REVISTA DE CIENCIAS, Vol. 4 , No. 1 de 2014.

Lagrangianos de segundo orden en teoría clásica de campos

Classical field theory with higher derivatives

Jairo Andres Fajardo

Departamento de Física, Universidad de Nariño
Ciudad Universitaria Torobajo - Calle 18 Kra 50
San Juan de Pasto, Nariño, Colombia

Aceptado octubre; Publicado en línea enero.

ISSN 2256-3830.

Resumen

En este trabajo se estudiará una teoría clásica de campos descrita por Lagrangianos de segundo orden en las derivadas. Los principios fundamentales de la teoría permitirá deducir las ecuaciones de campo a nivel Lagrangiano y Hamilton y las correspondientes cargas conservadas asociadas al grupo de Poincaré. De igual manera, se deducirá el segundo teorema de Noether para una teoría gauge descrita por derivadas de segundo orden.

***Palabras Claves*:** Lagrangianos de segundo orden, ecuaciones de campo, ecuaciones de Hamilton, grupo de Poincaré, segundo teorema de Noether.

Abstract

In this work we are going to study a classical field theory describe by higher order derivatives Lagrangians. The basic principles of theory will allow to deduce the Lagrangian and Hamiltonian field equations and the corresponding Noether's charges associated to the Poincaré group . Here, we will deduce the second Noether theorem for gauge theories describe by higher order derivatives.

***Keywords*:** classical field theory with higher derivatives, field equations, Hamilton's equations, the group of Poincaré, second Noether theorem.

1. Introduction

En teoría clásica de campos [1], los sistemas físicos son representados por campos $\psi_a(x)$, donde $a = 1, .., N$, que son funciones del espacio-tiempo $x = x^\mu$ [2]. Como la estructura de $x = x^\mu$ es continua, se considera que estos sistemas físicos poseen un número infinito de grados de libertad. Definidos los campos, se le asocia al sistema una densidad Lagrangiana $\mathscr{L}$ que es un escalar de Lorentz y además una función de los campos y de las derivadas de los campos. Esta densidad Lagrangiana describirá la dinámica y las propiedades del sistema físico. Aun cuando no existe restricción en el orden de las derivadas de los campos de la cual deberá ser función $\mathscr{L}$, la mayoría de los sistemas físicos que conocen dependen en primer orden de $\partial\psi_a(x)$ [2]. Nuestro estudio considerará un sistema descrito por una densidad Lagrangiana de orden 2 en la derivadas de los campos, es decir:

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}[\psi_a(x), \partial_\mu\psi_a(x), \partial_\mu\partial_\nu\psi_a(x), x]. \tag{1}$$

El Lagrangiano asociado al campo es definido por:

$$L = \int_{\Omega} d^3x \mathscr{L}, \tag{2}$$

donde $dx^3 = dx^1dx^2dx^3$ y Ω es el dominio del espacio tiempo donde el campo reside. La funcional de acción entre los tiempos t_1 y t_2 es construida a partir del Lagrangiano en la forma [1,2]:

$$A[\psi_a(x)] = \int_{t_1}^{t_2} dtL = \int_{\sigma} d^4x \mathscr{L} \tag{3}$$

donde σ es el volumen en el espacio-tiempo y $dx^4 = dx^0dx^1dx^2dx^3$. Esta funcional de acción permitirá estudiar la evolución temporal del sistema físico en el espacio de configuraciones y en el espacio de fase apelando al principio de Hamilton y de Hamilton modificado, respectivamente [1,2,3]. De igual manera, de $A[\psi_a(x)]$ y del primer teorema de Noether se deducirán las correspondientes cargas conservadas: energía, momentum lineal, momentum angular, y spin asociadas con el grupo de Poincaré [2]. En el caso que $A[\psi_a(x)]$ describa una teoría gauge, el segundo teorema de Noether implicara que las identidades de Bianchi sean satisfechas lo que garantizara la existencia de cargas conservadas que corresponderá a un grupo de simetría gauge local [4].

2. Ecuaciones de campo

Las ecuaciones de campo que determinan la evolución temporal de un sistema físico en el espacio de configuraciones, son deducidas a partir del principio de Hamilton [2]:

La trayectoria que sigue un sistema físico representado por campos, en el espacio de configuraciones entre los tiempos $[t_1, t_2]$, es aquella que hace extremal la funcional de acción:

$$\delta A[\psi_a(x)] = 0 \tag{4}$$

la condición de acción extremal se debe cumplir bajo las condiciones de frontera:

$$\delta\psi_a(\mathbf{x}, t_1) = \delta\psi_a(\mathbf{x}, t_2) = 0 \qquad \delta\dot{\psi}_a(\mathbf{x}, t_1) = \delta\dot{\psi}_a(\mathbf{x}, t_2) = 0 \tag{5}$$

junto con las condiciones asintóticas en los campos:

$$|\mathbf{x}| \to \infty \quad \begin{cases} \psi_a(\mathbf{x}, t) \to 0 \\ \dot{\psi}_a(\mathbf{x}, t) \to 0 \end{cases}. \tag{6}$$

