

Soluciones solitónicas de la ecuación de Gross-Pitaevskii con un potencial asimétrico

Soliton solutions of the Gross-Pitaevskii equation with an asymmetric potential

Cristian Libardo Castro ^{a*}, Alejandro Pérez Riascos ^{b**}, Alvaro Rugeles Pérez ^a.

^aDepartamento de Física, Universidad de Nariño, Pasto.

^bInstituto de Física, Universidad Nacional Autónoma de México, México, D.F.

Aceptado Septiembre; Publicado en línea Noviembre.

ISSN 2256-3830.

Resumen

En este trabajo se estudia la ecuación unidimensional de Gross-Pitaevskii con un potencial espacialmente asimétrico y dependiente del tiempo conocido como potencial trinquete. Por medio de métodos variacionales se obtienen soluciones multisolitónicas de la ecuación de Gross-Pitaevskii, en particular, se analizan colisiones entre solitones y su efecto en el transporte de materia para diferentes parámetros que definen al potencial. También se estudia la capacidad de este potencial para formar moléculas solitónicas y las propiedades de estos estados. Los resultados obtenidos sugieren métodos de control de solitones brillantes en condensados de Bose-Einstein.

Palabras Claves: Ecuación de Gross-Pitaevskii, solitones.

Abstract

In this paper we study the one-dimensional Gross-Pitaevskii equation with a time-depend spatially asymmetric potential known as a ratchet potential. By means of variational methods we obtain multi-soliton solutions of the Gross-Pitaevskii equation, in particular, we analyze the collisions between solitons for different parameters that define the potential. Also, we study the capacity of ratchet potentials to synthesize soliton molecules and the properties of these states. The results suggest methods to control bright solitons in Bose-Einstein condensates.

Keywords: Gross-Pitaevskii equation, solitons.

1. Introducción

El término solitón hace referencia a un pulso localizado descrito por una ecuación diferencial no lineal en la que los términos dispersivos y no lineales se compensan haciendo que el pulso se propague sin distorsión [1]. Se han encontrado solitones en diferentes campos de la física como la mecánica de fluidos [2], en la óptica no lineal [3], en superconductividad y sistemas mesoscópicos [4], física de plasma [5], entre otros campos [2]. Diferentes técnicas

* cristianoju@gmail.com

**aaapprrr@gmail.com

analíticas se han desarrollado con el fin de estudiar ecuaciones diferenciales con soluciones solitónicas [1,6]. Por otra parte, en mecánica cuántica en sistemas mesoscópicos y sistemas con muchas partículas surge la ecuación de Gross-Pitaevskii que describe la dinámica de un condensado de Bose-Einstein [4,7,8]. Las soluciones de esta ecuación definen una función de onda relacionada con la densidad de partículas de un condensado de bosones en un potencial externo [4,8]. En los últimos años se han implementado diferentes sistemas que permiten controlar condensados de Bose-Einstein en diversos campos y con múltiples aplicaciones [9,10,11,12].

En otro contexto se encuentran los fenómenos de transporte en potenciales que dependen del espacio y que pueden variar en el tiempo. Un ejemplo de este fenómeno es el efecto trinquete donde se obtiene un flujo de materia en una dirección específica a partir de un potencial periódico asimétrico. El efecto trinquete se ha estudiado en campos tan variados como el estudio del transporte en la célula, motores brownianos, entre otros [13,14,15].

En este trabajo se analizan soluciones solitónicas de la ecuación de Gross-Pitaevskii con un potencial asimétrico con el fin de estudiar el efecto trinquete en el transporte de solitones. En la primera parte se realiza una revisión en la que se presenta la ecuación de Gross-Pitaevskii y los resultados obtenidos para el efecto trinquete en un solitón. En la segunda parte del trabajo se estudian soluciones de la ecuación Gross-Pitaevskii con múltiples solitones. Los resultados sugieren que por medio de un potencial asimétrico se pueden construir estados acoplados con características de transporte diferentes a lo observado para solitones individuales.

2. Ecuación de Gross-Pitaevskii con un potencial trinquete

En esta sección se presenta a la ecuación de Gross-Pitaevskii (GP), los potenciales trinquete y las características que poseen las soluciones solitónicas en este tipo de potenciales. Para el caso tridimensional la ecuación de Gross-Pitaevskii de la función $\Psi(\mathbf{r}, t)$ está dada por [4,7,8]:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(\mathbf{r}, t) + V(\mathbf{r}, t)\Psi(\mathbf{r}, t) + g|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2\Psi(\mathbf{r}, t) = i\hbar\frac{\partial\Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t}. \quad (1)$$

En esta expresión $V(\mathbf{r}, t)$ describe a un potencial externo con dependencia espacial y temporal, el parámetro g es un valor real que permite modular la no linealidad del sistema. La ecuación (1) que es no lineal y que depende de variables espaciales y temporales se deduce en el contexto de mecánica cuántica de sistemas mesoscópicos con muchas partículas [4] tal como ocurre en la superconductividad y los condensados de Bose-Einstein [4,7]. Por otra parte, si $V = 0$ la ecuación (2) se reduce a la ecuación no lineal de Schrödinger (NLS) estudiada en mecánica cuántica en sistemas no lineales [4], y óptica no lineal [3]. Se ha demostrado que la ecuación NLS y la ecuación GP tienen soluciones solitónicas que son pulsos localizados que se propagan sin distorsión debido a la compensación entre los términos no lineales y dispersivos [1]. En la siguiente parte de este trabajo se estudian las características de soluciones multisolitónicas de la ecuación de Gross-Pitaevskii con un potencial asimétrico que permite controlar el transporte de materia.

