REVISTA DE CIENCIAS, Vol. 4, No. 1 de 2013.

Formulación de Hamilton-Jacobi aplicado al estudio de campos de Dirac

Hamilton-Jacobi formulation applied to the study of Dirac fields

Luis Alfredo Bravo

Departamento de Física, Universidad de Nariño
Ciudad Universitaria Torobajo - Calle 18 Kra 50
San Juan de Pasto, Nariño, Colombia

Aceptado Mayo; Publicado en línea Junio.

ISSN 2256-3830.

Resumen

En este trabajo se estudiará la formulación de Hamilton-Jacobi mediante el método de Lagrangianos equivalentes de Carathéodory aplicado a los campos de Dirac. Se estudia en primer lugar la formulación Lagrangiana y canónica para una teoría descrita por campos de Grassmann. Se analizará por medio del formalismo de Hamilton-Jacobi la estructura clásica de los campos fermionicos. Se deducirán las ecuaciones de movimiento como ecuaciones diferenciales totales y se analizará las condiciones de integrabilidad para estas.

***Palabras Claves*:** Formulación de Hamilton-Jacobi, campos de Dirac, Lagrangianos equivalentes de Carathéodory, álgebra de Grassmann.

Abstract

In this work we are going to study the Hamilton-Jacobi formulation using the Lagrangian method Carathéodory equivalent applied to the Dirac fields. We study first Lagrangian and canonical formulation for a theory described by Grassmann fields. We are going to analyze by means of the Hamilton-Jacobi formalism the classical structure of fermion fields. We are going to deduct the equations of motion as total differential equations and analyze the integrability conditions for these.

***Keywords*:** Hamilton-Jacobi formulation, Dirac's field, Carathéodory's Lagrangian Equivalents, Grassmann's algebra.

1. Introduction

La formulación de Hamilton-Jacobi se puede deducir aplicando un método alternativo en el cual no es necesario tener en cuenta la formulación de Hamilton y las transformaciones canónicas de Jacobi [1], este método relaciona el cálculo variacional con las ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales mediante un análisis geométrico estudiado por Carathéodory al que él llama "Cuadro completo" [2].

Carathédory muestra como la ecuación de Hamilton-Jacobi se deriva del principio de Hamilton empleando el concepto de Lagrangianos equivalentes:

$$\bar{L} = L - \frac{dS}{dt} \tag{1}$$

Estos Lagrangianos son equivalentes, debido a que sus respectivas acciones tienen extremos simultaneos. La condición suficiente para que $\bar{A}$ y consecuentemente A sean estacionarias es encontrar una función $S(q,t)$, que cumpla las siguientes condiciones:

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q^i} \tag{2}$$

$$H\left(q, p_i, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \tag{3}$$

La última expresión es la conocida ecuación diferencial parcial no lineal de Hamilton-Jacobi, se utiliza el método de las características o método de Cauchy para resolver esta ecuación diferencial [3]. Se ha mostrado en diferentes trabajos [2,4,5], como este método puede extenderse a sistemas que son descritos por Lagrangianos singulares, en este caso la formulación de Hamilton-Jacobi agrega a los vínculos ϕ_s como ecuaciones diferenciales parciales y junto con la ecuación de Hamilton-Jacobi forman un conjunto de ecuaciones al cual se le denomina Ecuaciones Diferenciales Parciales de Hamilton-Jacobi (EDPHJ):

$$\phi_0 \equiv p_0 + H_0(q^i, p_a) = 0 \tag{4}$$

$$\phi_s \equiv p_s + H_s(q^i, p_a) = 0 \tag{5}$$

Se calculan las ecuaciones características asociadas a este conjunto y finalmente se analiza sus condiciones de integrabilidad mediante el diferencial fundamental:

$$dF = \{F, \phi_\alpha\} dq^\alpha \tag{6}$$

Existen sistemas físicos en mecánica clásica y en teoría de campos que son descritos por Lagrangianos singulares [6,7], en los que es necesario introducir un nuevo tipo de variables para describirlos clásicamente, estas variables son conocidas como variables de Grassmann [8,6]; un ejemplo de estos sistemas es la descripción clásica de partículas fermionicas, tal sistema físico se describe utilizando los conocidos campos de Dirac. Estas nuevas variables tienen la propiedad de ser anticonmutativas lo cual genera modificaciones en el cálculo diferencial e integral y por lo tanto modifica la estructura de la mecánica. Se adaptará el planteamiento hecho por por Caratheodory para estudiar este tipo de sistemas, calculando las ecuaciones características del conjunto de EDPHJ y analizar las condiciones de integrabilidad permitiendo la obtención de las ecuaciones de movimiento.