El principio de Hamilton considera variaciones infinitesimales con respecto a la trayectoria real, de manera que se debe aplicar las técnicas del cálculo de variaciones para determinar las ecuaciones de movimiento del sistema físico [5,6,7]. El espacio de configuraciones asociado a un Lagrangiano de segundo orden en las derivadas es definido por las variables: $(\psi_a, \dot{\psi}_a, \ddot{\psi}_a)$. Ahora, la condición de que la acción sea un extremal se garantiza si la derivada funcional de la acción con respecto a los campos es nula [1], es decir:

$$\frac{\delta A[\psi_a(x)]}{\delta\psi_b(y)} = 0 \tag{7}$$

Calculando la derivada funcional (7), siendo que la densidad lagrangiana es dada por (1), es posible mostrar que las ecuaciones de campos son:

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\psi_a} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\psi_a)}\right) + \partial_\mu\partial_\nu\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\partial_\nu\psi_a)}\right) = 0 \tag{8}$$

Estas relaciones son las correspondiente ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a sistemas físicos que son descritos por Lagrangianos que dependen de derivadas de segundo orden. Las ecuaciones de campo (8), constituirán un conjunto de N ecuaciones diferenciales de cuarto orden en las derivadas temporales y determinan la dinámica del sistema físico.

3. Teorema de Noether

Noether en el año de 1918 en su artículo *"Invariante variationsprobleme"* formaliza las leyes de conservación. Cuando Noether impone la condición de que la acción sea invariante por transformaciones de coordenadas y campos, se obtiene una relación entre las simetrías correspondientes a un sistema y las cantidades conservadas [1,2]. El teorema de Noether tiene dos partes: El primer teorema de Noether establece que la invariancia del Lagrangiano ante un grupo de simetría finito (simetría global), implica la existencia un número finito de cantidades conservadas. El segundo teorema indica que si el Lagrangiano es invariante por un grupo de simetría infinito (simetrías locales), el sistema físico describe una dinámica que posee vínculos [1,4].

Con el fin de deducir estos teoremas, consideremos que la acción es invariante ante las siguientes transformaciones continuas de coordenadas y campos:

$$x^{'} = x^{'}(x) \qquad \psi^{'}_a(x^{'}) = \psi^{'}_a[\psi_a(x)], \tag{9}$$

las cuales pueden ser definidas a partir de las siguientes transformaciones infinitesimales:

$$x^{'\mu} = x^{\mu} + \delta x^{\mu} \qquad \psi^{'}_a(x^{'}) = \psi_a(x) + \delta\psi_a(x) \tag{10}$$

La cantidad $\delta\psi_a(x)$ indica variación local en los campos y es consecuencia de cambios en las coordenadas y en la forma de los campos, es decir:

$$\delta\psi_a(x) = \psi^{'}_a(x^{'}) - \psi_a(x) = \bar{\delta}\psi_a(x) + \delta x^{\mu}\partial_{\mu}\psi_a(x). \tag{11}$$

Aquí, se ha introducido el concepto de variación global en los campos: $\bar{\delta}\psi_a(x)$, que representa el cambio únicamente en la forma de los campos sin tener en cuenta cambios en el punto x [1,2]:

$$\bar{\delta}\psi_a(x) = \psi^{'}_a(x) - \psi_a(x) \tag{12}$$

Como consecuencia de las transformaciones infinitesimales (10), densidad Lagrangiana cambia y ésta variación se puede expresar como:

$$\mathscr{L}^{'} = \mathscr{L} + \delta\mathscr{L} \tag{13}$$

donde:

$$\mathscr{L}^{'} = \mathscr{L}^{'}[\psi^{'}_a(x^{'}), \partial^{'}_{\mu}\psi^{'}_a(x^{'}), \partial^{'}_{\mu}\partial^{'}_{\nu}\psi^{'}_a(x^{'}), x^{'}] \tag{14}$$