Se parte de la ecuación unidimensional de Gross-Pitaevskii para la función $\Psi(x, t)$ dada por [16,17]³:

$$i\frac{\partial\Psi(x, t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Psi(x, t)}{\partial x^2} + |\Psi(x, t)|^2\Psi(x, t) - V(x, t)\Psi(x, t) = 0. \quad (2)$$

En esta ecuación se considera el potencial trinquete dado por [16,17]:

$$V(x, t) = V_0 f(t) [\cos(x) + \cos(2x + \phi)], \quad (3)$$

donde $f(t) = \sin(\omega t) + \sin(2\omega t)$ y los valores V_0 , ω , ϕ son parámetros constantes. Los potenciales trinquete han sido estudiados ampliamente en la literatura en el contexto del transporte de materia en diversos sistemas [13,14,15]. La importancia de estos potenciales radica en que a partir de la asimetría espacial y temporal se puede obtener una corriente neta de partículas en una dirección que depende del tamaño o masa de las partículas de tal manera que en estos potenciales se puede controlar el transporte de materia [13,14,15]. En la figura 1 se grafica el potencial trinquete descrito por la ecuación (3), se observa como surge un patrón de mínimos y máximos con una estructura periódica pero no simétrica con respecto a la inversión espacial.

³ Por simplicidad se considera el caso adimensional de la ecuación de Gross-Pitaevskii.

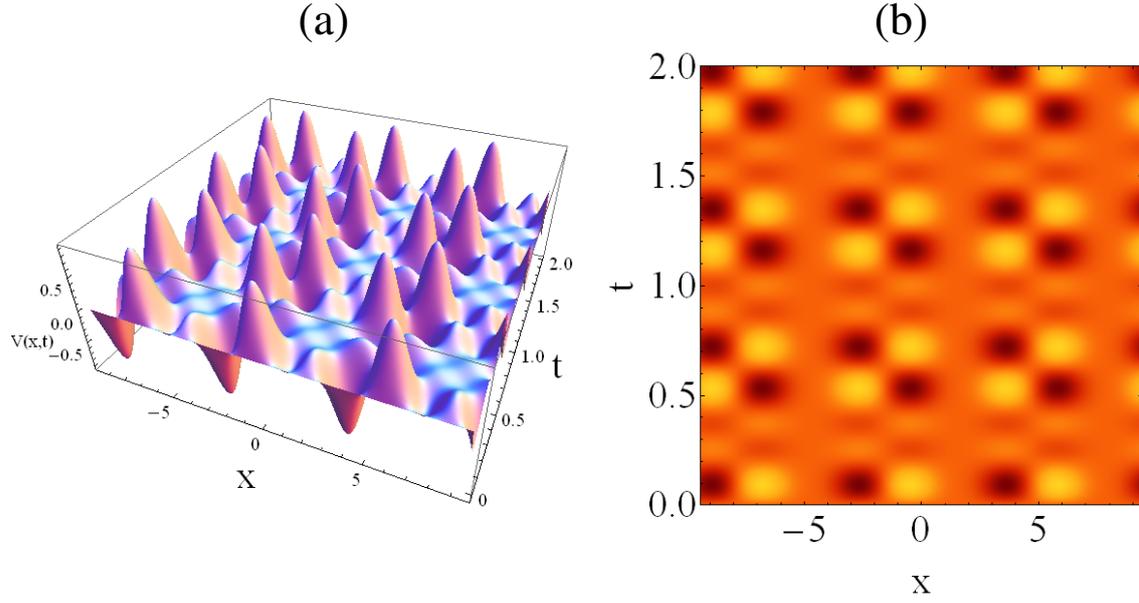


Figura 1. Potencial trinquete $V(x, t)$ definido por medio de la ecuación (3). Se utilizan los parámetros: $V_0 = 0.3$, $\phi = \pi/2$, $\omega = 10$. (a) Grafica en tres dimensiones. (b) Grafica de densidad, los diferentes colores indican los valores del potencial. En esta representación se observa como los máximos y mínimos del potencial siguen una configuración periódica pero no simétrica con respecto a la inversión espacial.

Con el fin de establecer las características de las soluciones solitónicas de la ecuación (2) con un potencial trinquete de la forma (3) se utilizan métodos variacionales [4]; teniendo en cuenta que la ecuación de Gross-Pitaevskii (2) puede obtenerse a partir de un Hamiltoniano de la forma [4]:

$$\mathcal{H} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2} \left| \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial x} \right|^2 + \frac{1}{2} |\Psi(x, t)|^4 - V(x, t) |\Psi(x, t)|^2 \right] dx. \quad (4)$$

Se propone una solución de prueba motivada por la forma que tienen las soluciones solitónicas de la ecuación NLS que es el caso en el que $V = 0$, por lo tanto [4,16]:

$$\Psi(x, t) = N \operatorname{sech} \left[\frac{N}{2} (x - x_0(t)) \right] e^{iv(t)[x - x_0(t)]}, \quad (5)$$

donde $x_0(t)$ es la posición del centro de masa del solitón y $v(t) = dx_0/dt$. La introducción de (5) en la expresión (4) permite establecer un Hamiltoniano efectivo que define la dinámica de la variable $x_0(t)$. Se obtiene [16,17]:

$$H(x_0, p, t) = \frac{p^2(t)}{2N} + NV_{\text{efec}}(x_0, t), \quad (6)$$

con $p(t) = N v(t)$ y un potencial efectivo $V_{\text{efec}}(x_0, t)$ dado por:

$$V_{\text{efec}}(x_0, t) = \frac{\pi}{N} V_0 f(t) \left[\frac{\cos x_0}{\sinh(\pi/N)} + 2 \frac{\cos(2x_0 + \phi)}{\sinh(2\pi/N)} \right]. \quad (7)$$