2. Formalismo Lagrangiano

La densidad Lagrangiana [6] que describe el campo de Dirac (fermionico) sin interacción es:

$$\mathscr{L} = \frac{i}{2}\left[\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\right] - m\bar{\psi}\psi \tag{7}$$

Donde ψ y $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger\gamma^0$ son los campos fundamentales de Dirac. γ^μ, con $\mu = 0, 1, 2, 3$, son las matrices de Dirac, la representación matricial que se utilizará en este trabajo es:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_x \\ -\sigma_x & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_y \\ -\sigma_y & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_z \\ -\sigma_z & 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Donde $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ son las matrices de Pauli. Entonces, la densidad Lagrangiana en términos de las componentes de los campos: ψ_a , $\bar{\psi}_a$ y de las matrices de Dirac γ^μ : γ^μ_{ab}, se expresa explicitamente así:

$$\mathscr{L} = \frac{i}{2}\left[\bar{\psi}_a\gamma^\mu_{ab}\partial_\mu\psi_b - \partial_\mu\bar{\psi}_a\gamma^\mu_{ab}\psi_b\right] - m\bar{\psi}_a\psi_a \tag{9}$$

Aqui se debe entender que se suma sobre índices matriciales repetidos. Clásicamente los campos fundamentales de Dirac ψ y $\bar{\psi}$ son representados por campos Grassmannianos, donde sus componentes ψ_a y $\bar{\psi}_b$ con $a, b = 1, 2, 3, 4$, deben satisfacer las siguientes relaciones de anticonmutación:

$$\psi_a \psi_b + \psi_b \psi_a = 0 \tag{10a}$$

$$\psi_a \bar{\psi}_b + \bar{\psi}_b \psi_a = 0 \tag{10b}$$

$$\bar{\psi}_a \bar{\psi}_b + \bar{\psi}_b \bar{\psi}_a = 0 \tag{10c}$$

Estas relaciones implican que las variables del álgebra de Grassmann sean nilpotentes, es decir que la potencia de cualquier variable igual o mayor a dos, son idénticamente nulas, además, las variables de Grassmann A, B con número de paridad n_A y n_B cumplen las siguientes propiedades:

- $A\,B = (-1)^{n_A n_B} B\,A; \qquad n_{AB} = n_A + n_B$
- $\{A, B\} \implies n_{\{A,B\}} = n_A + n_B$
- $\{A, B\} = -(-1)^{n_A n_B}\{B, A\}$
- $\{A, BC\} = (-1)^{n_A n_B} B\{A, C\} + \{A, B\}C$
- $\{AB, C\} = (-1)^{n_B n_C}\{A, C\}B + A\{B, C\}$

En álgebra conmutativa las operaciones de derivación e integración son definidas por medio de límites y poseen una interpretación geométrica [9], mientras que en un álgebra de Grassmann estas operaciones no son definidas con límites ni tienen una interpretación geométrica, son definidas como operaciones de identidad [1]. Las reglas para calcular la derivada de un generador del álgebra respecto a otro generador estan definidas por:

$$\frac{\partial \psi_\beta}{\partial \psi_\alpha} = \delta_{\beta\alpha} \tag{11}$$

$$\frac{\partial (1)}{\partial \psi_\alpha} = 0 \tag{12}$$

Aunque estas reglas son semejantes a las del álgebra usual, se debe tener en cuenta que la variable a ser derivada debe estar al lado del operador diferencial ya sea por la derecha o por la izquierda, esto permite definir dos tipos de derivadas por la izquierda (L) y por la derecha (R). Consideremos como ejemplo la derivada de la función $\Omega = \psi_1\psi_2\psi_3\psi_4$

- Derivada derecha:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \psi_3}|_R = \psi_1\psi_2\psi_3\psi_4 \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \psi_3} = -\psi_1\psi_2\psi_4 \frac{\partial \psi_3}{\partial \psi_3}$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \psi_3}|_R = -\psi_1\psi_2\psi_4 \tag{13}$$

- Derivada izquierda:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \psi_3}|_L = \frac{\partial}{\partial \psi_3}\left(\psi_1\psi_2\psi_3\psi_4\right) = -\frac{\partial}{\partial \psi_3}\left(\psi_1\psi_3\psi_2\psi_4\right) = \frac{\partial \psi_3}{\partial \psi_3}\psi_1\psi_2\psi_4 = \psi_1\psi_2\psi_4$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \psi_3}|_L = \psi_1\psi_2\psi_4 \tag{14}$$

Extendiendo el principio de Hamilton, a los campos fermionicos es posible demostrar que ψ_a y $\bar{\psi}_a$ deben satisfacer las siguientes ecuaciones de Euler-Lagrange [6]:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \psi_a} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\partial_\mu \psi_a\right)}\right) = 0 \tag{15}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \bar{\psi}_a} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\partial_\mu \bar{\psi}_a\right)}\right) = 0 \tag{16}$$

Donde las derivadas calculadas respecto a los campos fermionicos se entenderán de ahora en adelante como derivadas izquierdas. La ecuación de campo asociada a ψ, (15), determina la ecuación de Dirac para el campo $\bar{\psi}$, expresada en unidades naturales $\hbar = c = 1$,[10]

$$\left[\bar{\psi}\left(i\gamma^{\mu}\overleftarrow{\partial_{\mu}} + m\right)\right]_a = 0 \tag{17}$$

o en forma compacta:

$$\bar{\psi}\left(i\gamma^{\mu}\overleftarrow{\partial_{\mu}} + m\right) = 0 \tag{18}$$