Al exigir que la acción sea invariante por transformaciones de coordenadas y campos, se debe cumplir que:

$$\delta A[\psi_a(x)] = A^{'}[\psi^{'}_a(x^{'})] - A[\psi_a(x)] = \int\limits_{\sigma^{'}} dx^{'4}\mathscr{L}^{'} - \int\limits_{\sigma} dx^4\mathscr{L} = 0 \tag{15}$$

donde $\sigma^{'}$ denota el volumen expresado en el nuevo sistema de coordenadas $x^{'}$. La relación entre las medidas de volumen dx^4 y $dx^{'4}$ se determina a partir del Jacobiano de transformación [1,2]:

$$dx^{'4} = \left|\frac{\partial x^{'\mu}}{\partial x^{\alpha}}\right| dx^4 \approx (1 + \partial_{\mu}\delta x^{\mu})dx^4, \tag{16}$$

donde se ha considerado términos hasta de primer orden en δx. Sustituyendo (13) y (16) en la expresión (15), la variación local de la acción se puede expresar de la siguiente forma

$$\delta A[\psi_a(x)] = \int\limits_{\sigma} dx^4[\bar{\delta}\mathscr{L} + \partial_{\mu}(\delta x^{\mu}\mathscr{L})] = 0, \tag{17}$$

en donde se ha considerado la variación global de $\mathscr{L}$ que para el caso de sistemas físicos descritos por Lagrangianos que son funciones de derivadas de segundo orden se escribe:

$$\bar{\delta}\mathscr{L} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\psi_a}\bar{\delta}\psi_a + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_{\mu}\psi_a)}\bar{\delta}(\partial_{\mu}\psi_a) + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_{\mu}\partial_{\nu}\psi_a)}\bar{\delta}(\partial_{\mu}\partial_{\nu}\psi_a). \tag{18}$$

Después de algunas manipulaciones, la relación (17) se puede expresar de la siguiente manera:

$$\delta A[\psi_a(x)] = \int_\sigma dx^4 \left(L^a \bar{\delta}\psi_a + \partial_\mu J^\mu \right) = 0, \tag{19}$$

en donde hemos puesto en evidencia las ecuaciones de campo que las identificamos como:

$$L^a \equiv \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \psi_a} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \psi_a)} \right) + \partial_\mu \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu \psi_a)} \right) = 0 \tag{20}$$

y se ha definiendo la corriente de Noether J^μ asociada a una teoría descrita por Lagrangianos de segundo orden:

$$J^\mu \equiv \left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \psi_a)} - \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\nu \partial_\mu \psi_a)} \right) \right] \bar{\delta}\psi_a \ + \ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu \psi_a)} \partial_\nu \bar{\delta}\psi_a \ + \ \mathscr{L} \delta x^\mu \tag{21}$$

Ahora, tendiendo en cuenta que el volumen espacio-temporal σ es arbitrario y que la identidad (19) se debe garantizar para cada punto contenido en σ, la invariancia de la acción es garantizada si [1,2]:

$$L^a \bar{\delta}\psi_a + \partial_\mu J^\mu = 0, \tag{22}$$

ésta expresión (22) es conocido como el teorema de Noether.

4. Primer teorema de Noether y el grupo de Poincaré

Consideremos que las variaciones en coordenadas y campos: δx^μ y $\delta\psi_a$, están caracterizadas por un conjunto de r parámetros constantes, independientes e infinitesimal del espacio-tiempo $\in^\beta$, con $\beta = 1, 2, ..r$. Este conjunto de transformaciones pertenece a un grupo finito de simetría en términos de los cuales las transformaciones (10) se expresan de la siguiente forma [1,2]:

$$\delta x^\mu = x^{'\mu} - x^\mu \equiv \in^\beta X^\mu_{\ \beta}(x) \quad , \quad \delta\psi_a(x) = \psi^{'}_a(x^{'}) - \psi_a(x) \equiv \in^\beta \Phi_{\beta a}(x). \tag{23}$$

A las cantidades $X^\mu_{\ \beta}(x)$ y $\Phi_{\beta a(x)}$ se las denomina generadores del grupo de simetría. Si se considera que la acción es invariante por la transformación (23) con la condición de que los campos $\psi_a(x)$ son soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange, es decir que $L^a = 0$, entonces la identidad (22) se reduce a la siguiente ecuación de continuidad:

$$\partial_\mu J^\mu_{\ \beta} = 0. \tag{24}$$

Esto es conocido como el primer teorema de Noether y a $J^\mu_{\ \beta}$, que tiene la forma:

$$\begin{aligned} J^\mu_{\ \beta} &= \left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \psi_a)} - \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\nu \partial_\mu \psi_a)} \right) \right] \Phi_{\beta a}(x) + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu \psi_a)} \partial_\nu \Phi_{\beta a}(x) \\ -X^\alpha_{\ \beta}(x) &\left\{ \left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \psi_a)} - \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\nu \partial_\mu \psi_a)} \right) \right] \partial_\alpha \psi_a + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu \psi_a)} \partial_\alpha \partial_\nu \psi_a - \delta^\mu_{\ \alpha} \mathscr{L} \right\}, \end{aligned} \tag{25}$$

se la identifica como la corriente de Noether asociada al grupo finito de simetría generado por las transformaciones (23).