Se considera que el potencial es débil y en consecuencia no afecta la forma del solitón durante su movimiento. De esta manera el problema se reduce a estudiar el movimiento del centro de masa del solitón como una partícula clásica. A partir del Hamiltoniano efectivo (6) se obtiene la ecuación:

$$\frac{dp(t)}{dt} = - \frac{\partial H(x_0, p, t)}{\partial x_0(t)}, \quad (8)$$

por lo tanto la ecuación de movimiento para $x_0(t)$ es:

$$\frac{d^2 x_0(t)}{dt^2} = - \frac{\partial V_{\text{efec}}(x_0, t)}{\partial x_0(t)}. \quad (9)$$

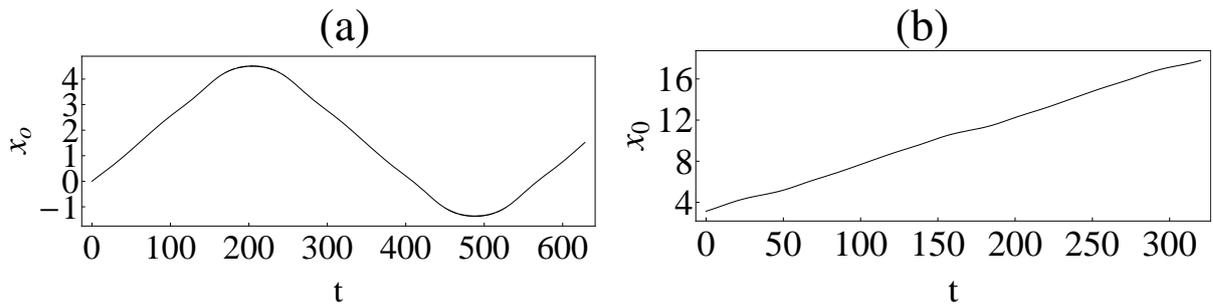


Figura 2. Solución numérica de la ecuación (9) que define el movimiento de la posición $x_0(t)$ del centro de masa del solitón dado por (5). El potencial está definido por los parámetros $V_0 = 0.3$, $\phi = \pi/2$, $\omega = 10$. (a) Movimiento oscilatorio obtenido para una partícula de masa $N = 2$. (b) Movimiento balístico para una partícula con masa $N = 3$.

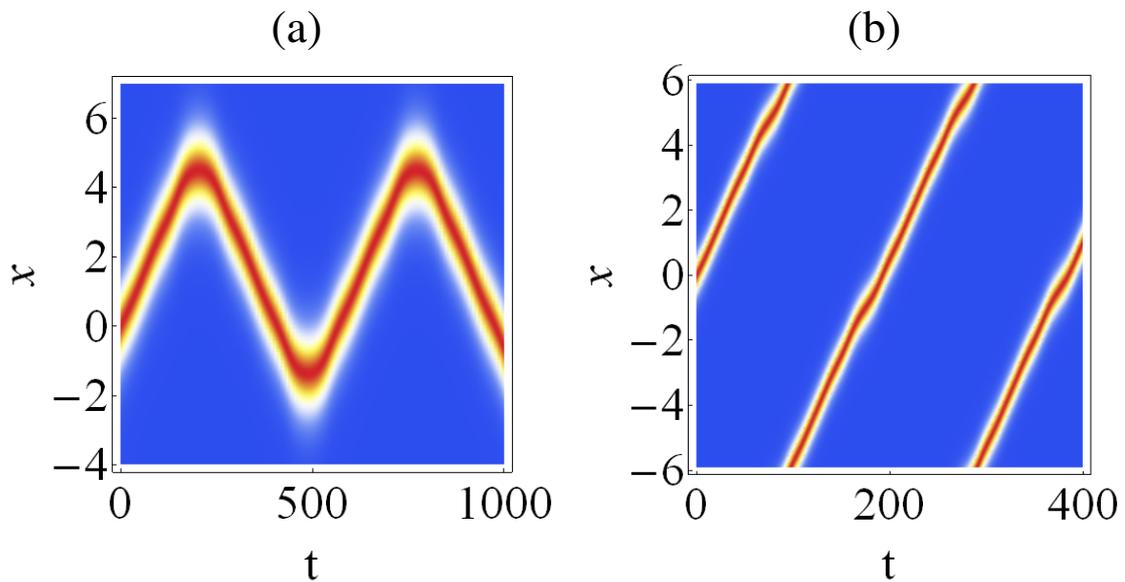


Figura 3. Dinámica de un solitón en un potencial trinquete. Se presenta la gráfica de densidad de $|\Psi(x, t)|^2$ deducida a partir de la ecuación (5) y las soluciones numéricas obtenidas en la figura 2. (a) Solitón con un movimiento oscilatorio que en promedio no transporta materia. (b) Solitón con una dinámica balística con transporte neto de materia; en este caso se utilizan condiciones de frontera periódicas.

De esta manera, la solución con un solitón de la ecuación unidimensional (2) se reduce a analizar el comportamiento de $x_0(t)$ de una partícula de masa N por medio de métodos de mecánica clásica, hasta se puede pensar la dinámica del sistema como la de una partícula descrita por el Hamiltoniano (6). Esta conexión es posible debido a que en la ecuación de Gross-Pitaevskii una solución solitónica puede interpretarse como una onda descrita por la ecuación (2) o como un condensado de partículas descrito por el Hamiltoniano (4), esta dualidad onda partícula en sistemas mesoscópicos es discutida en detalle en [4].

