

Estudio del colapso estelar bajo el modelo de la esfera Hidrostática

Study of stellar collapse under the sphere model Hydrostatic

Omar A. Bohórquez ^a* Héctor J. Hortúa ^b.

^aGrupo de Astrofísica, Universidad Nacional de Colombia.

^bSemillero de Investigación en Astronomía, Fundación Los Libertadores.

Aceptado Diciembre 2014; Publicado en línea Marzo 2015.

ISSN 2256-3830.

Resumen

En este trabajo se estudió el colapso gravitacional empleando el modelo hidrostático, teniendo en cuenta dos ecuaciones de estado: la primera suponiendo un gas ideal el cual es válido para el estudio de estrellas de masas comparables a la del sol y la segunda usando una ecuación de estado general; esta última desde el punto de vista relativista y no relativista, muy apropiada para el análisis de la estabilidad en enanas blancas mediante el límite de Chandrasekhar. Se abordó el problema del colapso y se encontraron soluciones numéricas de la ecuación de Lane-Emden para cada caso, observando relaciones del radio de la esfera con la masa para análisis de estabilidad.

Keywords: Formación estelar, Relación Politrópica, Presión Degenerada.

Abstract

In this paper we studied the gravitational collapse using the hydrostatic model, where it was taken into account two equations of state: the first one it was assumed an ideal gas which is valid for stars comparable to the sun and the second one a general state equation was used. For the second case the relativistic and nonrelativistic cases were studied, which is highly suitable to analyze the stability of white dwarfs via the Chandrasekhar limit. We address the collapse problem, and numerical solutions of the Lane-Emden equation for each case are shown, finding relations between the radius and mass of the stars.

Keywords: Star formation, polytropic relationship, degenerate pressure.

1. Introducción

Para el hombre desde la antigüedad, siempre ha sido un reto comprender el origen y evolución de las estrellas. En el pasado se tenía una visión de estrellas eternas e inmutables, ahora en la actualidad se habla del hecho de

* oabohorquezp@unal.edu.co

que las estrellas tienen un ciclo de vida bien definido y que incluso presentan un deceso inevitable. En esta ardua tarea se han encontrado resultados plausibles como los obtenidos por el diagrama de evolución estelar de Herzprung-Russel (1905-1913) [1] y los análisis de estructura estelar realizados por Chandrasekhar (1935)[2,3,4], Openheimer (1939)[5] entre otros. En el caso particular del estudio de la estructura estelar se encuentran modelos teóricos como el de la esfera isotérmica que dan explicación al comportamiento físico de la estrella en términos de su masa, temperatura y su densidad. Estos estudios incluso predicen la existencia de las llamadas estrellas de electrones [2] y neutrones degeneradas Openheimer [5]. En el presente artículo se estudia el modelo hidrostático. Para ello, se revisa dos casos especiales, el primero es el caso del colapso para la formación de una estrella y el segundo es el estudio de la estructura de una enana blanca. Se revisa la solución general de la ecuación de Lane-Emden para el caso de la esfera isotérmica de forma numérica con el programa Mathematica, para la cual se revisaran los límites clásico y relativista. El artículo tiene la siguiente estructura: en la sección 2 se revisa el modelo hidrostático. En la sección 3 se introduce el concepto de esfera isoterma autogravitante, se muestra la solución de Lane-Emden y se analiza los parámetros adecuados para que exista colapso. En la sección 4 se encuentra una ecuación de estado general y se compara con los límites relativistas y no relativistas, también se estudia bajo que condiciones la estrella puede llegar a ser una enana blanca. La discusión del trabajo y futuros proyectos se muestran en la sección 5.