Con el fin de calcular las cargas conservadas [2], integremos la ecuación de continuidad (24) en un volumen tridimensional arbitrario Ω:

$$\int_\Omega dx^3 \partial_\mu J^\mu_{\ \beta} = \int_\Omega dx^3 (\partial_0 J^0_{\ \beta} + \partial_k J^k_{\ \beta}) = 0. \tag{26}$$

Si se utiliza el teorema de Gauss al segundo término de la relación anterior se obtiene que:

$$\int_\Omega dx^3 (\partial_k J^k_{\ \beta}) = \oint_S d_{sk} J^k_{\ \beta} \tag{27}$$

donde S es la superficie contorno de Ω. Siendo que el volumen Ω es arbitrario, se lo puede escoger tan grande como se desee de tal manera que la frontera S esta siendo considerada en $|\mathbf{x}| \to \infty$. Ahora, el comportamiento asintótico de los campos y de sus derivadas, es decir:

$$\left.\begin{aligned}\psi_a(\mathbf{x},t)\to 0\\ \partial_k\psi_a(\mathbf{x},t)\to 0\end{aligned}\right\}\text{cuando } |\mathbf{x}|\to\infty, \tag{28}$$

garantizara que cuando se tome el límite $|\mathbf{x}|\to\infty$, la integral de superficie desaparezca:

$$\int_\Omega dx^3(\partial_k J^k{}_\beta) = \oint_s d_{s_k} J^k{}_\beta \to 0, \tag{29}$$

por el hecho que J^k_β, que es función de los campos y de sus derivadas, esta siendo evaluado en la frontera S. De esta manera, el resultado (29) garantizara que (26) se exprese como:

$$\int_\Omega dx^3\partial_0 J^0{}_\beta = \frac{d}{dt}\int_\Omega dx^3 J^0{}_\beta = \frac{d}{dt}Q_\beta = 0, \tag{30}$$

lo que implica que la cantidad:

$$Q_\beta = \int_\Omega dx^3 J^0{}_\beta = \text{constante} \quad \beta = 1,2,..,r \tag{31}$$

se denomina carga de Noether. Así, el primer teorema de Noether establece que si el Lagrangiano es invariante ante una transformación infinitesimal, generada por un grupo finito que depende de r parámetros constantes, existen r cantidades independientes asociadas al sistema físico descrito por los campos $\psi_a(x)$ que se conservan [1,2].

Consideremos el caso en el que (23) corresponde a unas transformación de Poincare, es decir, una transformación de Lorentz mas una traslación espacio temporal que están representadas mediante las siguientes relaciones [2]:

$$\delta x^\mu = \in^\mu + \delta W^{\mu\nu}x_\nu \qquad \delta\psi_a(x) = \frac{1}{2}\delta W^{\mu\nu}(I_{\mu\nu})_{ab}\psi_b(x), \tag{32}$$

donde $\in^\mu$ es un cuadrivector constante infinitesimal, asociado a las traslaciones infinitesimales espacio temporales, en cuanto que $\delta W^{\mu\nu}$ es un tensor de segundo orden que depende de componentes infinitesimales y esta asociado a rotaciones infinitesimales en el espacio tiempo. El tensor $\delta W^{\mu\nu}$ deberá ser antisimétrico con el fin de garantizar que el intervalo entre dos eventos espacio temporales infinitesimalmente próximos sea invariante por la transformación (32). Los tensores $I_{\mu\nu}$ se conocen como los generadores infinitesimales de las transformaciones de Lorentz y satisfacen la propiedad $I_{\mu\nu} = -I_{\nu\mu}$. Las transformaciones (32) definen el grupo de Poincare y las simetrías físicas asociadas a este grupo son la homogeneidad y la isotropía del espacio tiempo.

La invariancia de la acción por el grupo de Poincare, establece la siguiente corriente de Noether

$$J^\mu = \frac{1}{2}\delta W^{\alpha\beta}\mathscr{M}^\mu{}_{\alpha\beta} - \in^\alpha \theta^\mu{}_\alpha \tag{33}$$

donde $\theta^\mu{}_\alpha$ se denomina densidad tensorial de momentum-energía que se define por:

$$\theta^\mu{}_\alpha = \left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\psi_a)} - \partial_\nu\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\nu\partial_\mu\psi_a)}\right)\right]\partial_\alpha\psi_a + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\partial_\nu\psi_a)}\partial_\alpha\partial_\nu\psi_a - \delta^\mu{}_\alpha\mathscr{L}, \tag{34}$$

en cuanto que $\mathscr{M}^\mu{}_{\alpha\beta}$ se identifica como la densidad tensorial de momentum angular-spin que se expresa como:

$$\begin{aligned}\mathscr{M}^\mu{}_{\alpha\beta} &= \left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\psi_a)} - \partial_\nu\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\nu\partial_\mu\psi_a)}\right)\right](I_{\alpha\beta})_{ab}\psi_b \\ &+ \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\partial_\nu\psi_a)}(I_{\alpha\beta})_{ab}\partial_\nu\psi_b + \theta^\mu{}_\beta x_\alpha - \theta^\mu{}_\alpha x_\beta\end{aligned} \tag{35}$$