En la figura 2 se presentan dos tipos de soluciones $x_0(t)$ para el centro de masa de un solitón en un potencial trinquete. Los valores se obtienen solucionando numéricamente la ecuación (9) con el potencial efectivo dado por (7). En la figura 2 (a) es obtenida una solución oscilatoria que no permite el transporte de materia, por otra parte, en la figura 2(b) se encuentra un movimiento balístico que hace que haya una corriente neta de materia. En la figura 3 se presentan las correspondientes soluciones de la ecuación de Gross-Pitaevskii unidimensional (2) obtenidas mediante el método variacional sustituyendo las trayectorias de la figura 2 en la función de prueba (5); para el caso balístico se utilizan condiciones de frontera periódicas.

Diversas características del solitón como su amplitud N , su posición inicial $x_0(0)$, su velocidad inicial $v(0)$, así como los parámetros V_0 , ω , ϕ que definen al potencial (3) pueden influir en la obtención de soluciones oscilatorias o soluciones balísticas. Con el fin de estudiar el transporte de materia y su dependencia con diferentes parámetros se define la velocidad promedio [16]:

$$\bar{v} = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) dt, \quad (10)$$

el tiempo T denota un valor de tiempo constante en el que se realiza el promedio temporal. A partir del valor de \bar{v} , si el solitón se encuentra oscilando en una región sin un movimiento promedio neto, su velocidad promedio es aproximadamente cero. Por otra parte, si el solitón adquiere un movimiento neto preferente en la dirección positiva o negativa, su velocidad promedio es diferente de cero, en estos casos se presenta un desplazamiento del centro de masa del solitón.

En la figura 4(a) se grafica la velocidad promedio para un tiempo $T \gg 1$ en función de la amplitud N del solitón. Para cada valor de N se resuelve numéricamente la ecuación (9) con las condiciones iniciales $x_0(0) = 0$ y $v(0) = 0$ y se calcula el valor \bar{v} . Se observa que para los parámetros elegidos se obtiene transporte en la región $N > 2$, por otra parte, solitones con amplitudes en el intervalo $0 < N \leq 2$ se mantienen atrapados con un transporte de materia nulo. En la figura 4(b) se realiza un análisis similar para un solitón con $N = 4$ con condiciones iniciales $x_0(0) = -\pi/2$ y $v(0) = 0$, se grafica la velocidad promedio \bar{v} como función de la frecuencia ω del potencial. Se encuentra que para valores de $0 < \omega < 2$ la dinámica del solitón es susceptible al cambio de frecuencia, por otro lado para $\omega > 2$ los resultados tienden a estabilizarse en un valor negativo constante; a partir de esto se puede establecer que el transporte de solitones en un potencial trinquete depende del solitón así como de los parámetros que definen al potencial.

Otra forma de analizar cualitativamente la dinámica de un sistema descrito por la ecuación (9) es mediante los diagramas de Poincaré [18,19]. Los diagramas de Poincaré son una versión corta de los diagramas de fase, se generan por los puntos de intersección de las trayectorias en el espacio de fase sobre una superficie plana que es perpendicular a dichas trayectorias, con estos diagramas es posible caracterizar la dinámica del sistema. En la figura 4(c) se presenta la sección de Poincaré obtenida a partir de la integración numérica de (9), cada punto representa la posición y la velocidad para un tiempo que satisface $\omega t = 0, 1, 2, \dots$, diferentes condiciones iniciales se denotan con diferentes colores. Regiones en las que la sección de Poincaré es cerrada (como en la región alrededor de $x_0 = 1$, $v = 0$),