2. Equilibrio hidrostático

Un fluido se dice que está en equilibrio hidrostático cuando las fuerzas externas tales como la gravedad son equilibrada por las fuerzas que surgen debido a gradientes de presión [6]

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -\rho \frac{GM}{r^2} = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad (1)$$

siendo Φ el potencial gravitacional que satisface la ecuación de Poisson

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = 4\pi G\rho. \quad (2)$$

3. Esfera isoterma autogravitante

Vamos a iniciar el estudio sobre la dinámica de un volumen de gas en el caso isotérmico auto-gravitante. Para ello, se considera un gas (en el medio interestelar) con simetría esférica y que empieza a colapsar debido a la fuerza de gravedad. En primera aproximación, se considera un colapso que se lleva a cabo a temperatura constante, de esta forma la ecuación de estado se escribe como

$$c^2 = \frac{P}{\rho}, \quad (3)$$

donde c^2 es la velocidad del sonido, siendo esta velocidad constante debido a su dependencia con la temperatura. Ahora si se sustituye la ecuación de estado en (1) se tiene que

$$\frac{d \ln \rho(r)}{dr} = -\frac{d}{dr} \left(\frac{\Phi(r)}{c^2} \right). \quad (4)$$

Donde las variables solo dependen de la coordenada radial r . Entonces usando la ecuación de Poisson, e integrando respecto a r se obtiene lo siguiente

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = 4\pi G\rho^2 \rightarrow \int_0^r \frac{d}{dr'} \left(r'^2 \frac{d\Phi(r')}{dr'} \right) dr' = G \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r') dr'. \quad (5)$$

Pero si comparamos el término final a mano derecha de la última ecuación y lo comparamos con la ecuación (1) y tomando el volumen esférico como $dV = 4\pi r'^2$, se obtiene por contraste de ambas integrales

$$r^2 \frac{d\Phi(r)}{dr} = GM(r). \quad (6)$$

Con las ecuaciones (4) y (6) se obtiene la solución para una esfera hidrostática auto-gravitante. Usamos el sistema CGS, donde $G = 6,67 \times 10^{-8} \text{cm}^3 \text{g}^{-1} \text{s}^{-2}$, $c^2 = 230 \text{cm}^2/\text{s}^2$ y la coordenada radial esta dada en centímetros

(1AU= 1.49×10^{13} cm). La figura 1 muestra la solución numérica de la esfera hidrostática auto-gravitante. En la figura 1a muestra el perfil de densidad en función de r para diferentes valores de densidad inicial para un núcleo $r=1000$ cm. En la figura 1b se muestra el mismo perfil, pero en una escala logarítmica, en esta la línea negra es la esfera isotérmica singular $\rho = \frac{c^2}{2\pi G r^2}$ que se puede ver es la solución limite. Los perfiles de masa son mostrados en las figuras 1c, 1d.

Finalmente, suponiendo que $\rho = \rho_c \exp^{-\frac{\Phi}{c^2}}$ (con ρ_c como la densidad central de la esfera), en la ecuación de equilibrio hidrostático y usando la ecuación de Poisson, se obtiene una ecuación diferencial que describe la estructura de la esfera hidrostática, esta es conocida como la ecuación de Lane-Emden

$$\frac{1}{\eta^2} \frac{d}{d\eta} \left(\eta^2 \frac{d\psi}{d\eta} \right) = \exp^{-\psi}. \quad (7)$$

