REVISTA DE CIENCIAS, Vol. 1 , No. de 2011.
ISSN 2256-3830

Caracterización del Espectro de un Operador tipo Sturm-Liouville

Characterization of the spectrum of an operator Sturm-Liouville type

Eduardo Ibarguen Mondragon [a⋆], Miller Cerón Gómez [a], Saulo Mosquera Lopez [a].

[a] *Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad de Nariño, C. U. Torobajo, Clle 18 - Cra 50, PBX 27311449, Pasto, Colombia.*

Resumen

Se determina el espectro de un Operador Diferencial de Segundo orden del tipo Sturm-Liouville, donde su espectro esencial se encuentra de manera explícita y se prueba que su espectro discreto es finito y que tiene un valor propio negativo, todo esto se consigue descomponiendo el operador diferencial como la resta de dos operadores autoadjuntos donde uno de ellos es compacto y el del otro conocemos su espectro esencial.

***Palabras Claves*:** Operador Diferencial, Espectro, Sturm-Liouville.

Abstract

The spectrum of a Differential Operator of Second Order Sturm-Liouville type is founded, where its essential spectrum is determined in a explicit way and is probed that its discrete spectrum is finite and has a eigenvalue negative, all this is achieved by decomposing the operator differential as the subtraction of two self-adjoint operators where one of them is compact and the other know their essential spectrum.

***Keywords*:** Differential Operator, Spectrum, Sturm-liouville .

1. Introducción

Se determina el espectro del operador diferencial de segundo orden
$L : H^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ definido por

$$Lu = -\left(bc^2 - a\right)\frac{d^2u}{dx^2} + \left(c^2 - 1 - 3cq\right)u, \tag{1}$$

donde $c > 0$ y $c^2 > \text{máx}\,(1, a/b)$ y la función real q está dada por

$$q(x) = \frac{c^2-1}{c}\sec\mathrm{h}^2\left(\frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{c^2-1}{bc^2-a}}\right]x\right). \tag{2}$$

En concreto, probaremos que su espectro esencial es $[c^2 - 1, \infty)$, su espectro discreto es finito y que tiene un único valor propio negativo. Para este fin, escribimos el operador L como

⋆ edbargun@udenar.edu.co

$$Lu = Mu - T_q u,$$

donde M y T_q son operadores de $H^2(\mathbb{R})$ en $L^2(\mathbb{R})$. Vamos a demostrar que L y M son auto-adjuntos en $L^2(\mathbb{R})$, T_q es compacto y $\sigma_{es}(M) = [c^2 - 1, \infty)$.

2. Teoría de Sturm-Liouville

Iniciaremos demostrando algunos resultados básicos de la teoría de Sturm-Liouville asociada a la ecuación diferencial

$$\mathcal{J}u = -\left(Pu'\right)' + Qu = 0, \tag{3}$$

donde P y Q son funciones continuas de valor real. En lo que sigue P es una función positiva de clase $C^1(\mathbb{R})$ y Q una función continua acotada en $\mathbb{R}$.

Teorema 2.1. *Suponga que $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ es una solución de*

$$-\left(Pu'\right)' + Qu = 0, \tag{4}$$

y $\psi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ es una solución de

$$-\left(Pu'\right)' + Q_1 u = 0. \tag{5}$$

Sea $Q(x) > Q_1(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Si x_1 y x_2 son ceros consecutivos de φ, entonces ψ debe hacerse cero en algún punto de (x_1, x_2).

Demostración. Supongamos que ψ no se hace cero en (x_1, x_2), sin pérdida de generalidad se puede asumir que $\psi(x) > 0$ y también $\varphi(x) > 0$ en (x_1, x_2). Multiplicando la ecuación (4) por ψ y la ecuación (5) por φ, además substrayendo tenemos

$$\left(P\varphi'\right)'\psi - \left(P\psi'\right)'\varphi + \left(Q_1 - Q\right)\varphi\psi = 0$$

o equivalentemente

$$\left(P\varphi'\right)'\psi - \left(P\psi'\right)'\varphi = \left(Q - Q_1\right)\varphi\psi, \tag{6}$$

integrando (6), y utilizando el hecho de que $Q > Q_1$, se obtiene

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\left(P\varphi'\right)'\psi - \left(P\psi'\right)'\varphi\right] dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(Q - Q_1\right)\varphi\psi dx > 0.$$