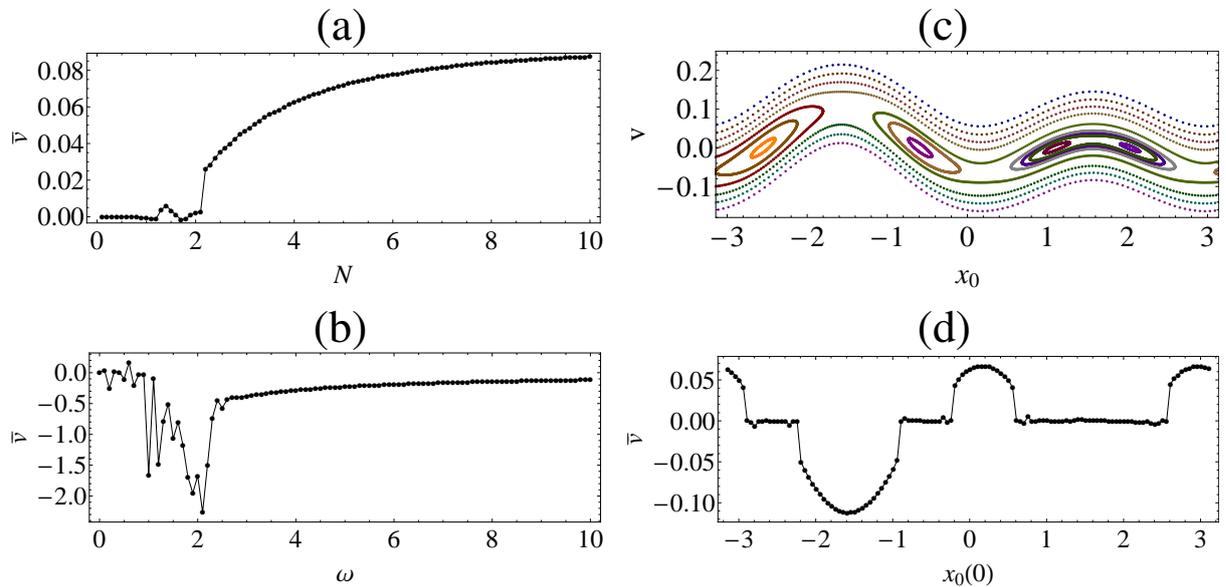


Figura 4. Dinámica de un solitón en un potencial trinquete definido por $V_0 = 0.3$, $\phi = \pi/2$, $\omega = 10$. Los resultados se obtienen a partir de la integración numérica de (9) y la ecuación (10). (a) \bar{v} en función de N para $0 < N \leq 10$, se utilizan las condiciones iniciales $x_0(0) = 0$, $v(0) = 0$. (b) \bar{v} en función de ω , se analiza un solitón con amplitud $N = 4$ y condición inicial $v(0) = 0$ y $x_0(0) = -\pi/2$. (c) Sección de Poincaré. Se analiza la dinámica de un solitón con $N = 4$ y diversas condiciones iniciales. (d) Velocidad promedio \bar{v} en función de la posición inicial $x_0(0)$ para un solitón con $N = 4$ y $v(0) = 0$.

denotan sectores en los que el movimiento es periódico y por lo tanto no conduce al transporte de materia. Por otra parte, regiones en los que la solución contiene valores de x_0 en todo el intervalo analizado, denotan soluciones como las mostradas en la figura 2(b) en los que el solitón se mueve en forma balística. En la figura 4(d) se observa el valor de la velocidad promedio para las trayectorias con $v(0) = 0$ analizadas en el diagrama de Poincaré de la figura 4(c). Se nota como en las regiones periódicas la velocidad es nula mientras que en las regiones con transporte \bar{v} puede tomar valores positivos o negativos.

3. Soluciones multisolitónicas

Debido a que la ecuación de Gross-Pitaevskii es una ecuación no lineal también es importante analizar soluciones multisolitónicas [20]. En la sección 2 se presentó el análisis por métodos variacionales para obtener la solución de la ecuación unidimensional de Gross-Pitaevskii (2), el material presentado es una revisión de este tema estudiado en detalle numéricamente y por métodos variacionales en [16,17,21]. En estos trabajos las soluciones con múltiples solitones son estudiadas numéricamente y no se dan características del transporte para estas configuraciones. En esta sección se estudia la forma en la que se mueven n solitones en un potencial trinquete por medio de métodos variacionales. Con el fin de mantener el mismo formalismo descrito en la sección 2 se asume que el i -ésimo solitón es descrito por una función de prueba de la forma:

$$\Psi_i(x, t) = N_i \operatorname{sech} \left[\frac{N_i}{2} (x - x_{0i}(t)) \right] e^{i v_i(t) [x - x_{0i}(t)]}, \quad (11)$$

en esta expresión N_i , $x_{0i}(t)$ y $v_i(t)$ describen respectivamente a la amplitud, la posición del centro de masa y la velocidad de cada uno de los solitones con $i = 1, 2, \dots, n$. La forma en la que interactúan los solitones se debe ver reflejada en cada una de sus trayectorias $x_{0i}(t)$. Además, el principio de superposición no es aplicable debido al término $|\Psi(x, t)|^2 \Psi(x, t)$ en la ecuación (2), el resto de los términos son lineales. Esto motiva a pensar que los solitones de la ecuación GP y los de la ecuación NLS interactúan de igual manera. Teniendo en cuenta esta suposición se utiliza un potencial de interacción entre los solitones i, j dado por [22,23,24]:

$$V(x_{0i} - x_{0j}) = - \frac{N_i N_j (N_i + N_j)}{32} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{N_i N_j (x_{0i} - x_{0j})}{2(N_i + N_j)} \right], \quad (12)$$

donde x_{0i} representa la posición del centro de masa del i -ésimo solitón de amplitud N_i . A partir del potencial de interacción, la dinámica de n solitones en la aproximación de partícula clásica puede ser estudiada por métodos variacionales como un sistema de n partículas modeladas por un Hamiltoniano efectivo (13) que describe a cada solitón e interacciones por pares dadas por la ecuación (12). Por lo tanto el sistema es modelado por:

$$H_n = \sum_{i=1}^n \left[\frac{p_i^2(t)}{2N_i} + N_i V_{\text{efec}}(x_{0i}, t) \right] - \sum_{1 \leq i < j \leq n} V(x_{0i} - x_{0j}). \quad (13)$$

Mediante este Hamiltoniano se obtienen las ecuaciones de movimiento para cada una de las partículas:

$$N_i \frac{d^2 x_{0i}(t)}{dt^2} = - \frac{\partial H_n}{\partial x_{0i}(t)} \quad \text{para} \quad i = 1, \dots, n. \quad (14)$$

A partir de las ecuaciones (14) el método variacional permite obtener la solución multisolitónica $\Psi(x, t)$ de la ecuación unidimensional de Gross-Pitaevskii (2):

$$\Psi(x, t) = \sum_{i=1}^n N_i \operatorname{sech} \left[\frac{N_i}{2} (x - x_{0i}(t)) \right] e^{i v_i(t) [x - x_{0i}(t)]}. \quad (15)$$

En la expresión (15) las soluciones son obtenidas a partir de la suma de las funciones de prueba (11), sin embargo, al introducir el potencial de interacción en la dinámica descrita por (14) se producen desfases en las trayectorias de los solitones haciendo que la solución no sea únicamente la superposición de solitones independientes.

