REVISTA DE CIENCIAS, Vol. 5 , No. 1 de 2014.

Soluciones de la ecuación fraccional de Burgers no homogénea

Solutions of the nonhomogeneous fractional Burgers equation

Victor Giraldo Buesaquillo Gómez [a ⋆], Alejandro Pérez Riascos [b ⋆⋆], Alvaro Rugeles Pérez [a].

[a] *Departamento de Física. Universidad de Nariño, Pasto.*
[b] *Instituto de Física, Universidad Nacional Autónoma de México, México, D.F.*

Aceptado Septiembre; Publicado en línea Noviembre

ISSN 2256-3830.

Resumen

En este artículo se estudian diferentes tipos de soluciones de la ecuación fraccional unidimensional no lineal de Burgers con un término no homogéneo asociado a fuerzas externas. Esta ecuación es una generalización de la ecuación de difusión no homogénea en la que se incluye una derivada fraccional de Caputo que describe una no linealidad no local. Por medio de la transformación de Cole-Hopf generalizada, la ecuación de Burgers fraccional no homogénea se convierte en una ecuación diferencial lineal en derivadas parciales, lo que permite obtener soluciones analíticas. Se analizan soluciones solitónicas y se exploran los efectos asociados al término no homogéneo y al orden de la derivada fraccional.

***Palabras Claves*:** Ecuación fraccional de Burgers, transformación de Cole-Hopf generalizada, solitones.

Abstract

In this article we study solutions of the nonlinear fractional Burgers equation with an inhomogeneous term associated with external forces. This equation is a generalization of the inhomogeneous diffusion equation with an additional term that describes a nonlocal nonlinearity by means of a fractional order derivative of Caputo type. By using a generalized Cole-Hopf transformation, the fractional Burgers equation is mapped to an inhomogeneous linear partial differential equation, this formalism allows to deduce analytical solutions. We analyze soliton solutions and we explore the effects related to the inhomogeneous term and the order of the fractional derivative.

***Keywords*:** Fractional Burgers equation, generalized Cole-Hopf transformation, solitons.

1. Introducción

La ecuación de Burgers no homogénea para $\phi(x,t)$ [1,2]:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\phi\frac{\partial\phi}{\partial x}-\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=F(x,t)$$

⋆ vicbfisico@gmail.com
⋆⋆aaappprrr@gmail.com

es una generalización de la ecuación de difusión con la adición de un término no lineal y una parte no homogénea $F(x,t)$ asociada a fuerzas externas. La ecuación de Burgers aparece en el estudio de la turbulencia [3] y tiene numerosas aplicaciones en física y matemáticas [1,2]. En el caso homogéneo $F(x,t) = 0$, la ecuación de Burgers presenta soluciones solitónicas, estos son pulsos que se propagan sin cambiar su forma debido a la compensación entre la dispersión y efectos no lineales [4].

Recientemente se ha propuesto la ecuación fraccional de Burgers en la que la parte no lineal se modela por medio de un término con derivadas de orden fraccional [3,5,6]. La razón para extender el tratamiento de la ecuación de Burgers al caso fraccional es que existen diferentes fenómenos de carácter no local [3] que se presentan cuando las propiedades de un sistema en un cierto punto de configuración o espacio de fase no solo dependen de las propiedades del sistema en este punto, sino también de las propiedades del entorno y, como consecuencia, se usa el cálculo fraccional para describir dichos fenómenos [6].

En este trabajo se estudia la ecuación fraccional de Burgers con un término no homogéneo. En la primera parte se analiza la ecuación de Burgers no homogénea. En la sección 2 se utiliza la transformación de Cole-Hop para establecer una ecuación lineal por medio de la cual se obtienen en forma analítica soluciones solitónicas, también se discute el efecto del término no homogéneo en las soluciones. En la segunda parte del trabajo se analiza la ecuación fraccional de Burgers no homogénea. En la sección 3 se presenta brevemente el concepto de derivada fraccional, en particular la derivada fraccional de Caputo. En la sección 4 se utiliza una versión modificada de la transformación de Cole-Hopf en función de una derivada fraccional para usarla en la solución de la ecuación fraccional de Burgers no homogénea. Se analizan diversos casos con soluciones con pulsos localizados y soluciones disipativas de la ecuación fraccional de Burgers no homogénea.

2. Ecuación de Burgers no homogénea

En esta sección se introducen algunos resultados que son la base para el análisis de la ecuación fraccional de Burgers. Se parte de la ecuación de Burgers unidimensional no homogénea para $\phi(x,t)$:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \phi \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = F(x,t) \tag{1}$$

siendo $-\infty < x < \infty$, $t \geq 0$ y la condición inicial $\phi(x,0) = \phi_0(x)$. El término $F(x,t)$ se encuentra asociado a fuerzas externas y $\phi_0(x)$ es el perfil a tiempo $t = 0$ de $\phi(x,t)$. Para el caso homogéneo $F(x,t) = 0$ se conocen soluciones solitónicas [7] y otro conjunto de soluciones obtenidas mediante la transformación de Cole-Hopf [8,9]. En lo siguiente se aplica esta transformación con el fin de estudiar el caso no homogéneo.

