y de Caputo. Esto no sucede cuando se usa las funciones $f(t) = e^{-t}$ y $f(t) = \sin t/t$.

5. Transformada de Laplace

Un método para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias es el uso de transformadas integrales, así también es útil para resolver ecuaciones diferenciales fraccionales. La transformada integral de una función $v(x)$ es otra función $u(x)$ dada por $u(x) = \int_a^b K(x,t)v(t)dt$, donde (a,b) es un intervalo conveniente, y $K(x,y)$ es llamado el núcleo o kernel de la transformada integral. Existen gran variedad de núcleos apropiados para ecuaciones diferenciales específicas y en física se usan principalmente las transformadas de Fourier y de Laplace [18]. La transformada de Laplace se define mediante la ecuación:

$$\tilde{g}(s) = \mathcal{L}[g(t)] \equiv \int_0^\infty e^{-st} g(t) dt, \tag{31}$$

la cual es usada en la solución de ecuaciones diferenciales fraccionales de una manera similar a como se usa en el cálculo ordinario [10]. La respectiva transformada de Laplace inversa es $f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{st} F(s) ds$, donde la integración se realiza a lo largo de la línea vertical $Re(s) = \gamma$ en el plano complejo tal que γ es mayor que la parte real de todas las singularidades de $F(s)$ [8]. Es de utilidad recordar la transformada de Laplace de la derivada de orden entero n de una función $f(t)$:

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0), \tag{32}$$

que puede deducirse a partir de la definición (31) integrando por partes bajo la suposición que dichas integrales existen.

También es común en algunos campos la aparición de una operación llamada convolución. La convolución de dos funciones $f(t)$ y $g(t)$ está definida por $f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) g(\tau) d\tau$, la cual si $f(t)$ y $g(t)$ son iguales a cero para $t < 0$ se reduce a $f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau$. Se cumple que la transformada de Laplace de una convolución es [8]:

$$\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = F(s) G(s), \tag{33}$$

donde $F(s)$ y $G(s)$ son las transformadas de Laplace de $f(t)$ y $g(t)$, respectivamente. Además, es necesario considerar la transformada de Laplace de la función $f(t) = t^\nu$ que aparece con frecuencia [8]:

$$\mathcal{L}(t^\nu) = \int_0^\infty e^{-st} t^\nu dt = \frac{1}{s^{\nu+1}} \int_0^\infty e^{-t'} t'^\nu dt' = \frac{\Gamma(\nu+1)}{s^{\nu+1}}, \tag{34}$$

donde se ha hecho la sustitución $t' = st$ y se ha utilizado la ecuación (7). La función (34) se usa a menudo para encontrar algunas transformadas de Laplace.

5.1. *Transformada de Laplace de la función de Mittag-Leffler*

La función exponencial se suele expresar como una serie de Taylor $e^z = \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{n!}$ y como una generalización de este resultado surge la función de Mittag-Leffler $E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}$, de este modo también se calcula la transformada de Laplace de la función de Mittag-Leffler utilizando la transformada de Laplace de la función exponencial. Para tal propósito se parte de la integral $\int_0^\infty e^{-t} e^{\pm zt} dt = \frac{1}{1 \mp z}$ $(|z| < 1)$ que al derivar k veces respecto a z se obtiene $\int_0^\infty e^{-t} t^k e^{\pm zt} dt = \frac{ak!}{(1 \mp z)^{k+1}}$ $(|z| < 1)$, siendo $a = 1$ para $-z$ y $a = (-1)^k$ para $+z$. Lo que permite establecer, con las condiciones adecuadas, que $\int_0^\infty e^{-st} t^k e^{\pm at} dt = \frac{k!}{(s \mp a)^{k+1}}$ $(Re(s) > |a|)$ [8]. Bajo este formalismo se obtiene la transformada de Laplace de la función de Mittag-Leffler con peso $t^{\beta-1}$ [8,17]:

$$\mathcal{L}[t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(-\rho t^\alpha)] = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha + \rho}, \;\; Re(s) > |\rho|^{1/\alpha}, \;\; \rho > 0, \tag{35}$$

y la transformada de Laplace de la derivada k-ésima de la función de Mittag-Leffler con peso $t^{\alpha k + \beta - 1}$ [8,17]:

$$\mathcal{L}[t^{\alpha k + \beta - 1} E_{\alpha,\beta}^{(k)}(\pm \rho t^\alpha)] = \frac{k! s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha \mp \rho}, \;\; Re(s) > |\rho|^{1/\alpha}, \;\; \rho > 0, \tag{36}$$

donde $E_{\alpha,\beta}^{(k)}(z) = \frac{d^k}{dz^k} E_{\alpha,\beta}(z)$. Así también se demuestra la siguiente propiedad:

$$\mathcal{L}[t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(a t^\alpha)] = s^{-\beta} \sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma(\gamma+n)}{,} \Gamma(\gamma) \left(\frac{a}{s}\right)^n \tag{37}$$

con $\alpha, \beta > 0$ y $0 < \gamma \leq 1$. Se destacan las expresiones (35), (36) y (37) ya que son útiles a la hora de resolver ecuaciones diferenciales fraccionales.

5.2. *Transformada de Laplace de la derivada fraccional de Riemann-Liouville*

Al observar la ecuación (19) se puede concluir que para $a = 0$ dicha expresión se reduce a una convolución de las funciones $t^{\alpha-1}$ y $f(t)$ multiplicada por una constante, de tal manera que la transformada de Laplace de la integral fraccional de Riemann-Liouville por ser de la forma (33) se reduce a:

$$\mathcal{L}({}_aI_t^{\alpha} f(t)) = s^{-\alpha} F(s), \tag{38}$$

donde se tiene en cuenta la relación (34) y $F(s)$ es la transformada de Laplace de la función $f(t)$. Por otra parte, la ecuación (18) es la derivada n-ésima de una integral fraccional de orden $n - \alpha$, así que se puede utilizar la propiedad (32) para aplicarla en la ecuación (18):

$$\mathcal{L}[{}_0D_t^{\alpha} f(t)] = s^n \mathcal{L}[{}_0D_t^{-(n-\alpha)} f(t)] - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}} {}_0D_t^{-(n-\alpha)} f(t)|_{t=0}, \tag{39}$$

por tanto, de acuerdo a las propiedades (23) y (38) la transformada de Laplace de la derivada fraccional de Riemann-Liouville de orden $\alpha > 0$ con $a = 0$ es [8]:

$$\mathcal{L}[{}_0D_t^{\alpha} f(t)] = s^{\alpha} F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k [{}_0D_t^{\alpha-k-1} f(t)]_{t=0}, \ \ n - 1 \leq \alpha < n. \tag{40}$$

La aplicabilidad de la ecuación (40) se ve reducida por la ausencia de interpretación física para los valores de la derivada fraccional en el límite inferior $t = 0$. Por otra parte, si se considera la derivada fraccional de una constante c mediante la definición (18):

$${}_aD_t^{\alpha} c = \frac{-c}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \frac{(t-\tau)^{n-\alpha}}{n-\alpha} = \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)} (t-a)^{-\alpha}, \tag{41}$$

no es cero como en el caso de derivadas de orden entero, lo cual se combina con el resultado (40) generando dificultad en la comprensión de las posibles aplicaciones.

5.3. *Transformada de Laplace de la derivada fraccional de Caputo*

Por su parte la ecuación (5) para $a = 0$ es una convolución de las funciones $\frac{t^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)}$ y $f^{(n)}(t)$, así que la trasformada de Laplace de la derivada fraccional de Caputo con $a = 0$ es [8]:

$$\mathcal{L}[{}_0^CD_t^{\alpha} f(t)] = \frac{\mathcal{L}[f^{(n)}(t)]}{s^{n-\alpha}} = s^{\alpha} F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0), \ \ n - 1 < \alpha < n, \tag{42}$$

donde se han usado las propiedades (32) y (34). Puesto que la fórmula (42) está relacionada directamente con la función $f(t)$ y sus derivadas evaluadas en el límite inferior $t = 0$, la derivada de Caputo resulta en un formalismo más apropiado para definir problemas con condiciones de frontera no nulas.

De este modo, en este artículo se discute el concepto de derivada fraccional y sus propiedades. Principalmente se analizan en detalle las derivadas fraccionales de Riemann-Liouville y de Caputo. Además, se establece la transformada de Laplace de ciertas funciones por su utilidad en la solución de algunas ecuaciones diferenciales fraccionales. Todo este formalismo permite tener una perspectiva acerca del cálculo fraccional, la cual se cree pertinente ya que el cálculo fraccional tiene aplicaciones en diversos campos.