De igual manera, la ecuación de campo asociada a $\bar{\psi}$, (16), implica que:

$$\left[\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m\right)\psi\right]_a = 0 \tag{19}$$

o en forma compacta:

$$\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m\right)\psi = 0 \tag{20}$$

3. Formalismo canónico

Para realizar un estudio canónico del campo fermionico sin interacción, se definirá primero los momentos canónicos conjugandos a los campos de Dirac fundamentales de la siguiente manera:

$$\pi_a \equiv \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\bar{\psi}}_a} \tag{21}$$

$$\bar{\pi}_a \equiv \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\psi}_a} \tag{22}$$

Donde π_a se ha definido como el momento canónico asociado a $\bar{\psi}_a$ y $\bar{\pi}_a$ el momento canónico asociado a ψ_a. Al calcular las respectivas derivadas izquierdas se determina:

$$\pi_a = -\frac{i}{2}\gamma^0_{ab}\psi_b \tag{23}$$

$$\bar{\pi}_a = -\frac{i}{2}\bar{\psi}_b\gamma^0_{ba} \tag{24}$$

Las expresiones (23) y (24) relacionan los momentos canónicos con los campos, por lo tanto, son vínculos primarios y se los definirá de la siguiente manera:

$$\phi_a \equiv \pi_a + \frac{i}{2}\gamma^0_{ab}\psi_b = 0 \tag{25}$$

$$\bar{\phi}_a \equiv \bar{\pi}_a + \frac{i}{2}\bar{\psi}_b\gamma^0_{ba} = 0 \tag{26}$$

Como el índice a toma los valores $1, 2, 3, 4$, se tiene en principio 8 vínculos primarios. El conjunto de variables $(\psi, \bar{\psi}, \bar{\pi}, \pi)$ definen el espacio de fase, en el que la densidad Hamiltoniana canónica bajo la definición de derivada izquierda, se define así:

$$\mathscr{H} \equiv \dot{\psi}_a\bar{\pi}_a + \dot{\bar{\psi}}_a\pi_a - \mathscr{L} \tag{27}$$

Utilizando (23) y (24) se obtiene:

$$\mathscr{H} = \frac{i}{2}\left[\partial_k\bar{\psi}_a\gamma^k_{ab}\psi_b - \bar{\psi}_a\gamma^k_{ab}\partial_k\psi_b\right] + m\bar{\psi}_a\psi_a \tag{28}$$

Ahora como el espacio de fase $(\psi_a, \bar{\psi}_a, \pi_a, \bar{\pi}_a)$ son campos fermionicos, los paréntesis de Poisson toman el nombre de paréntesis de Bose-Fermi, y se definen formalmente en términos de derivadas funcionales izquierdas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\{F_1(x), F_2(y)\}_{BF} \equiv -\int d^3z[&\frac{\delta F_1(x)}{\delta\psi_a(z)}\frac{\delta F_2(y)}{\delta\bar{\pi}_a(z)} + \frac{\delta F_1(x)}{\delta\bar{\pi}_a(z)}\frac{\delta F_2(y)}{\delta\psi_a(z)} + \frac{\delta F_1(x)}{\delta\bar{\psi}_a(z)}\frac{\delta F_2(y)}{\delta\pi_a(z)} \\ &+\frac{\delta F_1(x)}{\delta\pi_a(z)}\frac{\delta F_2(y)}{\delta\bar{\psi}_a(z)}]\end{aligned} \tag{29}$$

De la expresión (29) y del hecho que las variables en el espacio de fase son independientes, se deduce que los paréntesis de Bose-Fermi fundamentales de la teoría diferentes de cero son:

$$\{\psi_a(x), \bar{\pi}_b(y)\}_{BF} = -\int d^3z \left[\frac{\delta\psi_a(x)}{\delta\psi_c(z)}\frac{\delta\bar{\pi}_b(y)}{\delta\bar{\pi}_c(z)}\right] = -\int d^3z\delta_{ac}\delta^3(x-z)\delta_{bc}\delta^3(y-z)$$

Por lo tanto:

$$\{\psi_a(x), \bar{\pi}_b(y)\}_{BF} = -\delta_{ab}\delta^3(x-y) \tag{30}$$

$$\{\bar{\psi}_a(x), \pi_b(y)\}_{BF} = -\int d^3z \left[\frac{\delta\bar{\psi}_a(x)}{\delta\bar{\psi}_c(z)}\frac{\delta\pi_b(y)}{\delta\pi_c(z)}\right] = -\int d^3z\delta_{ac}\delta^3(x-z)\delta_{bc}\delta^3(y-z)$$