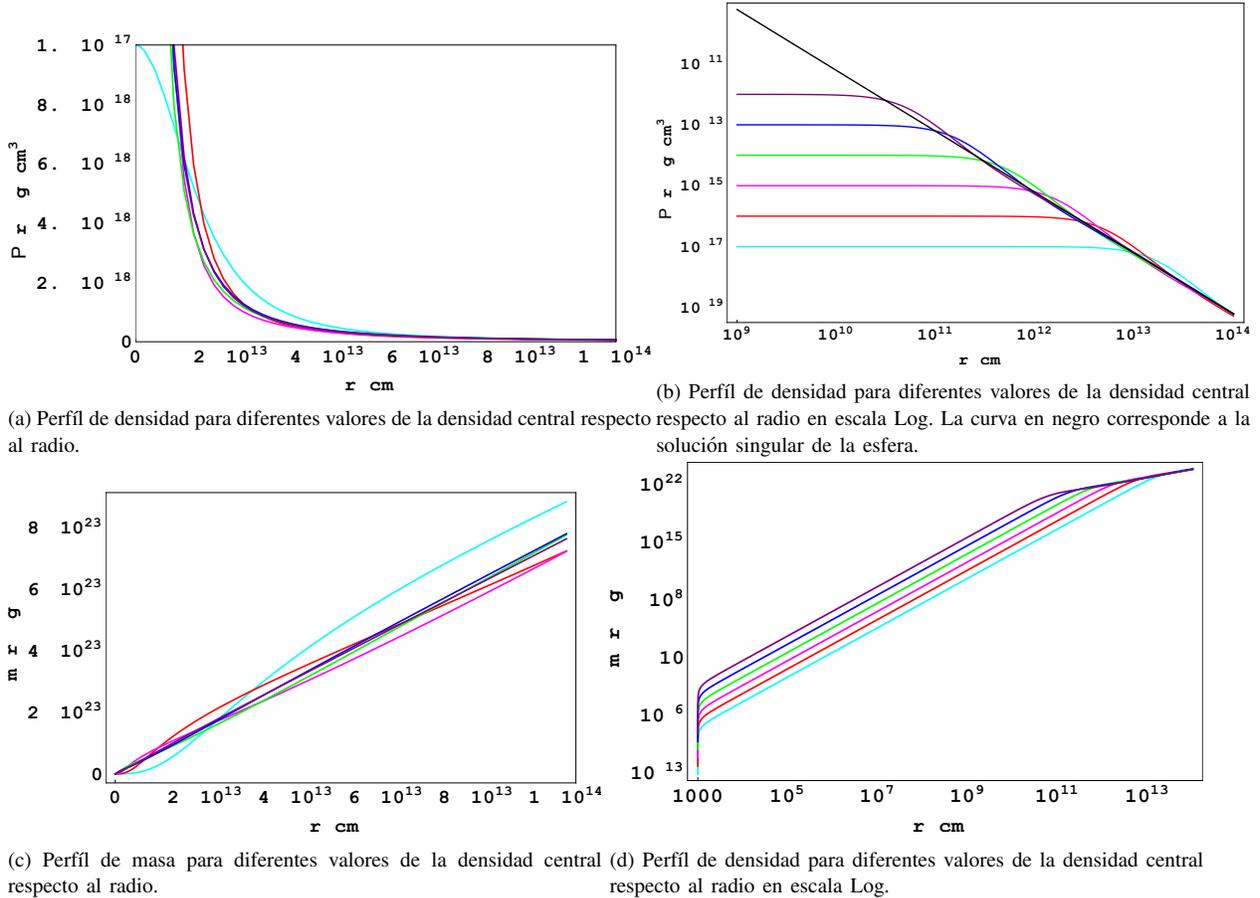


Figura 1. Perfil radial de masa y densidad. Los colores se refieren a diferentes valores de la densidad central ρ_0 [g/cm³]: $\rho_0 = 1 \times 10^{-17}$ para cian, $\rho_0 = 1 \times 10^{-16}$ rojo, $\rho_0 = 1 \times 10^{-15}$ amarillo, $\rho_0 = 1 \times 10^{-14}$ verde, $\rho_0 = 1 \times 10^{-13}$ azul, $\rho_0 = 1 \times 10^{-12}$ morado.

Con $\eta = (4\pi G \rho_c / c^2)^{1/2} r$ and $\psi = \Phi / c^2$. Las condiciones de frontera son $\psi(0) = 0$ y $\frac{d\psi}{d\eta} |_{\eta=0} = 0$. La solución bajo estas condiciones de la ecuación de Lane-Emden se muestra en la figura 3. La solución de la ecuación de Lane-Emden esta descrita en la figura 2b, donde la curva en azul muestra la solución singular isoterma ($1/r^2$).