En la figura 5 se presenta la solución obtenida para dos solitones. Se resuelve numéricamente el sistema de ecuaciones acopladas dado por (14) y por medio de los resultados obtenidos de evalúa la expresión (15). Las condiciones iniciales se eligen de tal forma que al ser considerados como solitones individuales una de las partículas se mueve de manera

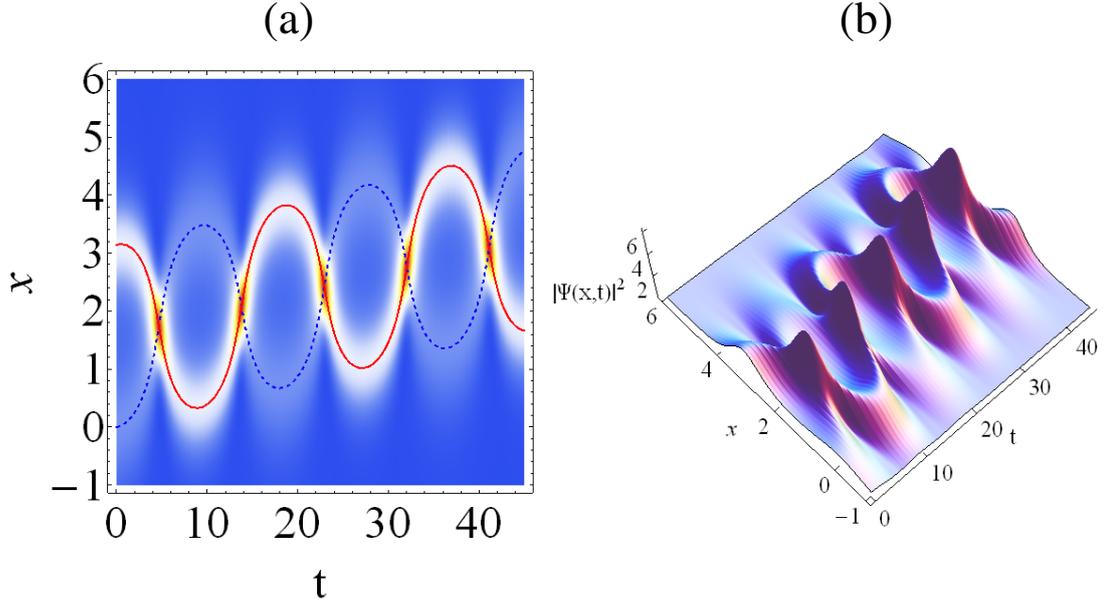


Figura 5. Solución de la ecuación (2) con un potencial trinquete definido por $V_0 = 0.3$, $\omega = 10$, $\phi = \pi/2$. Se obtiene $\Psi(x, t)$ mediante (15) y la solución numérica de (14) para dos solitones. Se estudian solitones definidos por $N_1 = 2$, $N_2 = 3$, $x_{01}(0) = v_1(0) = v_2(0) = 0$ y $x_{02}(0) = \pi$. (a) Grafica de densidad de $|\Psi(x, t)|^2$, las líneas determinan las trayectorias del centro de masa de cada solitón. (b) Grafica tridimensional de $|\Psi(x, t)|^2$.

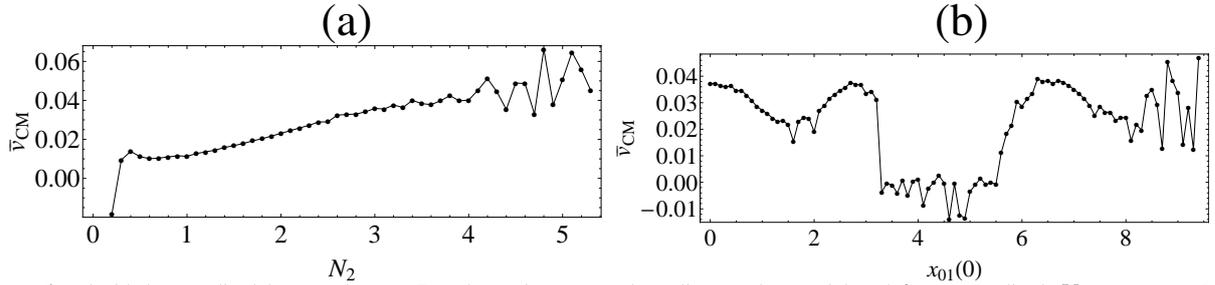


Figura 6. Velocidad promedio del centro de masa \bar{v}_{CM} de un sistema con dos solitones, el potencial se define por medio de $V_0 = 0.3$, $\omega = 10$, $\phi = \pi/2$. (a) \bar{v}_{CM} en función de la amplitud N_2 del segundo solitón. Parámetros utilizados: $N_1 = 2$, $x_{01}(0) = v_1(0) = v_2(0) = 0$ y $x_{02}(0) = \pi$. (b). \bar{v}_{CM} en función de la posición inicial del primer solitón $x_{01}(0)$. Parámetros: $N_1 = 2$, $N_2 = 3$, $v_1(0) = v_2(0) = 0$ y $x_{02}(0) = \pi$.

oscilatoria y otra de manera balística. Sin embargo, al tener en cuenta las interacciones la solución resultante describe un estado acoplado en el que los dos solitones se mueven en conjunto con un centro de masa que se desplaza de forma balística favoreciendo el transporte de materia.