2.1. *Transformación de Cole-Hopf*

En la ecuación (1) la transformación de Cole-Hopf [8,9] describe $\phi(x,t)$ por medio de una función $\psi(x,t)$ a través de la relación:

$$\phi(x,t) = -\frac{2}{\psi(x,t)} \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x}. \tag{2}$$

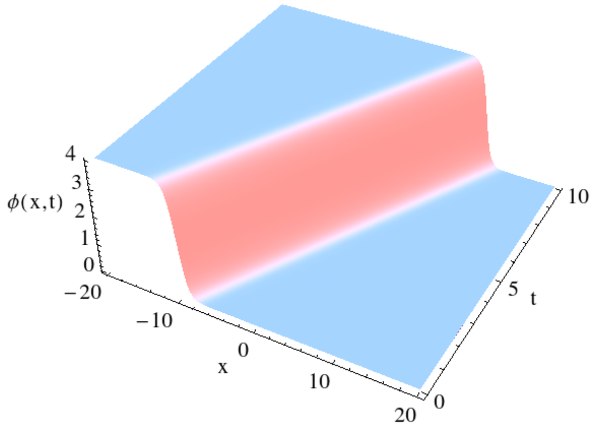
Cuando se introduce (2) en la ecuación (1) se obtiene la relación:

$$2\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\psi}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial t}\right)\right] = F(x,t). \tag{3}$$

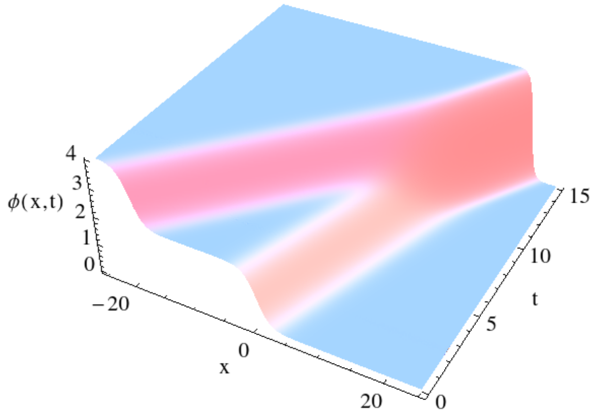
Luego se define $F(x,t)$ en términos de un *potencial* $V(x,t)$ que cumple con $F(x,t) = -2\frac{\partial V}{\partial x}$, la ecuación (3) permite establecer para $\psi(x,t)$:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x,t)\psi = \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad -\infty < x < \infty,\ t \geq 0, \tag{4}$$

con una condición inicial de la forma:



(a)



(b)

Figura 1. Soluciones solitónicas de la ecuación de Burgers homogénea. En (a) $\psi(x,t) = e^{-2((x+10)-2t)} + 1$. En (b) se grafica la solución obtenida para la interacción de dos solitones descritos por $\psi(x,t) = e^{-((x+4)-t)} + e^{-2((x+10)-2t)} + 1$.

$$\psi(x,0) = g(x) \equiv \exp\left[-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} u_o(x')dx'\right], \tag{5}$$

donde $g(x)$ es obtenida aplicando (2) a la condición inicial $\phi_0(x)$. En consecuencia, la transformación de Cole-Hopf convierte la ecuación no homogénea de Burgers (1) en la ecuación de difusión (4) con términos de fuente de la forma $V(x,t)\psi(x,t)$. La importancia de este tipo de transformación radica en que establece una correspondencia entre un problema no lineal donde no es evidente un principio de superposición y un problema lineal donde el principio de superposición permite utilizar el método de la función de Green.

2.2. *Soluciones solitónicas de la ecuación homogénea*

Cuando se considera $V(x,t) = 0$ en la ecuación (4) resulta el caso particular de la ecuación de Burgers homogénea resuelta usando la transformación de Cole-Hopf [8]. En este caso, por medio de la ecuación (4), $\psi_0(x,t)$ satisface:

$$\frac{\partial^2\psi_0}{\partial x^2} = \frac{\partial\psi_0}{\partial t} \quad -\infty < x < \infty,\ t \geq 0, \tag{6}$$

con la condición inicial $\psi_0(x,0) = g(x)$. A partir de $\psi_0(x,t)$ se obtienen dos tipos de resultados para $\phi(x,t)$: soluciones disipativas y soluciones solitónicas. Teniendo en cuenta que la expresión (6) es una ecuación de difusión cuya solución toma la forma:

$$\psi_0(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4t}\right] g(x')dx', \tag{7}$$

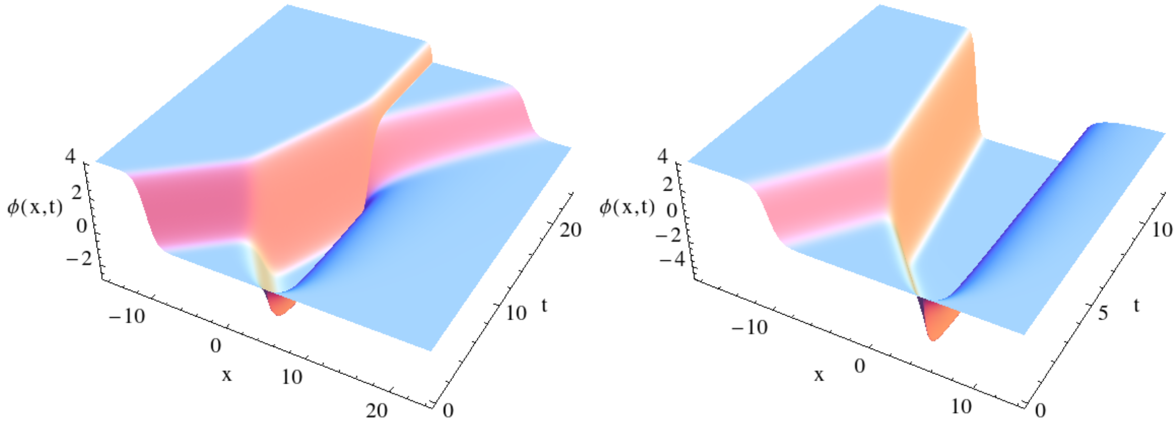
las soluciones disipativas de la ecuación de Burgers homogénea se obtienen reemplazando (7) en (2). Por su parte, para solucionar (6) con un pulso que se propaga a velocidad v, se introduce el cambio de variables $z = x - vt$ y en consecuencia $\psi(x,t) = \psi(z)$ satisface $\frac{d^2\psi}{dz^2} = -v\frac{d\psi}{dz}$. Las soluciones de esta ecuación toman la forma $\psi(z) = a_1e^{-vz} + b_1$ donde a_1, b_1 son constantes, por lo tanto:

$$\psi(x,t) = a_1e^{-v(x-vt)} + b_1\,. \tag{8}$$

Mediante (2) y (8) se obtiene la solución solitónica de la ecuación de Burgers:

$$\phi(x,t) = \frac{2a_1ve^{-v(x-vt)}}{a_1e^{-v(x-vt)} + b_1}. \tag{9}$$

Teniendo en cuenta que (6) es una ecuación lineal, es posible superponer N soluciones:



(a) (b)

Figura 2. Soluciones de la ecuación no homogénea de Burgers con $F(x,t) = -F_e\delta(x-5)$. En (a) el solitón incidente es descrito por $\psi(x,t) = e^{-4((x+10)-4t)} + 1$ y $F_e = -16$. Se obtiene un solitón transmitido y uno reflejado. En (b) $F_e = -36$ y solo se da reflexión.

$$\psi(x,t) = \sum_{i=1}^{N} \left[a_i e^{-v_i(x-v_it)} + b_i \right], \tag{10}$$

donde a_i, b_i, v_i para $i = 1, \ldots, N$ son constantes que describen a cada uno de los solitones. De esta manera $\phi(x,t) = -\frac{2}{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial x}$ permite obtener la solución con N solitones. En la Figura 1(a) se presenta una solución solitónica y en la Figura 1(b) se presenta la interacción de dos solitones obtenidos a partir de (10). Se nota que la velocidad del solitón resultante después de la interacción es diferente a la de los dos solitones iniciales. Las soluciones presentadas en esta sección son dos grupos de soluciones que se conocen para la ecuación de Burgers homogénea [7,8]. En la siguiente sección se estudia la forma en la que varían estas soluciones al introducirse la fuerza $F(x,t)$ en (1).

2.3. *Soluciones solitónicas de la ecuación no homogénea*

En esta sección se analiza el efecto que tiene $F(x,t)$ en la ecuación de Burgers no homogénea sobre soluciones solitónicas. Cuando $F(x,t) = F_e\delta(x-x_e)$ se presentan solitones. En este caso F_e, x_e son constantes y el potencial es: $V(x,t) = -\frac{F_e}{2}H(x-x_e)$. La función $\delta(x)$ denota a la delta de Kronecker y $H(x)$ es la función de Heaviside.

En este caso, la ecuación (4) toma la forma:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{\partial\psi}{\partial t} \quad \text{si} \quad x < x_e\,, \tag{11}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{F_e}{2}\psi = \frac{\partial\psi}{\partial t} \quad \text{si} \quad x \geq x_e. \tag{12}$$

Tal como se estudia en la sección previa, la ecuación (11) posee soluciones solitónicas en $x < x_e$. Para la ecuación (12), existen soluciones viajeras que dan lugar a solitones en la región $x \geq x_e$. Así, buscando soluciones de la forma $\psi(x,t) = \psi(z)$ con $z = x - \beta t$, la ecuación (12) requiere:

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} + \beta\frac{d\psi}{dz} - \frac{F_e}{2}\psi = 0. \tag{13}$$

En la región $x \geq x_e$ se presenta un solitón transmitido cuando $F_e^2 > 16\beta$, en este caso la solución de (13) está dada por:

$$\psi(x,t) = C_1 e^{-\frac{1}{2}\left(\beta+\bar{F}\right)(x-\beta t)} + d_1 e^{-\frac{1}{2}\left(\beta-\bar{F}\right)(x-\beta t)}, \tag{14}$$

donde $\bar{F} = \sqrt{\beta^2 + 2F_e}$. Por medio de la transformación de Cole-Hopf se obtiene:

$$\phi(x,t) = \beta - \bar{F} + \frac{2C_1\bar{F}}{C_1 + d_1 e^{\bar{F}(x-\beta t)}}, \tag{15}$$