Finalmente se determina:

$$\{\bar{\psi}_a(x), \pi_b(y)\}_{BF} = -\delta_{ab}\delta^3(x-y) \tag{31}$$

4. Formulación de Hamilton-Jacobi

La ecuación de Hamilton-Jacobi (HJ) asociada a la densidad hamiltoniana (28) es:

$$\phi^t \equiv p^t + \mathscr{H} = 0 \tag{32}$$

Donde p^t se ha definido como la densidad de momento asociado a t, los vínculos primarios (25) y (26) son ecuaciones diferenciales parciales (EDP) en el formalismo de HJ, con esto, el conjunto de ecuaciones diferenciales parciales de Hamilton Jacobi (EDPHJ) [5], son:

$$\phi^t \equiv p^t + \mathscr{H} = 0 \tag{33a}$$

$$\phi_a \equiv \pi_a + \frac{i}{2}\gamma^0_{ab}\psi_b = 0 \tag{33b}$$

$$\bar{\phi}_a \equiv \bar{\pi}_a + \frac{i}{2}\bar{\psi}_b\gamma^0_{ba} = 0 \tag{33c}$$

La ecuación diferencial (33a) contiene la densidad hamiltoniana $\mathscr{H}$ que está relacionada con la dinámica del sistema, además, p^t se ha definido como la densidad de momento canónico conjugado a la variable $x^0 = t$, asi que, se asociara a t como el parámetro independiente correspondiente a la EDPHJ (33a). Las EDPHJ (33b), (33c) surgen de la definición de los momentos $(\pi_a, \bar{\pi}_a)$ conjugados a las variables $(\bar{\psi}_a, \psi_a)$, por lo tanto, se relacionará a $(\bar{\psi}, \psi)$ como los parámetros independientes a las EDPHJ (33b) y (33c) respectivamente. De esta manera, la evolución dinámica en el espacio de fase $\left(\psi, \bar{\psi}, \pi, \bar{\pi}\right)$ de un campo $F\left(\psi, \bar{\psi}, \pi, \bar{\pi}\right)$ asociada al sistema, está dada por el diferencial:

$$dF(x) = \int d^3y \left[\{F(x), \phi^t(y)\}dt + \{F(x), \phi_a(y)\}d\bar{\psi}_a(y) + \{F(x), \bar{\phi}_a(y)\}d\psi_a(y)\right] \tag{34}$$

Para este sistema los vínculos son campos, por lo tanto, se tiene un vínculo por cada punto del espacio, por esta razón la integral en el diferencial fundamental representa la suma de todos estos vínculos en el espacio. Definiendo $A \equiv \{F(x), \phi_a(y)\}$ y $B \equiv d\bar{\psi}_a(y)$, donde la paridad de A es $n_A = n_F + n_{\phi_a}$ y la paridad de B es $n_B = n_{\psi_a}$. Ahora usando la siguiente propiedad de variables Grassmannianas:

$$AB = (-1)^{n_A n_B} BA \tag{35}$$

El segundo término de la expresión anterior se puede reescribir así:

$$\{F(x), \phi_a(y)\}d\bar{\psi}_a(y) = (-1)^{(n_F + n_{\phi_a})n_{\psi_a}} d\bar{\psi}_a(y)\{F(x), \phi_a(y)\} \tag{36}$$

El número de paridad de ϕ_a es $n_{\phi_a} = 1$, y el de ψ_a es $n_{\psi_a} = 1$, además para este sistema en particular F representa variables de paridad impar, por lo tanto $n_F = 1$. Sustituyendo los anteriores valores de paridad en (36), se determina que:

$$\{F(x), \phi_a(y)\}d\bar{\psi}_a(y) = d\bar{\psi}_a(y)\{F(x), \phi_a(y)\} \tag{37}$$

Con el resultado anterior el diferencial (34), se escribe de la siguiente manera:

$$dF(x) = \int d^3y \left[\{F(x), \phi^t(y)\}dt + d\bar{\psi}_a(y)\{F(x), \phi_a(y)\} + \{F(x), \bar{\phi}_a(y)\}d\psi_a(y)\right] \tag{38}$$

Se analizará las condiciones de integrabilidad del sistema de EDPHJ para garantizar que este conjunto es linealmente independiente. La integrabilidad de ϕ_a, implica que se deba cumplir:

$$d\phi_a(x) = 0 \tag{39}$$

Después de realizar un laborioso cálculo la integrabilidad para ϕ_a usando (38), se puede escribir de la siguiente manera:

$$d\psi_a(x) = \left[\gamma^0_{ab}\gamma^k_{bc}\partial^x_k\psi_c(x) + im\gamma^0_{ab}\psi_b(x)\right] dt \tag{40}$$

De la misma manera, la integrabilidad de $\bar{\phi}_a$, exige que:

$$d\bar{\phi}_a(x) = 0 \tag{41}$$

De esta condición se puede determinar:

$$d\bar{\psi}_a(x) = \left[\partial^x_k\bar{\psi}_c(x)\gamma^k_{cb}\gamma^0_{ba} - im\bar{\psi}_b(x)\gamma^0_{ba}\right] dt \tag{42}$$

Las condiciones de integrabilidad (39) y (41) permiten llegar a relaciones entre los diferenciales de las variables independientes como lo muestran (40) y (42), lo que indica que las EDPHJ no son linealmente independientes [5].