Con el fin de estudiar el transporte de materia en estados acoplados se analiza la velocidad del centro de masa de los solitones definida por:

$$\bar{v}_{CM} = \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{i=1}^n \frac{1}{T} \int_0^T N_i v_i(t') dt', \quad \text{con} \quad \mathcal{N} = \sum_{i=1}^n N_i. \quad (16)$$

Esta cantidad es análoga a la velocidad promedio propuesta en la ecuación (10).

En la figura 6 se presentan los resultados obtenidos para la velocidad promedio del centro de masa \bar{v}_{CM} de dos solitones. Se resuelven numéricamente las ecuaciones de movimiento (14) y se calcula el valor dado por la expresión (16), este procedimiento se repite para diferentes parámetros del sistema. En la figura 6(a) se presentan los resultados obtenidos al variar la amplitud N_2 del segundo solitón manteniendo fijos los demás parámetros. Por otra parte en

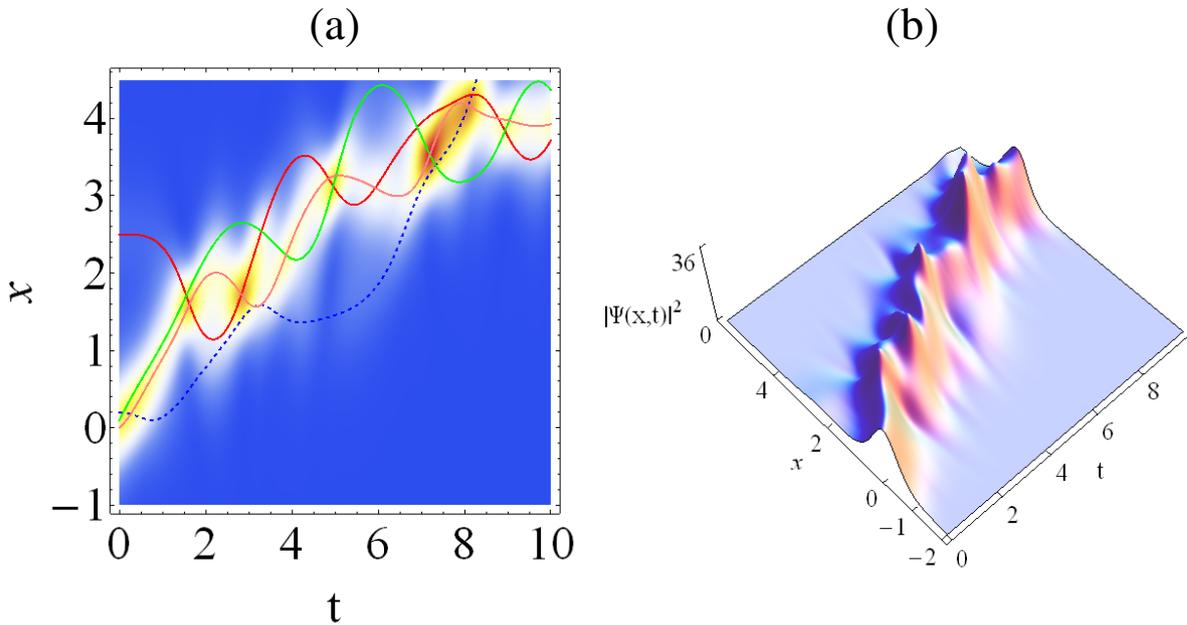


Figura 7. Solución de la ecuación (2) con un potencial trinquete obtenida mediante (15) y la solución numérica de (14) para cuatro solitones, $n = 4$. (a) Grafica de densidad de $|\Psi(x,t)|^2$, las líneas determinan las trayectorias del centro de masa de cada solitón. (b) Grafica tridimensional de $|\Psi(x,t)|^2$.

la figura 6(b) se grafican los valores de \bar{v}_{CM} variando únicamente la posición inicial del primer solitón. Se observa como diferentes configuraciones del sistema de dos solitones conducen a diferentes formas de transporte asociadas al cambio de masa o a las condiciones iniciales, el manejo apropiado de este tipo de condiciones sugiere mecanismos para construir estados con una dinámica conjunta de solitones y mecanismos de control de solitones por medio de otros solitones en potenciales trinquete. Por ejemplo, en la figura 6(b) se observa como el cambio de la posición inicial $x_{01}(0)$ permite establecer un régimen balístico, de transporte nulo, incluso inversión del transporte de materia.

Con respecto a los estados acoplados, en los que se observa una dinámica colectiva de solitones, se encuentra que la dinámica del conjunto tiene características diferentes a las de los solitones individuales que lo conforman tal como se observó en la figura 5. Este tipo de estados se han estudiado para otro tipo de potenciales y algunos autores los denominan moléculas solitónicas [25,26]. En este contexto, los potenciales trinquete ofrecen un panorama interesante para la construcción de este tipo de estados. En la figura 7 se presenta un estado acoplado con $n = 4$, las líneas continuas muestran la trayectoria de cada uno de los cuatro solitones que forman este estado. Trabajo futuro busca estudiar tanto numéricamente como por un tratamiento analítico este tipo de configuraciones multisolitónicas así como la forma en que interactúan en diferentes tipos de potenciales de la ecuación de Gross-Pitaevskii.