Por último, se define la masa adimensional m como

$$m(\eta) \sim \exp(\Psi/2) \frac{d\Psi}{d\eta} \eta^2. \quad (8)$$

Esta masa adimensional se comporta de una forma similar al potencial gravitacional, por lo tanto se puede observar cuando el colapso es estable. En la figura 3 se observa que a medida que vamos aumentando η (que es análogo

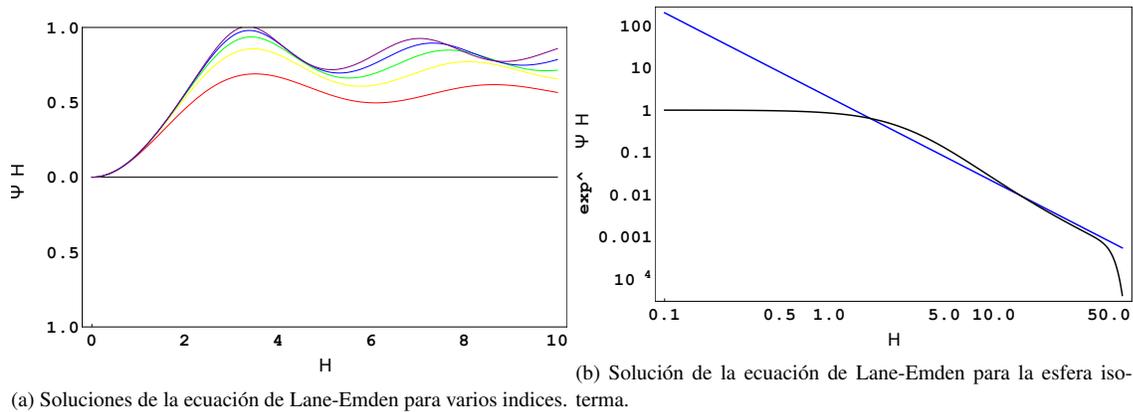


Figura 2. Solución de la ecuación de Lane-Emden.

al radio) se observa un pico en la función, hasta aquí se puede decir que la fuerza gravitacional es mayor que el gradiente de presión ejercido por el fluido y por lo tanto existe colapso. Sin embargo se observa una caída del pico, esto indica que existen zonas ($\eta \sim 6,52$) en la estrella con alta y baja masa alternándose a medida que aumentamos η algo que no tiene interpretación física, esto indica que en estas zonas no hay colapso debido a que el efecto de presión es mayor que el de la gravedad. Este valor de $\eta \sim 6,52$ es también reportado en la literatura dado lugar a la masa de Bonnor-Ebert que es la masa más grande que una esfera isotérmica inmersa en un medio de presión puede tener mientras permanece en equilibrio hidrostático [7].

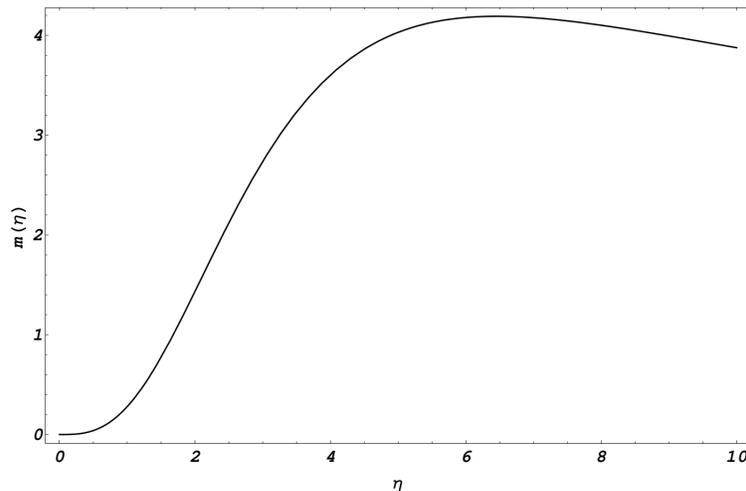


Figura 3. Perfil de masa adimensional.