De la corriente (33) y de la relación (31), se determina que la correspondiente carga de Noether asociada a la transformación (32) tiene la siguiente forma:

$$Q = \frac{1}{2}\delta W^{\alpha\beta}M_{\alpha\beta} - \in^\alpha P_\alpha \tag{36}$$

donde P_α es el cuadrivector momentum y $M_{\alpha\beta}$ es el tensor de momentum angular-spin del campo que están definidos en la forma:

$$P_\alpha \equiv \int_\Omega dx^3 \theta^0{}_\alpha \quad , \quad M_{\alpha\beta} \equiv \int_\Omega dx^3 \mathscr{M}^0{}_{\alpha\beta} \quad con \quad \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3. \tag{37}$$

De la antisimetría del tensor $\delta W^{\alpha\beta}$ se debe garantizar que $M_{\alpha\beta} = -M_{\beta\alpha}$. El cuadrivector momentum del campo se le interpreta con las siguientes componentes: $P_\alpha = (E, -\mathbf{P})$, donde $P_0 = E$ corresponde a la energía del campo en cuanto que $P_j = \mathbf{P}$ se asocia con el momentum lineal del mismo. para un sistema físico conservativo, la energía del sistema es equivalente al Hamiltoniano canónico, $E = H_C = \int_\Omega dx^3 \mathscr{H}_C$, donde $\mathscr{H}_C \equiv \theta^0{}_0$ se lo conoce como densidad Hamiltoniana. Ahora, para un sistema descrito por un Lagrangiano que depende del segundo orden en las derivadas de los campos, el Hamiltoniano canónico se expresa en la siguiente forma [8]:

$$H_C = \int_\Omega dx^3 \left(\left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\psi}_a} - \partial_0 \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \ddot{\psi}_a} \right) - 2\partial_k \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_k \dot{\psi}_a)} \right) \right] \dot{\psi}_a + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \ddot{\psi}_a} \ddot{\psi}_a - \mathscr{L} \right) \tag{38}$$

El Hamiltoniano canónico, describirá de ahora en adelante, la dinámica del sistema en el espacio de fase el cual esta expandido por las siguiente variables: $(\psi_a, \dot{\psi}_a, \pi^a_\psi, \pi^a_{\dot{\psi}})$, donde π^a_ψ y $\pi^a_{\dot{\psi}}$ son los momentos canónicos conjugados asociados a las variables ψ_a y $\dot{\psi}_a$, respectivamente, y para una teoría descrita por este espacio de face, la coordenada $\dot{\psi}_a$ se considera independiente.

El Hamiltoniano canónico escrito en términos de las variables del espacio de fase se expresa [8]:

$$H_C = \int_\Omega dx^3 \left(\pi^a_\psi \dot{\psi}_a + \pi^a_{\dot{\psi}} \ddot{\psi}_a - \mathscr{L} \right) = \int_\Omega dx^3 \mathscr{H}_C, \tag{39}$$

con la densidad Hamiltoniana canónica escrita como: $\mathscr{H}_C = \pi^a_\psi \dot{\psi}_a + \pi^a_{\dot{\psi}} \ddot{\psi}_a - \mathscr{L}$. Las relaciones (38) y (39) permite identificar los momentos canónicos π^a_ψ y $\pi^a_{\dot{\psi}}$ como siendo definidos por:

$$\pi^a_\psi \equiv \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\psi}_a} - \partial_0 \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \ddot{\psi}_a} \right) - 2\partial_k \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_k \dot{\psi}_a)} \right) \quad , \quad \pi^a_{\dot{\psi}} \equiv \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \ddot{\psi}_a} \tag{40}$$

El momentum lineal asociado al sistema físico $P_j = \mathbf{P_j}$ se expresa en término de los campos y de sus derivadas de la siguiente forma:

$$P_j = \int_\Omega dx^3 \theta^0{}_j = \int_\Omega dx^3 \left(\pi^a_\psi \partial_j \psi_a + \pi^a_{\dot{\psi}} \partial_j \dot{\psi}_a \right) \tag{41}$$