Las relaciones (40) y (42) permiten escribir el diferencial (38) de una variable dinámica $F(x)$ del sistema de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} dF(x) &= \int d^3y\{F(x),\phi^t(y)\}dt + \int d^3y\left[\partial^y_k\bar{\psi}_c(y)\gamma^k_{cb}\gamma^0_{ba} - im\bar{\psi}_b(y)\gamma^0_{ba}\right] dt\{F(x),\phi_a(y)\} \\ &\quad + \int d^3y\{F(x),\bar{\phi}_a(y)\}\left[\gamma^0_{ab}\gamma^k_{bc}\partial^y_k\psi_c(y) + im\gamma^0_{ab}\psi_b(y)\right] dt \\ dF(x) &= \int d^3y[\{F(x),\phi^t(y)\} + \left(\partial^y_k\bar{\psi}_c(y)\gamma^k_{cb}\gamma^0_{ba} - im\bar{\psi}_b(y)\gamma^0_{ba}\right)\{F(x),\phi_a(y)\} \\ &\quad + \{F(x),\bar{\phi}_a(y)\}\left(\gamma^0_{ab}\gamma^k_{bc}\partial^y_k\psi_c(y) + im\gamma^0_{ab}\psi_b(y)\right)]dt \end{aligned} \tag{43}$$

5. Paréntesis Generalizados

La expresión entre corchetes cuadrados en el diferencial anterior, permiten definir una forma particular de una estructura mas general conocida como los "paréntesis Generalizados"(PG) [4]:

$$\begin{aligned} \{F(x),\phi^t(y)\}^* \equiv \{F(x),\phi^t(y)\} &+ \left(\partial^y_k\bar{\psi}_c(y)\gamma^k_{cb}\gamma^0_{ba} - im\bar{\psi}_b(y)\gamma^0_{ba}\right)\{F(x),\phi_a(y)\} \\ &+\{F(x),\bar{\phi}_a(y)\}\left(\gamma^0_{ab}\gamma^k_{bc}\partial^y_k\psi_c(y) + im\gamma^0_{ab}\psi_b(y)\right) \end{aligned} \tag{44}$$

Los paréntesis generalizados entre dos variables dinámicas $F(x)$ y $G(y)$ se definen formalmente de la siguiente manera:

$$\{F(x),G(y)\}^* = \{F(x),G(y)\} - \int\int d^3u d^3v \left\{F(x),\Sigma^i_a(u)\right\}\left(C^{ij}_{ab}(u,v)\right)^{-1}\{\Sigma^j_b(v),G(y)\} \tag{45}$$

Donde $i,j = 1,2$; además se ha definido:

$$\Sigma^1_a \equiv \phi_a = \pi_a + \frac{i}{2}\gamma^0_{ab}\psi_b = 0$$

y

$$\Sigma^2_a \equiv \bar{\phi}_a = \bar{\pi}_a + \frac{i}{2}\bar{\psi}_b\gamma^0_{ba} = 0$$

$\left(C^{ij}_{ab}(u,v)\right)^{-1}$ es la inversa de la matriz $C^{ij}_{ab}(u,v)$ cuyos elementos son los paréntesis de Bose-Fermi entre las EDPHJ Σ^i_a y Σ^j_b.

$$C^{ij}_{ab}(u,v) = \begin{pmatrix} \{\phi_a(u),\phi_b(v)\} & \{\phi_a(u),\bar{\phi}_b(v)\} \\ \{\bar{\phi}_a(u),\phi_b(v)\} & \{\bar{\phi}_a(u),\bar{\phi}_b(v)\} \end{pmatrix} \tag{46}$$

Calculando los paréntesis de Bose-Fermi se determina que la represenación de la matriz $C^{ij}_{ab}(u,v)$ tiene la siguiente forma:

$$C^{ij}_{ab}(u,v) = -i \begin{pmatrix} 0 & \gamma^0_{ab} \\ \gamma^0_{ba} & 0 \end{pmatrix} \delta^3(u-v) \tag{47}$$

La inversa de esta matriz es [6]:

$$\left(C^{ij}_{ab}(u,v)\right)^{-1} = i \begin{pmatrix} 0 & \gamma^0_{ba} \\ \gamma^0_{ab} & 0 \end{pmatrix} \delta^3(u-v) \tag{48}$$

Con esta representación de la matriz inversa el paréntesis generalizado (45) entre dos variables dinámicas $F(x)$ y $G(y)$, esta determinado por la siguiente expresión:

$$\{F(x), G(y)\}^* = \{F(x), G(y)\} - i\gamma^0_{ba} \int d^3v \, \{F(x), \phi_a(v)\} \left\{\bar{\phi}_b(v), G(y)\right\} \tag{49}$$

$$-i\gamma^0_{ab} \int d^3v \left\{F(x), \bar{\phi}_a(v)\right\} \{\phi_b(v), G(y)\}$$