4. Esfera hidrostática en la estructura de enanas blancas

En esta parte se estudia las características que deben tener las estrellas durante su final para llegar a ser enanas blancas. La presión de un gas ideal que surge de los movimientos térmicos de las partículas cae a cero cuando la temperatura es $0^\circ K$, esto asumiendo la validez de la mecánica clásica. Sin embargo, cuando un gas de partículas de Fermi es comprimido a una alta densidad las partículas se ven forzadas a caer en estados en donde el momento no es cero en $T = 0$ esto permite el surgimiento de lo que se llama una presión de degeneración [8]

$$P = \frac{1}{3} \int v p f(p) 4\pi p^2 dp. \quad (9)$$

Dada esta situación se tiene que los lugares de ocupación de estos estados vienen dados por la estadística de Fermi-Dirac [5]. En este caso para simplificar vamos a suponer que todas las partículas están en estados por debajo del momento de Fermi P_f , entonces el número de densidad de electrones n_e viene dada por

$$n_e = \int_0^\infty \frac{8\pi}{h^3} p^2 dp = \frac{8\pi}{3h^3} p_F^3. \quad (10)$$

Todos los estados entre p y $p + dp$ están ocupados $p < p_f$, mientras que la ocupación es cero si $p > p_f$, por lo tanto

$$P = \frac{8\pi}{3h^3} \int_0^{p_F} v p^3 dp. \quad (11)$$

Usando la expresión relativista del momento $P = m\gamma v$ donde γ es el factor de Lorentz, se encuentra que la presión del gas de fermi degenerada viene dada por

$$P = \frac{8\pi}{3h^3} \int_0^{p_F} \frac{p^4 c^2}{\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}}, \quad (12)$$

donde

$$v = \frac{p}{m\gamma} = \frac{pc^2}{\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}}. \quad (13)$$

Los protones y otros nucleones pesados contribuyen a la densidad pero no a la presión ya que estos no se encuentran degenerados [8], por lo tanto se halla que la relación entre la densidad ρ y el número de densidad electrónica es

$$n_e = \frac{\rho}{\mu_e m_H}, \quad (14)$$

donde se tiene que μ_e es el peso molecular medio de los electrones que viene dado por

$$\mu_e = \frac{2}{1 + X}. \quad (15)$$

De esta forma el momento de Fermi p_f se escribe como

$$p_F = \left(\frac{3h^3 \rho}{8\pi \mu_e m_H} \right)^{1/3}. \quad (16)$$

Realizando la integral que se muestra en la ecuación 12, se tiene que la ecuación de estado general viene dada por

$$P(\rho) = \sqrt{1 + A(\mu_e)^2 \rho(r)^{2/3}} (-1,77 \times 10^{22} A(\mu_e) \rho(r)^{1/3} + 1,18 \times 10^{22} A(\mu_e)^3 \rho(r)) + 1,77 \times 10^{22} \sinh^{-1}(A(\mu_e) \rho(r)^{1/3}), \quad (17)$$

donde $A(\mu_e) = 3,25 \times 10^{21} \left(\frac{3h^3}{8\pi m_H \mu_e} \right)^{1/3}$. Realizando una expansión en series de Taylor de ρ se obtiene el limite no relativista

$$P(\rho) \sim 10^7 \left(\frac{\rho(r)}{\mu_e} \right)^{5/3}, \quad (18)$$

mientras que el limite cuando la masa es nula se obtiene el caso relativista

$$P(\rho) \sim 10^{10} \left(\frac{\rho(r)}{\mu_e} \right)^{4/3}. \quad (19)$$

Por lo tanto en los casos limites la ecuación de estado satisface una relación politrópica $P \sim \rho^{(1+\frac{1}{n})}$ con $n = 3$ para el caso relativista y $3/2$ para el caso no relativista. La figura 4 muestra la ecuación de estado general y como esta se ajusta a los límites relativistas y no relativistas.