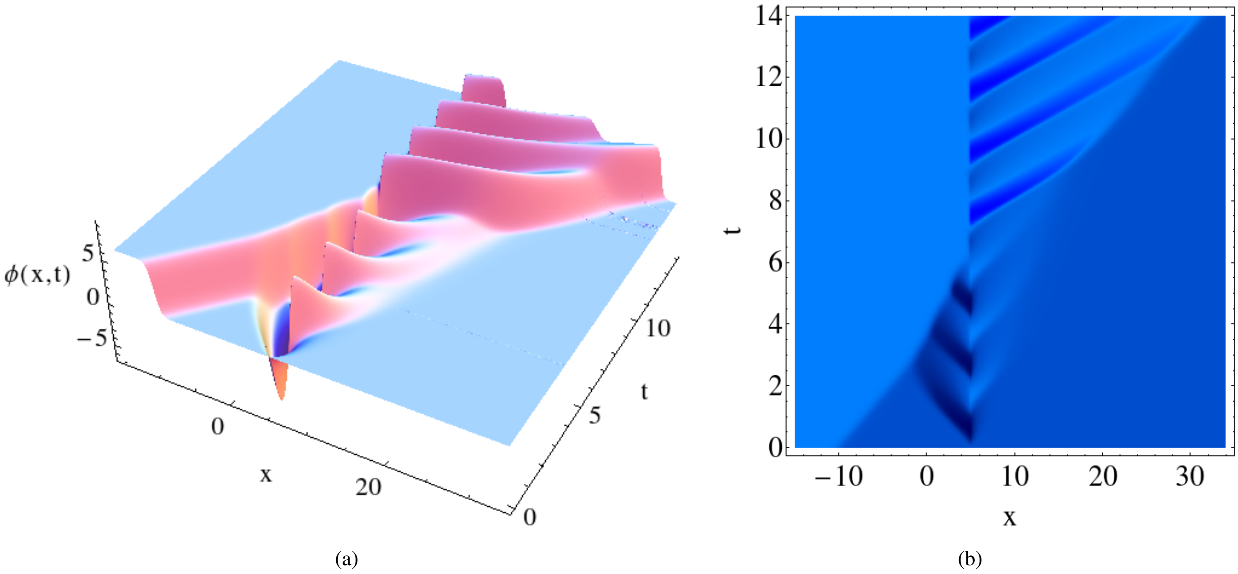


Figura 3. Solución de la ecuación de Burgers no homogénea con $F(x,t) = -16\sin(3t)\delta(x-5)$. El solitón incidente es descrito por $\psi(x,t) = e^{-4((x+10)-4t)} + 1$. La solución se obtiene resolviendo numéricamente (4) y aplicando la transformación (2).

que es un solitón transmitido. Las constantes C_1, d_1, β se deducen a partir de las condiciones de continuidad que establece (4) en $x = x_e$. Cuando $\beta^2 + 2F_e \leq 0$ se obtienen soluciones para (12) que no son solitones transmitidos. En este caso el solitón es reflejado y en $x > x_e$ se utiliza la solución de (12) $\psi(x,t) \propto e^{-F_e t/2}$ que da como resultado $\phi(x,t) = 0$ en $x > x_e$. En la Figura 2 se ilustran estas situaciones para un caso donde hay un solitón transmitido y otro en el que no hay transmisión.

En lo anterior se consideró F_e constante simulando una barrera donde llega el solitón. Se puede hacer que esta barrera sea variable en el tiempo. Tomando la forma $F(x,t) = f(t)\delta(x - x_e)$ la ecuación (12) no tiene solución analítica, sin embargo, la solución numérica presentada en la Figura 3 muestra como mediante un $f(t)$ oscilatorio el solitón incidente puede pasar o ser reflejado, se observa que el pulso transmitido ya no es un solitón y se desvanece.

En la siguiente sección se considera la ecuación fraccional de Burgers no homogénea teniendo en cuenta el formalismo planteado hasta el momento. En este sentido se utiliza la ecuación de Burgers fraccional propuesta en [10] y se adiciona un término $F(x,t)$ asociado a fuerzas externas. Se utiliza una transformada de Cole-Hopf generalizada que transforma la ecuación de Burgers fraccional en una ecuación diferencial en derivadas parciales. Luego se analizan soluciones solitónicas y disipativas de la ecuación fraccional de Burgers.

3. Derivadas fraccionales

Una derivada es una operación que cumple con las propiedades de linealidad y la regla de Leibniz del producto. De esta manera, en diversos contextos se pueden definir derivadas y en el caso de funciones de una variable la derivada tradicional de la función $f(t)$:

$$\frac{df(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} \tag{16}$$

se generaliza con el fin de extender el carácter local de la definición (16). Esto lleva a establecer la derivada fraccional de Riemman-Liouville de orden real α [5]:

$${}_aD_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau, \tag{17}$$

donde a y t son valores reales que denotan los límites en los que se debe incluir información de $f(t)$ con el fin de evaluar la derivada, n es el mayor entero que satisface $n-1 \leq \alpha < n$ y $\Gamma(z)$ denota a la función Gamma.

También se define la derivada fraccional de Caputo [11]:

$$ {}_{a}^{C}D_t^{\alpha} f(t) \;=\; \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau, \tag{18} $$

en esta definición $f^{(n)}(\tau)$ denota la n-esíma derivada de $f(t)$.

Teniendo en cuenta las definiciones (17), (18) se puede establecer que las derivadas fraccionales incluyen un proceso de memoria que es dado por una ley de potencias. De esta manera se le da más valor al pasado reciente que a eventos alejados del tiempo t. Si la variable independiente se encuentra relacionada con posiciones en el espacio, las derivadas fraccionales hacen referencia a la posibilidad de una dinámica con desplazamientos de largo alcance. Así en física, ecuaciones diferenciales con derivadas fraccionales se han utilizado para modelar procesos en diversos sistemas [5,11]. Una revisión del concepto de derivada fraccional, de las diferentes formas de definir estas derivadas y los métodos utilizados en este campo de las matemáticas, son presentados en [6].