Utilizando la propiedad (35) y recordando que se tiene los siguientes números de paridad $n_{\phi_a} = 1$, $n_{\bar{\phi}_b} = 1$, F es $n_F = 1$; el paréntesis generalizado se puede escribir así:

$$\{F(x), G(y)\}^* = \{F(x), G(y)\} - i\gamma^0_{ba} \int d^3v \left\{\bar{\phi}_b(v), G(y)\right\} \{F(x), \phi_a(v)\} \tag{50}$$

$$-i\gamma^0_{ab} \int d^3v \left\{F(x), \bar{\phi}_a(v)\right\} \{\phi_b(v), G(y)\}$$

Si se considera $G(y) \equiv \phi^t(y)$ en (50) se determina:

$$\{F(x), \phi^t(y)\}^* = \{F(x), \phi^t(y)\} + \left(\partial^y_k \bar{\psi}_c(y)\gamma^k_{cb}\gamma^0_{ba} - im\bar{\psi}_b(y)\gamma^0_{ba}\right) \{F(x), \phi_a(y)\} \tag{51}$$

$$+\{F(x), \bar{\phi_a}(y)\} \left(\gamma^0_{ab}\gamma^k_{bc}\partial^y_k \psi_c(y) + im\gamma^0_{ab}\psi_b(y)\right)$$

Resultado que concuerda correctamente con la relación (44). La definición de paréntesis generalizados permite reducir el número de parámetros independientes, ψ y $\bar{\psi}$, con esto la evolución de una variable dinámica $F(x)$ depende unicamente del parámetro independiente t, en términos de los paréntesis generalizados el diferencial fundamental está dado por:

$$dF(x) = \int \{F(x), \phi^t(y)\}^* d^3y \tag{52}$$

Se procedera a analizar nuevamente las condiciones de integrabilidad utilizando el diferencial (52). La integrabilidad de $\phi_a(x)$, exige que:

$$d\phi_a(x) = \int d^3y \{\phi_a(x), \phi^t(y)\}^* dt = 0 \tag{53}$$

Utilizando el siguiente resultado:

$$\{\phi_a(x), \phi^t(y)\}^* = \frac{i}{2}\gamma^k_{ab}\psi_b(y)\partial^x_k \delta^3(x-y) - \frac{i}{2}\gamma^k_{ab}\partial^y_k \psi_b(y)\delta^3(x-y) \tag{54}$$

Se determina que:

$$d\phi_a(x) = 0 \tag{55}$$

De manera similar, la integrabilidad para $\bar{\phi}_a(x)$, implica que se cumpla:

$$d\bar{\phi}_a(x) = \int d^3y \{\bar{\phi}_a(x), \phi^t(y)\}^* dt = 0 \tag{56}$$

Usando el siguiente PG:

$$\{\bar{\phi}_a(x), \phi^t(y)\}^* = -\frac{i}{2}\partial^y_k \bar{\psi}_c(y)\gamma^k_{ca}\delta^3(x-y) + \frac{i}{2}\bar{\psi}_c(y)\gamma^k_{ca}\partial^x_k \delta^3(x-y) \tag{57}$$

En la integrabilidad de $\bar{\phi}$, se obtiene que:

$$d\bar{\phi}_a(x) = 0 \tag{58}$$

Los resultados (55) y (58) establecen que las condiciones de integrabilidad son identicamente satisfechas, por lo tanto, las EDPHJ estan involución con los paréntesis Generalizados. Entonces, las respectivas ecuaciones características y el conjunto de EDPHJ son integrables.

En un principio se asumio que los campos $(\psi_a, \bar{\psi}_a, \pi_a, \bar{\pi}_a)$ eran independientes, pero debido a la presencia de las relaciones (21) y (22) y del hecho de haber considerado a $(\psi, \bar{\psi})$ como los parámetros independientes asociados a las EDPHJ; se definirá a los campos $(\pi, \bar{\pi})$ como los grados de libertad de la teoría. De la definición de los PG, se procederá a deducir estas cantidades entre los campos independientes del problema, para ello se inicia calculando el PG de $\pi_a(x)$ con cualquier variable dinámica $G(y)$, el cual esta dado por:

$$\{\pi_a(x), G(y)\}^* = \{\pi_a(x), G(y)\} - i\gamma^0_{cb} \int d^3v \left\{\bar{\phi}_c(v), G(y)\right\} \left\{\pi_a(x), \phi_b(v)\right\} \tag{59}$$

$$-i\gamma^0_{bc} \int d^3v \left\{\pi_a(x), \bar{\phi}_b(v)\right\} \left\{\phi_c(v), G(y)\right\}$$

Después de realizar algunos cálculos se puede demostrar que el PG se puede reescribir así:

$$\{\pi_a(x), G(y)\}^* = \frac{1}{2}\{\pi_a(x), G(y)\} - \frac{i}{2}\gamma^0_{ac}\{\psi_c(x), G(y)\} \tag{60}$$

De aquí es posible demostrar que:

$$\{\pi_a(x), \bar{\pi}_b(y)\}^* = \frac{i}{4}\gamma^0_{ab}\delta^3(x-y) \tag{61a}$$

$$\{\pi_a(x), \pi_b(y)\}^* = 0 \tag{61b}$$

Con esto se determina que (61a) es el único PG no nulo de la teoría.