Siguiendo a Chandrasekhar [3], se realiza el siguiente cambio de variable

$$\rho = 1,924 \times 10^8 x^3, \quad P = 1,7719 \times 10^{22} f(x), \quad (20)$$

con $f(x)$

$$f(x) = (2x^3 - 3x^3) \sqrt{1 + x^2} + 3 \sinh^{-1}(x).$$

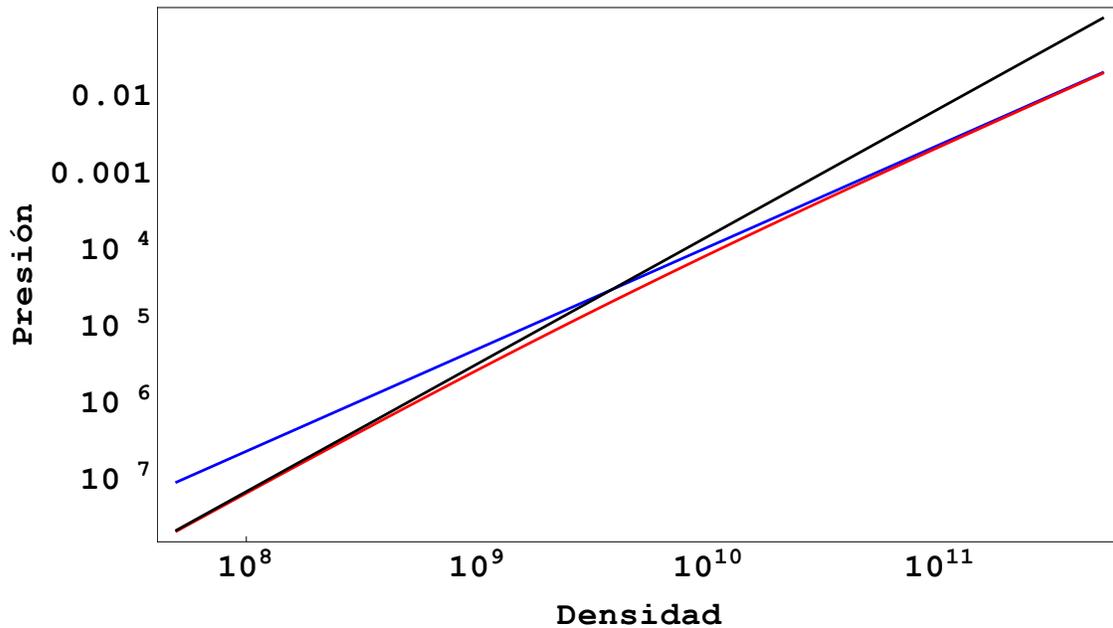


Figura 4. Grafica LogP vs Log ρ . (MKS) Curva negra corresponde al caso no relativista, curva azul caso relativista y curva roja caso general.

Al usar la ecuación de estado general y las ecuaciones (20), (4), se obtiene

$$4,8 \times 10^5 \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{x^3} \frac{df(x)}{dr} \right) = -4\pi G x^3, \quad (21)$$

Usando el hecho de que $\frac{df(x)}{dr} = \frac{8x^4}{\sqrt{1+x^2}} \frac{dx}{dr}$, se tiene que

$$1,694 \times 10^{28} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dy}{dr} \right) = -\pi G (y^2 - 1)^{3/2}, \quad (22)$$

donde se define

$$y^2 = x^2 + 1. \quad (23)$$

Se introduce las dos variables definidas por Chandrasekhar $\eta, y\phi$:

$$\eta = 1,45 \times 10^{-3} \sqrt{\frac{\pi G}{2}} y_0 r, \quad \phi = y/y_0, \quad (24)$$

donde y_0 es el valor de y en el centro. De estas definiciones se observa que

$$\phi(y = y_0) = 1, \quad \frac{d\phi}{dy} \Big|_{y_0} = 0.$$

También se observa que en la frontera ($x \rightarrow 0$), la cual esta dada por el radio de la estrella R ($R \sim \eta_1$) se tiene que

$$\phi(\eta_1) = y_0^{-1}.$$

Con estas definiciones, se llega a una ecuación de Lane-Emden general

$$\frac{1}{\eta^2} \frac{d}{d\eta} \left(\eta^2 \frac{d\phi}{d\eta} \right) = - \left(\phi^2 - \frac{1}{y_0^2} \right)^{3/2}. \quad (25)$$