Ahora, el tensor de momentum angular-spin se puede re escribir como [8]:

$$M_{\alpha\beta} = L_{\alpha\beta} + S_{\alpha\beta} \tag{42}$$

donde $L_{\alpha\beta}$ se denomina tensor de momentum angular orbital y el cual tienen la siguiente estructura:

$$L_{\alpha\beta} = \int_\Omega dx^3 [\, \pi^a_\psi (x_\alpha \partial_\beta \psi_a - x_\beta \partial_\alpha \psi_a) + \pi^a_{\dot{\psi}} (x_\alpha \partial_\beta \dot{\psi}_a - x_\beta \partial_\alpha \dot{\psi}_a) \,], \tag{43}$$

en cuanto que $S_{\alpha\beta}$ es el tensor de spin:

$$S_{\alpha\beta} = \int_\Omega dx^3 \left[\pi^a_\psi (I_{\alpha\beta})_{ab} \psi_b + \pi^a_{\dot{\psi}} (I_{\alpha\beta})_{ab} \dot{\psi}_b \right] \tag{44}$$

5. Ecuaciones de movimiento de Hamilton

En la versión Hamiltoniana de una teoría clásica de campos la dinámica del sistema en el espacio de fase $(\psi_a, \dot{\psi}_a, \pi^a_\psi, \pi^a_{\dot{\psi}})$ esta gobernada por las ecuaciones de movimiento de Hamilton las cuales son deducidas a partir del principio de Hamilton modificado mas condiciones de frontera [2,7]. En el espacio de fase, la acción se expresa de la siguiente forma: reemplazando la densidad Lagrangiana en la funcional de acción (3), se obtiene:

$$A[\psi_a, \dot{\psi}_a, \pi^a_\psi, \pi^a_{\dot{\psi}}] = \int_\sigma dx^4 \left[\ \pi^a_\psi \ \dot{\psi}_a \ + \ \pi^a_{\dot{\psi}} \ \ddot{\psi}_a - \ \mathscr{H}(\psi_a, \dot{\psi}_a, \pi^a_\psi, \pi^a_{\dot{\psi}}) \ \right] \tag{45}$$

El principio de Hamilton modificado [3] establece que:

La trayectoria que sigue un sistema físico representado por campos, en el espacio de fase entre los tiempos $[t_1, t_2]$, es aquella que hace extremal la funcional de acción (45).

$$\delta A[\psi_a, \dot{\psi}_a, \pi^a_\psi, \pi^a_{\dot{\psi}}] = 0. \tag{46}$$

La condición de acción extremal se debe garantizar junto con las siguientes condiciones de frontera:

$$\delta\psi_a(\mathbf{x}, t_1) = \delta\psi_a(\mathbf{x}, t_2) = 0 \qquad\qquad \delta\dot{\psi}_a(\mathbf{x}, t_1) = \delta\dot{\psi}_a(\mathbf{x}, t_2) = 0 \tag{47}$$

La acción es una funcional de las coordenadas $(\psi_a, \dot{\psi}_a, \pi^a_\psi, \pi^a_{\dot{\psi}})$ que son consideradas linealmente independientes; de manera que cuando se calcula (47), se debe considerar que las variaciones de $\delta\psi_a$, $\delta\dot{\psi}_a$, $\delta\pi^a_\psi$ y $\delta\pi^a_{\dot{\psi}}$ son independientes. Del principio de Hamilton modificado se deduce que las ecuaciones Hamilton que determinan la evolución temporal del sistema físico en el espacio de fase [3,8] son dadas por:

$$\begin{aligned}
\dot{\psi}_a(x) &= \frac{\delta H_C}{\delta\pi^a_\psi(x)} = \{\psi_a(x), H_C\}, \\
\ddot{\psi}_a(x) &= \frac{\delta H_C}{\delta\pi^a_{\dot{\psi}}(x)} = \{\dot{\psi}_a(x), H_C\}, \\
\dot{\pi}^a_\psi(x) &= -\frac{\delta H_C}{\delta\psi_a(x)} = \{\pi^a_\psi(x), H_C\}, \\
\dot{\pi}^a_{\dot{\psi}}(x) &= -\frac{\delta H_C}{\delta\dot{\psi}_a(x)} = \{\pi^a_{\dot{\psi}}(x), H_C\},
\end{aligned} \tag{48}$$

donde se ha introducido el concepto de paréntesis de Poisson (PP) a tiempo iguales $x_0 = y_0$, que para dos variables dinámicas $A(x) = A(\psi_a, \dot{\psi}_a, \pi^a_\psi, \pi^a_{\dot{\psi}})$ y $B(y) = B(\psi_a, \dot{\psi}_a, \pi^a_\psi, \pi^a_{\dot{\psi}})$ definidas en el espacio de fase son definidos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\{A(x), B(y)\}_{x_0 = y_0} = \int_\Omega dz^3 \Bigg(& \frac{\delta A(x)}{\delta\psi_b(z)} \frac{\delta B(y)}{\delta\pi^b_\psi(z)} - \frac{\delta A(x)}{\delta\pi^b_\psi(z)} \frac{\delta B(y)}{\delta\psi_b(z)} \\
& + \frac{\delta A(x)}{\delta\dot{\psi}_b(z)} \frac{\delta B(y)}{\delta\pi^b_{\dot{\psi}}(z)} - \frac{\delta A(x)}{\delta\pi^b_{\dot{\psi}}(z)} \frac{\delta B(y)}{\delta\dot{\psi}_b(z)} \Bigg).
\end{aligned} \tag{49}$$