6. Agradecimientos

Se agradece al Sistema de Investigaciones de la Universidad de Nariño por la financiación del proyecto de investigación MÉTODOS VARIACIONALES Y DE CÁLCULO FRACCIONAL EN TEORÍA DE SOLITONES, en el marco del cual se elaboró éste artículo.

Referencias

[1] Keith B Oldham and Jerome Spanier. *The fractional calculus*, volume 17. Dover, New York, NY, USA, 1st edition, 1974.

[2] José Manuel Sánchez Muñoz. Génesis y desarrollo del cálculo fraccional. *Pensamiento Matemático*, 33(1):4, Octubre 2011.

[3] SA David, JL Linares, and EMJA Pallone. Fractional order calculus: historical apologia, basic concepts and some applications. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 33(4):4302–4302, Octover/2010-November/2011 2011.

[4] H Schiessel, R Metzler, A Blumen, and T Nonnenmacher. Generalized viscoelastic models: their fractional equations with solutions. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 28(23):6567–6584, July 1995.

[5] Boris Cristhian Romero Suárez et al. *Método de Lattice Boltzmann para difusión anómala en medios porosos*. PhD thesis, Universidad Nacional de Colombia, 2011.

[6] S Gabriel, RW Lau, and Camelia Gabriel. The dielectric properties of biological tissues: III. parametric models for the dielectric spectrum of tissues. *Physics in medicine and biology*, 41(11):2271, April 1996.

[7] CZ Zhao, M Werner, S Taylor, PR Chalker, AC Jones, Chun Zhao, et al. Dielectric relaxation of la-doped zirconia caused by annealing ambient. *Nanoscale Research Letters*, 6(1):1–6, 2010.

[8] Igor Podlubny. *Generalized viscoelastic models: their fractional equations with solutions*, volume 198. Academic press, New York, NY, USA, 1998.

[9] Kai Diethelm. *The analysis of fractional differential equations: an application-oriented exposition using differential operators of Caputo type*, volume 2004. Springer Verlag, New York, NY, USA, 2010.

[10] George B Arfken, Hans J Weber, and Frank E Harris. *Mathematical methods for physicists*. Academic press, 5th edition, 2001.

[11] Kenneth S Miller and Bertram Ross. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. *John Wiley & Sons*, 1993.

[12] E Capelas de Oliveira, Francesco Mainardi, and Jayme Vaz Jr. Models based on Mittag-Leffler functions for anomalous relaxation in dielectrics. *The European Physical Journal Special Topics*, 193(1):161–171, June-November 2011.

[13] Yoav Sagi, Miri Brook, Ido Almog, and Nir Davidson. Observation of anomalous diffusion and fractional self-similarity in one dimension. *Physical Review Letters*, 108(9):093002, November-March 2012.

[14] Nick Laskin. Fractional Schrödinger equation. *Physical Review E*, 66(5):056108, June-November 2002.

[15] Matthew Frank Causley. *Asymptotic and numerical analysis of time-dependent wave propagation in dispersive dielectric media that exhibit fractional relaxation*. PhD thesis, The State University of New Jersey, 2011.

[16] Martha Elena Londoño López et al. *Principio fenomenológico del comportamiento dieléctrico de un hidrogel de alcohol polivinílico-Phenomenological principle dielectrical behaviour of poly (vinyl alcohol) hidrogel*. PhD thesis, Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín, 2011.

[17] AM Mathai and Hans J Haubold. *Special functions for applied scientists*. Springer, New York, NY, USA, 2008.

[18] Sadri Hassani. *Mathematical Methods: For Students of Physics and Related Fields*. Springer, New York, NY, USA, 2nd edition, 2009.

[19] M Di Paola and A Pirrotta. Fractional calculus application to visco-elastic solids. *Meccanica dei Materiali e delle Strutture*, 1(2):52–62, -.

[20] V Uchaikin, R Sibatov, and D Uchaikin. Memory regeneration phenomenon in dielectrics: the fractional derivative approach. *Physica Scripta*, 2009(T136):014002, January-October 2009.

[21] Teresa Pierantozzi. *Estudio de generealizaciones fraccionarias de las ecuaciones estándar de difusión y de ondas*. Universidad Complutense de Madrid, Servicio de Publicaciones, 2007.