4. Ecuación fraccional de Burgers no homogénea

En esta sección se estudia la ecuación fraccional de Burgers no lineal planteada en [3,10] con un término adicional $F(x,t)$:

$$ \phi_t(x,t) + \frac{1}{2}\, {}_aD_x^{\alpha}\big({}_aD_x^{1-\alpha}\phi(x,t)\big)^2 - \gamma\phi_{xx}(x,t) = F(x,t), \tag{19} $$

siendo $-\infty < x < +\infty$, $t \geq 0$ y $0 < \alpha < 1$. En esta ecuación, ${}_aD_x^{\alpha}\phi(x,t) = \lambda^{\alpha-1}\,{}_a^CD_x^{\alpha}\phi(x,t)$ es la derivada fraccional, ${}_a^CD_x^{\alpha}\phi(x,t)$ es la derivada fraccional de Caputo dada por la ecuación (18), λ es una longitud que define una escala de referencia, $F(x,t)$ está asociado a fuerzas externas y γ es el coeficiente de viscosidad. Por su parte, la ecuación (19) está sometida a la condición inicial:

$$ \phi(x,0) = \phi_0(x), \tag{20} $$

en donde $\phi(x,t)$ y $\phi_0(x)$ son funciones definidas en el conjunto de los números reales. Adicionalmente se debe considerar que los problemas físicos se plantean en dominios acotados, en este caso el problema está bien definido en la región $a \leq x < \infty$ y $0 \leq t$.

4.1. *Transformación generalizada de Cole-Hopf*

Para simplificar la ecuación (19) existe una transformación que es la generalización de la transformación de Cole-Hopf clásica al caso fraccional y está definida por la expresión [3,10]:

$$ \phi(x,t) = -2\gamma\, {}_aD_x^{\alpha} \log y(x,t), \tag{21} $$

donde γ es el coeficiente de viscosidad del medio. Reemplazando la ecuación (21) en (19) se obtiene:

$$ -2\gamma_a D_x^{\alpha}\left[\frac{y_t - \gamma y_{xx}}{y}\right] = F(x,t). \tag{22} $$

Además, si el término de fuerza externa está asociado a fenómenos no locales entonces $F(x,t)$ resulta de un potencial $V(x,t)$ que satisface:

$$ F(x,t) = -2\gamma_a D_x^{\alpha} V(x,t), \tag{23} $$

de tal manera que al reemplazar (23) en (22) resulta:

$$ {}_aD_x^{\alpha}\left[\frac{y_t(x,t) - \gamma y_{xx}(x,t)}{y(x,t)} - V(x,t)\right] = 0. \tag{24} $$

Debido a que la derivada de Caputo de una constante es cero, la ecuación (24) implica que:

$$ \frac{y_t(x,t) - \gamma y_{xx}(x,t)}{y(x,t)} - V(x,t) = C_1(t), \tag{25} $$

donde la función $C_1(t)$ depende únicamente del tiempo ya que la derivada fraccional de Caputo se calcula con respecto a x. Para lo que sigue se define la función:

$$u(x,t) = V(x,t) + C_1(t), \tag{26}$$

de tal manera que la ecuación (25) satisface:

$$\gamma y_{xx}(x,t) - y_t(x,t) - u(x,t)y(x,t) = 0, \;\; -\infty < x < +\infty, \;\; t \geq 0. \tag{27}$$

La condición inicial se obtiene reemplazando (20) en (21) y despejando $y(x,0)$:

$$y(x,0) = q(x) = \exp\big[-\frac{1}{2\gamma} {}_aD_x^{-\alpha}\phi_o(x)\big]. \tag{28}$$

En la siguiente parte se utilizan diferentes tipos de $u(x,t)$ para hallar la fuerza asociada a estos términos y obtener numéricamente la solución de la ecuación de Burgers. En la sección 4.2 se hace un estudio de las consecuencias de la ecuación (27) cuando $y(x,t) = y(x - vt)$.

4.2. *Ecuación fraccional de Burgers homogénea*

Se obtienen pulsos localizados a partir de la ecuación (27) cuando $y(x,t) = y(x - vt) = y(z)$ donde v es la velocidad del pulso. De esta manera, la ecuación (27) se expresa:

$$\gamma \frac{d^2y(z)}{dz^2} + v\frac{dy(z)}{dz} - u(z,t)y(z) = 0, \tag{29}$$

que es una ecuación diferencial lineal homogénea. El término $u(z,t)$ está relacionado con la fuerza externa y una primera opción es considerar $u(z,t) = 0$. Para este caso se obtiene la solución:

$$y(z) = C_1 \exp\left[-\frac{v}{\gamma}z\right] + C_2, \tag{30}$$

donde $z = x - vt$. Para continuar se utiliza la ecuación (21) que está definida en términos de la derivada de Caputo, donde $0 < \alpha < 1$ implica $n = 1$, como consecuencia:

$$\phi(x,t) = -2\gamma\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^x (x - x')^{-\alpha}\frac{\partial}{\partial x'}\log[y(x',t)]dx'. \tag{31}$$

En la ecuación (31) aparece la expresión $\Psi_0(x,t) \equiv -\frac{\partial}{\partial x}\log y(x - vt)$ que está dada por:

$$\Psi_0(x,t) = \frac{v}{\gamma}\frac{\exp\left[-\frac{v}{\gamma}(x - vt - b)\right]}{1 + \exp\left[-\frac{v}{\gamma}(x - vt - b)\right]} \tag{32}$$

con $b = -\frac{\gamma}{v}\log(C1/C2)$. La ecuación (32) es la solución de un solitón de la ecuación de Burgers normal obtenida en la ecuación (9), se nota que el efecto de las constantes C_1, C_2 es establecer el desfase b del pulso. Al incorporar el resultado (32) en el análisis de la ecuación fraccional de Burgers se obtiene:

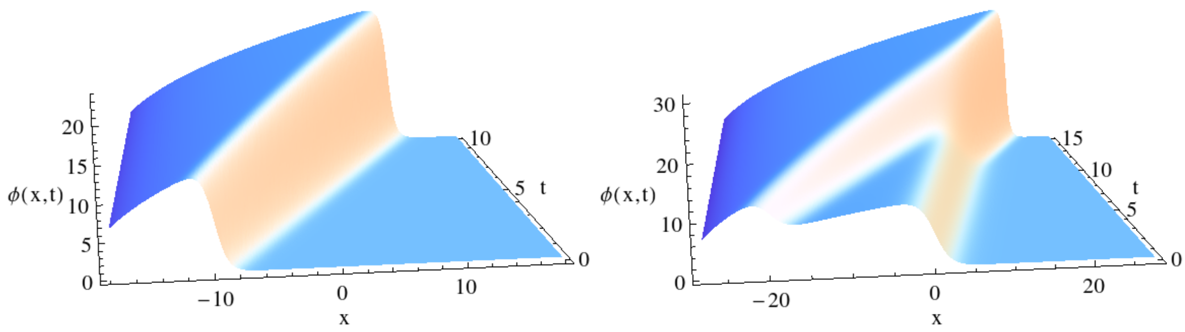
$$\phi(x,t) = \frac{2\gamma}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^x \frac{\Psi_0(x',t)}{(x - x')^{\alpha}}dx'. \tag{33}$$

Teniendo en cuenta que $\lim_{x\to-\infty}\Psi_0(x,t) = v/\gamma$, se encuentra que en el límite $a \to -\infty$ diverge haciendo que la solución localizada no sea posible en ese caso. Como consecuencia, tomar a finito hace que $\phi(x,t)$ en (33) cambie su valor con una relación proporcional al tamaño de a. Por otra parte, cuando $u(z,t) = c$ es una constante diferente de cero la ecuación (29) tiene por solución:

$$y(z) = C_1\exp[\lambda_+ z] + C_2\exp[\lambda_- z], \tag{34}$$

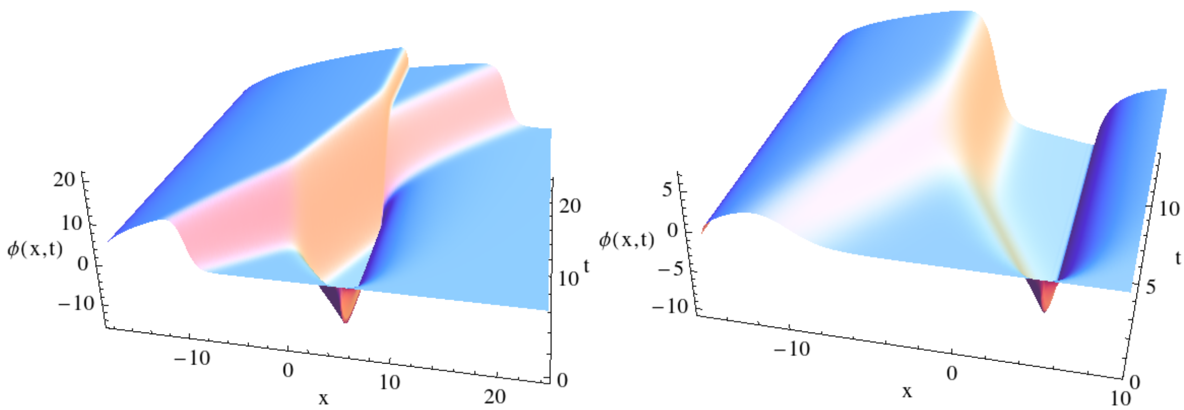
con $\lambda_\pm = \frac{-v\pm\sqrt{v^2+4\gamma c}}{2\gamma}$. Por lo tanto:

$$\Psi(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x}\log y(x - vt) = -\lambda_+ - \frac{\partial}{\partial x}\log(1 + \exp[-\kappa(x - vt - b)]), \tag{35}$$



(a) (b)

Figura 4. Soluciones de la ecuación (19) con $F(x,t) = 0$, $\gamma = 1$ y $\alpha = 0.5$. En (a), $y(x,t) = e^{-2((x+10)-2t)} + 1$ con $a = -20$. En (b) $y(x,t) = e^{-((x+4)-t)} + e^{-2((x+10)-2t)} + 1$, siendo $a = -30$.



(a) (b)

Figura 5. Soluciones de la ecuación (19) con $F(x,t) = F_e(x - x_e)^{-\alpha} H(x - x_e)$, $x_e = 5$, $F_e = 1$ y $\gamma = 1$. En (a) $\alpha = 0.1$, $y(x,t) = e^{-2((x+10)-2t)} + 1$ y $a = -20$. En (b) $\alpha = 0.5$, $y(x,t) = e^{-((x+10)-t)} + 1$ y $a = -15$.