4. Conclusiones y comentarios

En este trabajo se estudió la dinámica de solitones de la ecuación unidimensional de Gross-Pitaevskii con un potencial trinquete. Se presentó una revisión de los métodos variacionales utilizados para analizar la dinámica de un solitón y con la introducción de un potencial de interacción de solitones se extienden estas técnicas con el fin de estudiar soluciones multisolitónicas. Los resultados obtenidos por medio de los métodos variacionales sugieren que en los potenciales trinquete se pueden presentar estados acoplados en los que los solitones se mueven de forma colectiva con nuevas características tanto en el transporte de materia así como en la manera en la que interactúan con otros solitones. Trabajo futuro busca analizar este tipo de configuraciones mediante otros métodos.

5. Agradecimientos

Los autores de este artículo agradecemos el apoyo de la Vicerrectoría de Investigaciones y Postgrados de la Universidad de Nariño por la ayuda financiera para el desarrollo de este trabajo.

Referencias

- [1] P.G. Drazin, R.S. Johnson. *Solitons: An Introduction*. Cambridge Computer Science Texts. Cambridge University Press, 1989.
- [2] T. Dauxois, M. Peyrard. *Physics of Solitons*. Cambridge University Press, 2006.
- [3] J.V. Moloney, A.C. Newell. *Nonlinear Optics*. Advanced Book Program. Westview Press, 2004.
- [4] X.F. Pang, Y.P. Feng. *Quantum Mechanics in Nonlinear Systems*. World Scientific, 2005.
- [5] E. Infeld, G. Rowlands. *Nonlinear Waves, Solitons and Chaos*. Cambridge University Press, 2000.
- [6] L.D. Faddeev, L.A. Takhtajan, A.G. Reyman. *Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons*. Classics in Mathematics. Springer, 2007.
- [7] C. Pethick, H. Smith. *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases*. Cambridge University Press, 2002.
- [8] J Rogel-Salazar. The Gross-Pitaevskii equation and Bose-Einstein condensates. *European Journal of Physics*, 34(2):247, 2013.
- [9] Kevin E. Strecker, Guthrie B. Partridge, Andrew G. Truscott, Randall G. Hulet. Formation and propagation of matter-wave soliton trains. *Nature*, 417(6885):150–153, May 2002.
- [10] K E Strecker, G B Partridge, A G Truscott, R G Hulet. Bright matter wave solitons in Bose-Einstein condensates. *New Journal of Physics*, 5(1):73, 2003.
- [11] Jasur Abdullaev, Dario Poletti, Elena A. Ostrovskaya, Yuri S. Kivshar. Controlled transport of matter waves in two-dimensional optical lattices. *Phys. Rev. Lett.*, 105:090401, Aug 2010.
- [12] C. Ryu, P. W. Blackburn, A. A. Blinova, M. G. Boshier. Experimental Realization of Josephson Junctions for an Atom SQUID. *Phys. Rev. Lett.*, 111:205301, Nov 2013.
- [13] Peter Reimann. Brownian motors: Noisy transport far from equilibrium. *Physics Reports*, 361(2-4):57–265, 2002.
- [14] Peter Hänggi, Fabio Marchesoni. Artificial brownian motors: Controlling transport on the nanoscale. *Rev. Mod. Phys.*, 81:387–442, Mar 2009.
- [15] Holger Schanz, Marc-Felix Otto, Roland Ketzmerick, Thomas Dittrich. Classical and quantum hamiltonian ratchets. *Phys. Rev. Lett.*, 87:070601, Jul 2001.
- [16] Dario Poletti, Tristram J. Alexander, Elena A. Ostrovskaya, Baowen Li, Yuri S. Kivshar. Dynamics of matter-wave solitons in a ratchet potential. *Phys. Rev. Lett.*, 101:150403, Oct 2008.
- [17] Dario Poletti, Elena A. Ostrovskaya, Tristram J. Alexander, Baowen Li, Yuri S. Kivshar. Ratchet-induced matter-wave transport and soliton collisions in Bose-Einstein condensates. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 238(15):1338 – 1344, 2009.
- [18] J.V. José, E.J. Saletan. *Classical Dynamics: A Contemporary Approach*. Cambridge University Press, 1998.
- [19] J. Binney, S. Tremaine. *Galactic Dynamics: (Second Edition)*. Princeton Series in Astrophysics. Princeton University Press, 2011.
- [20] Trevor Potter. Effective dynamics for n -solitons of the Gross-Pitaevskii equation. *Journal of Nonlinear Science*, 22(3):351–370, 2012.
- [21] T. J. Alexander, K. Heenan, M. Salerno, E. A. Ostrovskaya. Dynamics of matter-wave solitons in harmonic traps with flashing optical lattices. *Phys. Rev. A*, 85:063626, Jun 2012.
- [22] J. N. Maki, T. Kodama. Phenomenological Quantization Scheme in a Nonlinear Schrödinger Equation. *Phys. Rev. Lett.*, 57:2097–2100, Oct 1986.
- [23] A. D. Martin, C. S. Adams, S. A. Gardiner. Bright solitary-matter-wave collisions in a harmonic trap: Regimes of solitonlike behavior. *Phys. Rev. A*, 77:013620, Jan 2008.
- [24] T. P. Billam, S. A. Wrathmall, S. A. Gardiner. Variational determination of approximate bright matter-wave soliton solutions in anisotropic traps. *Phys. Rev. A*, 85:013627, Jan 2012.
- [25] U Al Khawaja, H T C Stoof. Formation of matter-wave soliton molecules. *New Journal of Physics*, 13(8):085003, 2011.
- [26] Kazimierz Łakomy, Rejish Nath, Luis Santos. Soliton molecules in dipolar Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. A*, 86:013610, Jul 2012.