6. Ecuaciones Características

A continuación utilizando (52) se calcularán las ecuaciones características asociadas al conjunto de EDPHJ que corresponden a las ecuaciones de movimiento para las variables $(\pi_a, \bar{\pi}_a)$:

$$d\pi_a(x) = \int d^3y\{\pi_a(x), \phi^t(y)\}^* dt \tag{62}$$

$$d\bar{\pi}_a(x) = \int d^3y\{\bar{\pi}_a(x), \phi^t(y)\}^* dt \tag{63}$$

Se puede demostrar después de un laborioso cálculo que los PG anteriores tienen la siguiente forma:

$$\{\pi_a(x), \phi^t(y)\}^* = \frac{i}{2}\gamma^k_{ab}\partial^x_k\psi_b(y)\delta^3(x-y) - \frac{1}{2}m\psi_a(y)\delta^3(x-y) \tag{64a}$$

$$\{\bar{\pi}_a(x), \phi^t(y)\}^* = \frac{i}{2}\partial^x_k\bar{\psi}_c(y)\gamma^k_{ca}\delta^3(x-y) + \frac{1}{2}m\bar{\psi}_a(y)\delta^3(x-y) \tag{64b}$$

Usando (64a) en (62) se determina lo siguiente:

$$\begin{aligned} d\pi_a(x) &= \int d^3y \left[\frac{i}{2}\gamma^k_{ab}\partial^x_k\psi_b(y)\delta^3(x-y) - \frac{1}{2}m\psi_a(y)\delta^3(x-y)\right] dt \\ &= \left(\frac{i}{2}\gamma^k_{ab}\partial^x_k\psi_b(x) - \frac{1}{2}m\psi_a(x)\right) dt \\ \partial_0\pi_a(x) &= \frac{i}{2}\gamma^k_{ab}\partial^x_k\psi_b(x) - \frac{1}{2}m\psi_a(x) \end{aligned}$$

Recordando que $\pi_a = -\frac{i}{2}\gamma^0_{ab}\psi_b$

$$
\begin{aligned}
-\frac{i}{2}\gamma^0_{ab}\partial_0\psi_b &= \frac{i}{2}\gamma^k_{ab}\partial_k\psi_b - \frac{1}{2}m\psi_a \\
0 &= i\gamma^0_{ab}\partial_0\psi_b + i\gamma^k_{ab}\partial_k\psi_b - m\psi_a \\
0 &= i\left(\gamma^0_{ab}\partial_0 + \gamma^k_{ab}\partial_k\right)\psi_b - m\delta_{ab}\psi_b \\
0 &= \left(i\gamma^\mu_{ab}\partial_\mu - m\delta_{ab}\right)\psi_b \\
\therefore \quad & \left[\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi\right]_a = 0
\end{aligned}
\tag{65}
$$

De la misma manera la evolución del campo $\bar{\pi}(x)$ utilizando el resultado (64b) es:

$$
\begin{aligned}
d\bar{\pi}_a(x) &= \int d^3y\left(\frac{i}{2}\partial^x_k\bar{\psi}_c(y)\gamma^k_{ca}\delta^3(x-y) + \frac{1}{2}m\bar{\psi}_a(y)\delta^3(x-y)\right)dt \\
&= \left(\frac{i}{2}\partial^x_k\bar{\psi}_c(x)\gamma^k_{ca} + \frac{1}{2}m\bar{\psi}_a(x)\right)dt \\
\partial_0\bar{\pi}_a(x) &= \frac{i}{2}\partial^x_k\bar{\psi}_c(x)\gamma^k_{ca} + \frac{1}{2}m\bar{\psi}_a(x)
\end{aligned}
$$

Recordando el resultado:

$$\bar{\pi}_a(x) = -\frac{i}{2}\bar{\psi}_b(x)\gamma^0_{ba}$$

$$
\begin{aligned}
\partial_0\left(-\frac{i}{2}\bar{\psi}_b(x)\gamma^0_{ba}\right) - \frac{i}{2}\partial^x_k\bar{\psi}_c(x)\gamma^k_{ca} - \frac{1}{2}m\bar{\psi}_a(x) &= 0 \\
i\partial_0\bar{\psi}_b\gamma^0_{ba} + i\partial_k\bar{\psi}_b\gamma^k_{ba} + m\bar{\psi}_a &= 0 \\
i\bar{\psi}_b\left(\gamma^0_{ba}\overleftarrow{\partial}_0 + \gamma^k_{ba}\overleftarrow{\partial}_k\right) + m\bar{\psi}_b\delta_{ba} &= 0 \\
i\bar{\psi}_b\gamma^\mu_{ba}\overleftarrow{\partial}_\mu + m\bar{\psi}_b\delta_{ba} &= 0 \\
\bar{\psi}_b\left(i\gamma^\mu_{ba}\overleftarrow{\partial}_\mu + m\delta_{ba}\right) &= 0 \\
\therefore \quad \left[\bar{\psi}\left(i\gamma^\mu\overleftarrow{\partial}_\mu + m\right)\right]_a &= 0
\end{aligned}
\tag{66}
$$