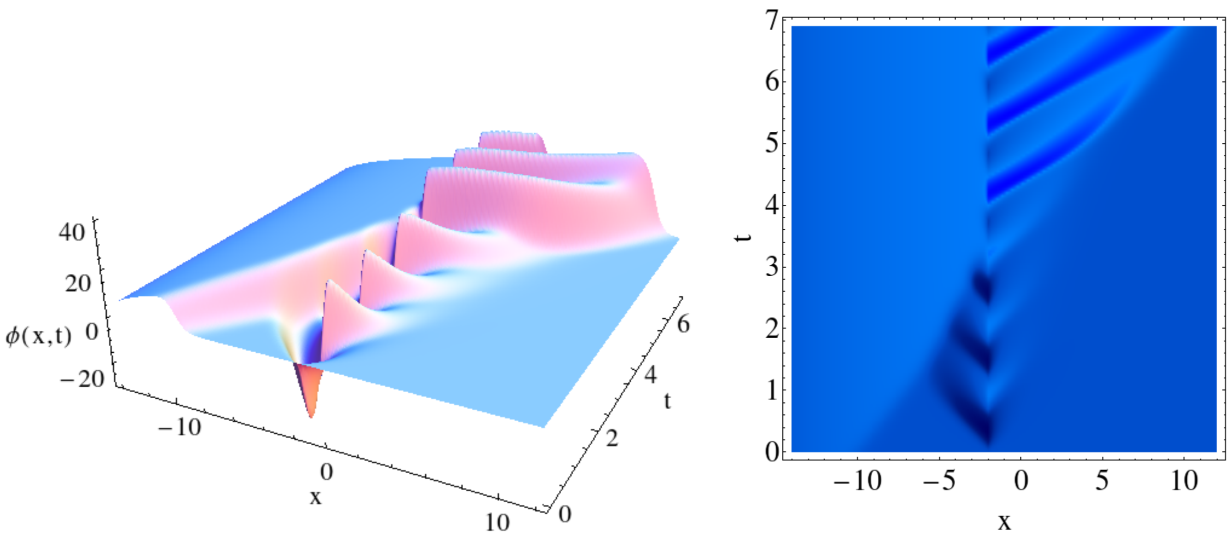
siendo $\kappa = \lambda_+ - \lambda_- = \frac{\sqrt{v^2 - 4\gamma c}}{\gamma}$ y $b = \frac{1}{\kappa} \log \frac{C_2}{C_1}$. Al buscar la solución de la ecuación fraccional de Burgers se obtiene:

$$\phi(x,t) = \frac{2\gamma}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (\lambda_+ + \Psi_0(x',t)) \frac{1}{(x-x')^\alpha} dx'. \tag{36}$$

donde $\Psi_0(x,t)$ es similar a lo encontrado en el caso $c = 0$ con una redefinición de las constantes. En esta expresión la integral $\int_a^x \frac{\lambda_+}{(x-x')^\alpha} dx'$ resulta en algo que aumenta de tamaño conforme x aumenta, este no es el tipo de comportamiento de los pulsos localizados.

Por lo tanto soluciones localizadas requieren que $\lambda_+ = 0$ lo que implica que $c = 0$. Las soluciones obtenidas en este caso también son soluciones de la ecuación fraccional, sin embargo, en estas soluciones la no linealidad es mayor que la dispersión del pulso haciendo que el pulso aumente su amplitud con la dinámica del sistema. Tal como en el caso ordinario, teniendo en cuenta que (29) es una ecuación diferencial lineal, es posible superponer soluciones de la forma $y(z) = \sum_{i=1}^N y_i(z)$, donde $i = 1, \ldots, N$ determina las constantes que describen a cada uno de los pulsos dados por $y_i(z)$. De esta manera, $\phi(x,t) = -2\gamma {}_a^C D_z^\alpha \log[y(z)]$ permite obtener la solución con N pulsos para el caso fraccional.

En la Figura 4(a) se presenta con una onda localizada. Por otra parte, en la Figura 4(b) se presenta la interacción de dos pulsos obtenidos a partir de (10). Dichos pulsos interaccionan de la misma manera que en el caso ordinario, sin embargo, el valor de α modifica la forma del pulso respecto al que se presenta en el caso ordinario. En la siguiente parte se busca estudiar la forma en la que varían estas soluciones al introducirse la fuerza $F(x,t)$ en (19).



(a) (b)

Figura 6. Soluciones de la ecuación (19) con $F(x,t) = F_e \sin(1.8\pi t)(x - x_e)^{-\alpha} H(x - x_e)$, $x_e = 5$, $F_e = 8$, $\gamma = 1$ y $\alpha = 0.5$. En este caso $y(x,t) = e^{-3((x+10)-3t)} + 1$ y $a = -15$.

4.3. *Ecuación fraccional de Burgers no homogénea*

En esta sección se busca entender lo que sucede cuando el término $F(x,t)$ que aparece en la ecuación (19) representa una barrera de potencial que en la ecuación (27) implica $u(x,t) = F_e\Gamma(1-\alpha)\, H(x - x_e)$ de tal manera que la fuerza externa es de la forma $F(x,t) = -2\gamma F_e (x - x_e)^{-\alpha} H(x - x_e)$, siendo F_e, x_e, c constantes y el potencial $V(x,t) = F_e\Gamma(1-\alpha)\, H(x - x_e) - c$. Por lo tanto la ecuación (25) toma la forma:

$$y_t(x,t) - \gamma y_{xx}(x,t) - c y(x,t) = 0 \quad \text{si} \quad x < x_e, \tag{37}$$

$$y_t(x,t) - \gamma y_{xx}(x,t) - F_e\Gamma(1-\alpha) y(x,t) = 0 \quad \text{si} \quad x \geq x_e. \tag{38}$$