De la definición anterior, se puede calcular los PP fundamentales entre las coordenadas $(\psi_a, \dot{\psi}_a, \pi^a_\psi, \pi^a_{\dot{\psi}})$, y se demuestra que los únicos PPlo diferentes de cero son [3,8]:

$$\{\psi_a(x), \pi^b_\psi(y)\} = \delta^b_a \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \qquad\qquad \{\dot{\psi}_a(x), \pi^b_{\dot{\psi}}(y)\} = \delta^b_a \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \tag{50}$$

En términos de los PP se puede expresar la evolución temporal de una variable dinámica $A(x) = A(\psi_a, \dot{\psi}_a, \pi^a_\psi, \pi^a_{\dot{\psi}})$ en el espacio de fase de la siguiente manera [2,3]:

$$\dot{A}(x) = \{A(x), H_C\} \tag{51}$$

La importancia de la carga de Noether Q radica en el hecho que ella esta asociada a las simetrías del sistema físico, es por ello que a Q se le denomina el generador de simetría ya que se puede mostrar que su relación con la variación global de los campos $\bar{\delta}\psi_a(x)$ es dada por [2]:

$$\bar{\delta}\psi_a(x) = \{\psi_a(x), Q\} = \frac{1}{2}\delta W^{\alpha\beta}\{\psi_a(x), M_{\alpha\beta}\} - \in^\alpha \{\psi_a(x), P_\alpha\}, \tag{52}$$

de esta manera se interpreta a P_μ como el generador de simetría asociado a las traslación en el espacio-tiempo, en cuanto que $M_{\alpha\beta}$ sera el generador de simetría por rotaciones espacio temporales. Es posible mostrar que éstos generadores satisfacen las siguientes relaciones de PP [2]:

$$\begin{aligned} \{P_\mu\ ,\ P_v\} &= 0, \\ \{M_{\mu v},\ P_\lambda\} &= \eta_{v\lambda}P_\mu - \eta_{\mu\lambda}P_v, \\ \{M_{\mu v},\ M_{\sigma\tau}\} &= \eta_{v\sigma}M_{\mu\tau} + \eta_{\mu\tau}M_{v\sigma} - \eta_{v\tau}M_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}M_{v\tau}, \end{aligned} \tag{53}$$

conocida como el álgebra de Poincaré.

6. Segundo teorema de Noether

El segundo teorema de Noether es consecuencia de la invariancia de la acción ante un grupo infinito de simetría, conocidas como simetrías gauge locales. Una consecuencia de este teorema es la existencia de cantidades conservadas, el cumplimiento de las identidades de Bianchi y el carácter singular del Lagrangiano que tendrá como consecuencia que se describa en sistema dinámico con vínculos [1,4]. Éste grupo de transformaciones está caracterizado por un conjunto de r parámetros, $\in^\beta(x)$ con $\beta = 1, 2, ..., r$, dependientes de las coordenadas espacio temporales y están definidos de la siguiente forma [4]:

$$\delta x^\mu \equiv \in^\beta (x) X^\mu{}_\beta(x) \quad , \quad \delta\psi_a(x) \equiv \in^\beta (x)\Phi_{\beta a}(\psi, x) + \in^{\beta,\mu} (x)\varphi_{\mu\beta a}(\psi, x), \tag{54}$$

donde se ha introducido la siguiente notación $\in^{\beta,\mu}(x) \equiv \partial^\mu \in^\beta (x)$. Los tensores: $X^\mu{}_\beta(x)$, $\Phi_{\beta a}(\psi, x)$ y $\varphi_{\mu\beta a}(\psi, x)$ son funciones del punto y de los campos y son conocidos como los generadores del grupo de simetría infinito [1,4]. Ahora, la transformación global de los campos se puede expresar como:

$$\bar{\delta}\psi_a(x) = \delta\psi_a(x) - \delta x^\mu \partial_\mu \psi_a(x) = \in^\beta (\Phi_{\beta a} - X^\mu{}_\beta \partial_\mu \psi_a) + \in^{\beta,\mu} \varphi_{\mu\beta a} \tag{55}$$