Por último, sabiendo que la masa de la estrella viene dada por $M = \int \rho dV$, al reemplazar la solución de la densidad se encuentra que

$$M = -4\pi(7,48 \times 10^{48}) \frac{2}{\pi G} \left(\eta^2 \frac{d\phi}{d\eta} \right) \Big|_{\eta_1}. \quad (26)$$

Ahora se quiere observar como cambia la masa de acuerdo al radio de la estrella. Para ello vamos a normalizar estos parámetros. El radio se normaliza respecto al valor encontrado en (24), y la masa se normaliza respecto a la masa que satisface la ecuación de estado relativista (19)

$$M_C \sim \left(\frac{2}{\mu_e}\right)^2 \eta_1^2 |\phi'(\eta_1)|. \quad (27)$$

Donde M_C se conoce como el limite de Chandrasekhar. De las graficas 5 se encuentra que $\eta_1 \sim 6,9$ y $\phi' \sim 0,0423$, por lo tanto se tiene que la masa de Chandrasekhar es igual a

$$M_C \sim 1,46M_\odot. \quad (28)$$

M_c fue deducida a partir de la solución relativista de la ecuación de Lane-Emden, de esta forma se impone un límite acerca del cual la estrella puede llegar a ser un objeto con alta densidad tal que la presión degenerada es la que domina durante su evolución, enana blanca. Ya con la normalización se procede a encontrar la relación entre el radio de la estrella y su masa usando la ecuación 25, llegando a la figura 6.

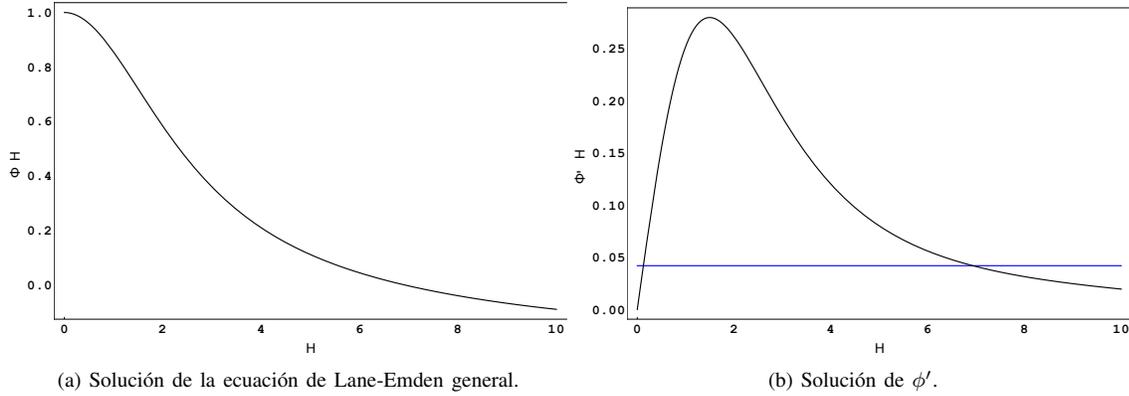


Figura 5. Solución de la ecuación de Lane-Emden ϕ y ϕ' .