La ecuación (37) posee soluciones localizadas en $x < x_e$ cuando la constante c es nula. Para la ecuación (38), al buscar soluciones de la forma $y(x,t) = y(z)$ con $z = x - \beta t$, la ecuación (38) requiere:

$$\beta y_z(z) + \gamma y_{zz}(z) + F_e\Gamma(1-\alpha) y(z) = 0. \tag{39}$$

En la región $x \geq x_e$ la solución de (39) está dada por:

$$y(x,t) = d_1 e^{-\frac{1}{2\gamma}\left(\beta + \bar{F}\right)(x-\beta t)} + d_2 e^{-\frac{1}{2\gamma}\left(\beta - \bar{F}\right)(x-\beta t)}, \tag{40}$$

donde $\bar{F} = \sqrt{\beta^2 - 4\gamma c - 4\gamma F_e \Gamma(1-\alpha)}$. La solución (40) es equivalente a la que se obtuvo en la sección 4.2 si se considera $\lambda'_\pm = \frac{-1}{2\gamma}(\beta \pm \bar{F})$, de tal manera que la función $u(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x} \log y(x - \beta t)$ es:

$$\Psi(x,t) = -\lambda'_+ - \frac{\partial}{\partial x} \log(1 + \exp\left[-\kappa(x - \beta t - b)\right]), \tag{41}$$

siendo, en este caso, $\kappa = \lambda'_+ - \lambda'_- = \frac{-\bar{F}}{\gamma}$ y $b = \frac{1}{\kappa} \log \frac{d_2}{d_1}$. Por lo dicho en la sección 4.2 para obtener soluciones que mantengan su forma es necesario que $\lambda'_+ = 0$, lo cual es equivalente a quitar la barrera de potencial y en consecuencia la ecuación (38) no tiene soluciones solitónicas. En la Figura 5(a) se grafica la interacción de un pulso con una barrera de fuerza donde se presenta el pulso incidente pero en la interacción con la barrera no hay pulsos transmitidos. No obstante, si se compara con el resultado presentado en la Figura 2(a) se observa una similitud dado que los resultados del caso fraccional deben coincidir con los del caso ordinario en el límite cuando el orden de la derivada tiende a un valor entero. En la Figura 5(b) la onda incidente es reflejada e interacciona con la onda incidente tal como sucede en el caso ordinario. En este caso también se puede hacer que la barrera sea variable en el tiempo, tomando $F(x,t) = f(t)(x - x_e)^{-\alpha} H(x - x_e)$, donde la solución numérica es presentada en la Figura 6 y muestra como mediante un $f(t)$ oscilatorio el pulso incidente genera un pulso transmitido que pierde las características de pulso.

5. Conclusiones

En este trabajo se parte de los resultados conocidos para el estudio de la ecuación de Burgers no homogénea y se amplían con el fin de analizar un problema no lineal con ecuaciones diferenciales fraccionales. Se presenta la ecuación de Burgers no homogénea y se resuelve con el uso de la transformación de Cole-Hopf. Con esto es posible obtener soluciones localizadas, analizar la interacción de pulsos y estudiar las consecuencias de la inclusión de una barrera de potencial tanto constante como variable. A partir de ello se procede al estudio de la ecuación de Burgers fraccional no homogénea que se resuelve con el uso de una versión modificada de la transformación de Cole-Hopf. También se obtienen soluciones localizadas y se hace un estudio análogo al llevado a cabo con la ecuación de Burgers normal. Los resultados de los casos ordinario y fraccional presentan similitud, sin embargo, en el caso fraccional aparecen características que alteran las predicciones del cálculo ordinario, ya que en el caso de barreras existe un pulso transmitido pero este se deforma y ya no se considera una solución solitónica de la ecuación diferencial.

6. Agradecimientos

Los autores de este artículo agradecemos el apoyo de la Vicerrectoría de Investigaciones y Postgrados de la Universidad de Nariño por la ayuda financiera para el desarrollo de este trabajo.

Referencias

[1] P Miškinis. New exact solutions of one-dimensional inhomogeneous burgers equation. *Reports on Mathematical Physics*, 48(1–2):175–181, 2001. Proceedings of the XXXII SYMPOSIUM ON MATHEMATICAL PHYSICS.

[2] Axel Schulze-Halberg. New exact solutions of the non-homogeneous burgers equation in (1+1) dimensions. *Physica Scripta*, 75(4):531, 2007.

[3] Paulius Miškinis et al. A generalization of the hopf-cole transformation. *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*, 9:016–19, 2013.

[4] P. G. Drazin and R. S. Johnson. *Solitons : an introduction*. Cambridge texts in applied mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[5] Igor Podlubny. *Generalized viscoelastic models: their fractional equations with solutions*, volume 198. Academic press, New York, NY, USA, 1998.

[6] Victor Giraldo Buesaquillo, Alejandro Pérez, and Alvaro Rugeles. Cálculo fraccional. *Revista de Ciencias*, 4(1), 2014.

[7] Esmaeel Hesameddini and Razieh Gholampour. Soliton solutions of the burgers-Type equation. *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, 5(31):1541–1552, 2010.

[8] Julian D Cole et al. On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics. *Quart. Appl. Math*, 9(3):225–236, 1951.

[9] Eberhard Hopf. The partial differential equation $u_t + uu_x = u_{xx}$. *Communications on Pure and Applied mathematics*, 3(3):201–230, 1950.

[10] P Miškinis. Some properties of fractional burgers equation. *Mathematical Modelling and Analysis*, 7(1):151–158, October-November 2002.

[11] Kai Diethelm. *The analysis of fractional differential equations: an application-oriented exposition using differential operators of Caputo type*, volume 2004. Springer Verlag, New York, NY, USA, 2010.