Si se integra la expresión (22) sobre un espacio tridimensional y se utiliza la relación (55), es posible mostrar, después de un estudio laborioso, que el tensor:

$$\Theta_{\mu\beta} \equiv L^a \varphi_{\mu\beta a} + j_{\mu\beta}, \tag{56}$$

satisface la siguiente ecuación de continuidad [4]:

$$\partial^\mu \Theta_{\mu\beta} = 0, \tag{57}$$

donde se ha definido:

$$\begin{aligned} j^\mu{}_\beta = &\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\psi_a)} - \partial_\nu\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\nu\partial_\mu\psi_a)}\right)\right](\Phi_{\beta a} - X^\alpha{}_\beta\partial_\alpha\psi_a) \\ &+ \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\partial_\nu\psi_a)}\partial_\nu(\Phi_{\beta a} - X^\alpha{}_\beta\partial_\alpha\psi_a) + \mathscr{L}X^\mu{}_\beta. \end{aligned} \tag{58}$$

La relación (57) se conoce como el segundo teorema de Noether. Además, es posible verificar que se cumplen las identidades generalizadas de Bianchi:

$$L^a(\Phi_{\beta a} - X^\mu{}_\beta\partial_\mu\psi_a - \partial^\mu\varphi_{\mu\beta a}) - (\partial^\mu L^a)\varphi_{\mu\beta a} = 0, \tag{59}$$

que garantizan que las ecuaciones de campo no son independientes [4].

Otra consecuencia del segundo teorema de Noether es el hecho que el Lagrangiano que describe el sistema es singular., es decir, el determinante de la matriz Hessiana, que para una teoría descrita por Lagrangianos dependientes de orden en las derivadas de los campos, es definida de la siguiente forma

$$W_0^{ab} = \frac{\partial^2\mathscr{L}}{\partial\ddot{\psi}_b\partial\ddot{\psi}_a}, \tag{60}$$

es cero. Esta condición establece establece que el sistema en consideración tiene vínculos [8,4] de tal manera que las ecuaciones campo no son independiente lo que ratifica el significado de las identidades de Bianchi.

7. Conclusiones

Se realizo un estudio clásico de una teoría clásica descritas por Lagrangianos de segundo orden en las derivadas de los campos. Del principio de Hamilton mas condiciones de frontera y condiciones asintóticas de campos, se derivó la forma genérica de las ecuaciones de campo para una teoría descrita por este tipo de Lagrangianos (8).

Al imponer la condición de invariancia de la acción ante un grupo de transformaciones infinitesimales en las coordenadas y los campos, se dedujo el teorema de Noether (22). Cuando el grupo en consideración es finito se demostró la existencia de r cargas conservadas asociadas al sistema físico, (31). Si el grupo es consideración es el de Poincare se probo las cargas conservadas son: la energía P_0, el momentum lineal P_j, el momentum angular orbital L_{ij}, y el spin S_{ij}.

De la expresión asociada a la energía se derivo la versión generalizada del Hamiltoniano canónico para sistemas descritos por lagrangianos de segundo orden, (38), del cual se deduce, de manera natural, la definición de los momentos canónicos $\pi^a_{\dot{\psi}}$ y π^a_{ψ} conjugados a las variables $\dot{\psi}_a$ y ψ_a, respectivamente, los que permite introducir el espacio de face, $(\psi_a, \dot{\psi}_a, \pi^a_{\psi}, \pi^a_{\dot{\psi}})$, para este tipo de sistemas.

Se introduce el segundo teorema de Noether que es consecuencia de la invariancia de la acción ante un grupo de transformaciones gauge locales que dependen de r parámetros definidos en el espacio tiempo, (54). Una consecuencia de este teorema es la existencia de una corriente de Noether asociada a esta simetría, que las identidades de Bianchi son satisfechas y que el Lagrangiano que describirá el sistema es singular.

Referencias

[1] R. Aldrovandi and J. G. Pereira, *Notes for a Course on CLASSICAL FIELDS*, Instituto de Física Teórica, Sao Paulo, 2008.
[2] W Greiner and J Reinhardt, *Field Quantization*, Springer, New York 1996.
[3] K. Sundermeyer, Constrained Dynamics, Lectures Notes in Physics, Vol. 169, Springer, New York, 1982, pag 9, 13.
[4] H.O.Girotti, *CLASSICAL AND QUANTUM DYNAMICS OF CONSTRAINED SYSTEMS*, Tesis de Doctorado Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brazil (1989).
[5] Sadri Hassani, Mathematical Methods For Students of Physics and Related Fields (Second Edition), Springer, 2009, pag 727.
[6] George F. Simmons, ECUACIONES DIFERENCIALES Con aplicaciones y notas históricas, Segunda edición, McGraw-Hill, 1993, pag 528.
[7] H. Goldstein, Classical Mechanics (3rd Edition), Addison-Wesley, 2001, pag 34
[8] Carlos A. P. Galv$\widetilde{a}$o, B. M. Pimentel, Can. J. Phys. 66, 460 (1988).