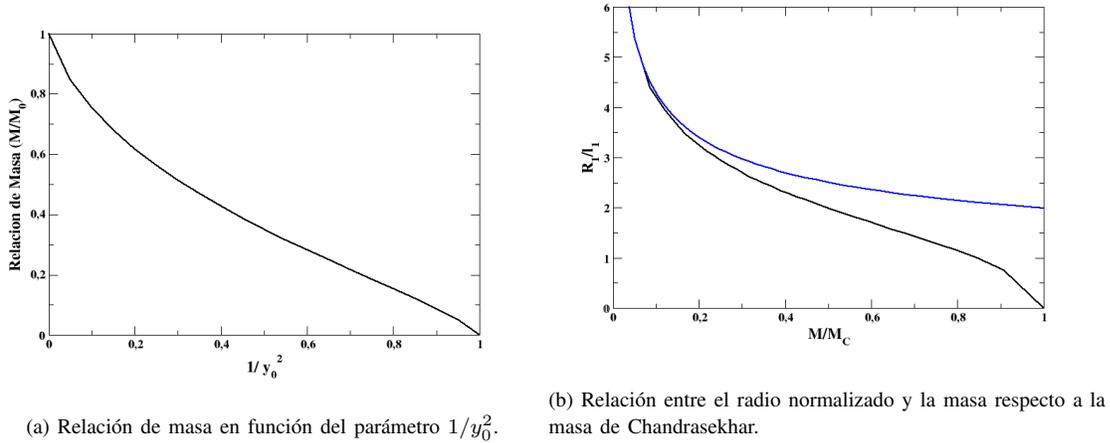


Figura 6. Relación del radio y masa para la estructura de la enana blanca.

En la gráfica 6a, se muestra la relación entre el radio y el parámetro y_0^{-2} , mientras que en la figura 6b se encuentra la función entre el radio y la masa normalizada. La curva azul corresponde al límite clásico en el que $R \sim M^{-3}$. En conclusión, esta grafica permite ver que para que se genere una enana blanca se requiere que la masa remanente de una supernova tenga como valor máximo la masa limite de Chandrasekhar para que se produzca el colapso.

5. Conclusiones

El modelo hidrostático es ampliamente usado en astronomía para el estudio de varios problemas, en particular el de generación y evolución estelar. En este artículo se realizó un estudio del modelo hidrostático para dos casos relacionados con la evolución estelar. Se encontró la ecuación de estado general de una forma alterna a la encontrada en la literatura y se estudió los perfiles de densidad en el caso de una esfera isoterma. En la gráfica 6a se aprecia el comportamiento de la relación de masa M/M_C con respecto al parámetro $1/y_0^2$ teniendo en cuenta que M_C fue calculado para cuando el valor de $1/y_0^2$ tiende a cero, en cuanto a la gráfica 6b se aprecia el comportamiento de la relación R/l_0 con l_0 calculado de la ecuación 24, además en esta gráfica se puede apreciar que el radio de la estrella tiende a cero cuando el valor de masa de esta tiende al valor de la masa límite de Chandrasekhar, situación que no se ve reflejada en el caso del límite clásico donde R tiende a cero cuando M/M_0 tiende a infinito, incluso se debe tener en cuenta que la relación entre R/l_0 y M/M_C en el límite clásico es $R/l_0 \sim (M/M_0)^{-1/3}$. Como futuro trabajo se pretende generalizar este estudio para el caso en el cual exista campo magnético y para el cual se quiera encontrar una masa similar a la de Chandrasekhar para estrellas de neutrones.

6. Agradecimientos

Los autores agradecen a los profesores Leonardo Castañeda y Giovanni Pinzon del Observatorio Astronómico Nacional de la Universidad Nacional de Colombia, por los comentarios y la discusión recibida durante la elaboración de este trabajo.

Referencias

- [1] Hertzsprung, Ejnar. Über die Sterne der Unterabteilungen c und ac nach der Spektralklassifikation von Antonia C. Maury. *Astronomische Nachrichten*, 179, 1909, p.
- [2] Chandrasekhar, S. The highly collapsed configurations of a stellar mass. *MNRAS*. 91, Londres, 1931, p.456-466.
- [3] Chandrasekhar, S. The highly collapsed configurations of a stellar mass (Second paper). *MNRAS*. 95, Londres, 1935, p. 207-225.
- [4] Chandrasekhar, S. On stars, their evolution and their stability. *Reviews of Modern Physics*. 56, 1984, p. 137-147.
- [5] Choudhuri, Arnab. *Astrophysics for Physicists*, New York, Cambridge University Press, 2010, p. 127-132.
- [6] Tolman, Richard C. Static Solutions of Einstein's Field Equations for Spheres of Fluid. *Physical Review*, 55, 1939, p. 364-373.
- [7] Bonnor, W. B. Boyle's Law and gravitational instability. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 116, 1958 p. 351.
- [8] Kippenhahn, R. and Weigert, A. 1990, *Stellar Structure and Evolution*. Springer-Verlag