Las ecuaciones de campo (65) y (66) se conocen como las ecuaciones de Dirac. La primera ecuación describe el movimiento de una partícula fermionica libre de spin $\frac{1}{2}$ y la segunda describe el movimiento de la correspondiente antipartícula.

7. Remarks and conclusions

En este trabajo se presentó el formalismo de Hamilton Jacobi para sistemas singulares. Mediante problemas prácticos se hizo la generalización para sistemas con infinitos grados de libertad y sistemas descritos por medio de variables de Grassmann, en particular se analiso la estructura clásica de los campos de Dirac. Se mostró que el formalismo de Hamilton Jacobi, permite a través de las condiciones de integrabilidad obtener nuevos vínculos que surgen de la teoría, de igual manera que las condiciones de consistencia lo hacen en el formalismo Hamiltoniano de Dirac. En algunos trabajos se ha probado la equivalencia entre las condiciones de integrabilidad y las condiciones de consistencia [5].

En particular, se mostró que cada vínculo es reconocido como una ecuación diferencial parcial en el formalismo de Hamilton Jacobi y a cada uno de estos vínculos se les asigna un parámetro independiente, $(t, \psi_a, \bar{\psi}_a)$, este conjunto de parámetros independientes son los que describen la evolución dinámica del sistema físico. Si todos los vínculos primarios y obtenidos por integrabilidad se cierran en un álgebra de Lie, entonces, se dice que el sistema es involutivo y las respectivas ecuaciones de movimiento o características para los campos independientes $(\pi_a, \bar{\pi}_a)$ son integrables.

Al analizar las condiciones de integrabilidad de ϕ y $\bar{\phi}$ se determinó relaciones entre los diferenciales de las variables independientes del sistema, cuando esto sucede se dice que el conjunto de EDPHJ no es linealmente independiente y por lo tanto estas ecuaciones no están involución con los paréntesis de Bose-Fermi.

Las relaciones entre las variables independientes (40), (42) permitieron reescribir el diferencial fundamental en términos del tiempo que es ahora la unica variable independiente del sistema, esto permitio definir la estructura conocida como paréntesis generalizados (PG). La evolución dinámica del sistema esta dada ahora por (52), se observo entonces que al definir los PG el número de variables independientes del sistema disminuyeron, además, se verifico que bajo (52) el conjunto de EDPHJ esta en involución y por lo tanto las ecuaciones características que corresponden a las ecuaciones de movimiento del sistema son integrables. Por último, el formalismo de HJ permitio obtener las ecuaciones de Dirac (65) y (66) en forma covariante.

Referencias

[1] Bertin M.C and Pimentel B.M and Pompeia P.J, Rev. Bras. de Ensino, **29**, 393 (2007).
Pimentel B and Teixeira R and Tomazelli J.L, Ann. of Phys., **84**, 267 (1998).
Teixeira R, *Formalismo de Hamilton Jacobi para Sistemas Singulares*, Disertación de Maestria, Instituto de Física Teórica, Sao Paulo, 1996.
Teixeira R, *Quantização de sistemas singulares via formalismo de Hamilton-Jacobi*, Tesis de Doctorado, Instituto de Física Teórica, Sao Paulo, 2000.
[2] Bertin M.C and Pimentel B.M and Pompeia P.J, Rev. Bras. de Ensino, **30**, 3 (2008).
[3] P Puig, Curso Teórico Práctico de Ecuaciones Diferenciales Aplicado a la Física y Tecnia, Roberto Puig Alvarez, Madrid, 1978.
[4] Pimentel B and M. C. Bertin and Valcárcel C.E, Ann. of Phys., **323**, 3137 (2008).
[5] Pimentel B and Teixeira R and Tomazelli J.L, Ann. of Phys., **267**, 75 (1998).
[6] K Sundermeyer, *Constrained Dynamics with Applications to Yang-Mills Theory, General Relativity, Classical Spin, Dual String Model*, Springer-Verlag, New York, 1982.
[7] P. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics*, Yeshiva University, New York, 1974.
[8] Carneiro C. and Thomaz M., Revista Brasileira de Ensino de Física, **22**, 474 (2000).
[9] Leithold L, EL CÁLCULO 7ed, p.104 y p.341 Oxford University Press 1998.
[10] Mandl F. and Shaw G, ”Quantum Field Theory”, Cap. VI, Willey,John and Sons, Incorporated, June 2010.