Ahora, como $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = 0$ y

$$\left[P\left(\varphi'\psi - \psi'\varphi\right)\right]' = \left(P\varphi'\right)'\psi - \left(P\psi'\right)'\varphi.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \left[\left(P\varphi'\right)'\psi - \left(P\psi'\right)'\varphi\right] dx &= P\left(\varphi'\psi - \psi'\varphi\right)\Big|_{x_1}^{x_2} \\ &= P(x_2)\varphi'(x_2)\psi(x_2) - P(x_1)\varphi'(x_1)\psi(x_1) > 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Dado que $\varphi(x_2) = 0$ y $\varphi(x) > 0$ a la izquierda de x_2, entonces $\varphi'(x_2) \leq 0$, de manera similar se llega a que $\varphi'(x_1) \geq 0$. Por lo tanto el lado izquierdo de la desigualdad (7) es no positivo, lo cual es una contradicción. ■ ☑

Lemma 2.2. *Suponga que $\varphi \in H^1(\mathbb{R})$ es una solución de*

$$-\left(Pu'\right)' + Qu = 0, \quad u(x_0) = 0 \tag{8}$$

y $\psi \in H^1(\mathbb{R})$ es una solución de

$$-\left(Pu'\right)' + Q_1 u = 0. \tag{9}$$

Si $Q(x) > Q_1(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces existen x_1 y x_2 ceros de ψ tales que $-\infty < x_1 < x_0 < x_2 < \infty$.

Demostración. Solo demostraremos la existencia de $x_2 \in (x_0, \infty)$, pues la existencia de $x_1 \in (-\infty, x_0)$ se prueba de manera análoga.

Primero observemos que si existe $y_0 > x_0$ tal que $\varphi(y_0) = 0$, entonces dado que x_0 y y_0 son ceros de φ se sigue del Teorema 2.1 que ψ debe hacerse cero entre (x_0, y_0).

Si ψ no se hace cero en (x_0,∞), sin perdida de generalidad se puede asumir que $\psi(x)>0$ en (x_0,∞).

Supongamos que $\varphi(x)>0$ en (x_0,∞), entonces multiplicando la ecuación (8) por ψ y la ecuación (9) por φ, además substrayendo tenemos

$$(P\varphi')'\psi-(P\psi')'\varphi=(Q-Q_1)\varphi\psi, \tag{10}$$

integrando (10) entre x_0 e infinito, y utilizando el hecho de que $Q>Q_1,$ se obtiene

$$\int_{x_0}^{\infty}\left[(P\varphi')'\psi-(P\psi')'\varphi\right]dx=\int_{x_0}^{\infty}(Q-Q_1)\varphi\psi dx>0.$$

Ahora, como $\varphi(x_0)=0,\ \varphi,\psi\in H^1(\mathbb{R})$ y

$$[P(\varphi'\psi-\psi'\varphi)]'=(P\varphi')'\psi-(P\psi')'\varphi.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{\infty}\left[(P\varphi')'\psi-(P\psi')'\varphi\right]dx&=P(\varphi'\psi-\psi'\varphi)|_{x_0}^{\infty}\\&=-P(x_0)\varphi'(x_0)\psi(x_0)>0.\end{aligned}$$

Dado que $\varphi(x_0)=0$ y $\varphi(x)$ no tiene ceros a la derecha de x_0, entonces $\varphi'(x_0)\geq 0$, lo cual contradice la desigualdad anterior pues

$$-P(x_0)\varphi'(x_0)\psi(x_0)\leq 0.$$

Por lo tanto, existe un cero x_2 de ψ tal que $x_2\in(x_0,\infty)$. Si $\varphi(x)<0$ en (x_0,∞) la demostración se hace siguiendo un procedimiento similar al caso $\varphi(x)>0$ en (x_0,∞). ▪ ☑

La importancia del siguiente teorema radica en que permite comparar el número de ceros de las funciones propias del operador $\mathcal{J}$, para valores propios distintos.

Teorema 2.3. *Sean φ_1 y $\varphi_2\in H^1(\mathbb{R})$ funciones propias de $\mathcal{J}$ definido en (3) con valores propios λ_1 y λ_2 y con números de ceros n_1 y n_2 respectivamente. Si $\lambda_2>\lambda_1$, entonces $n_2>n_1$.*

Demostración. Por hipótesis φ_1 y φ_2 son funciones propias de $\mathcal{J}$ con valores propios λ_1 y λ_2, entonces φ_1 y φ_2 satisfacen

$$\begin{aligned}&-(P\varphi_1')'+(Q-\lambda_1)\varphi_1=0\\&-(P\varphi_2')'+(Q-\lambda_2)\varphi_2=0.\end{aligned}$$

Consideremos el caso $n_1>0$. Sean $\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_{n_1}$ todos los ceros de φ_1, como $\lambda_2>\lambda_1$, entonces $Q-\lambda_1>Q-\lambda_2$. Por consiguiente del Teorema 2.1 se concluye la existencia de un cero de φ_2 en cada intervalo (α_i,α_{i+1}) para $i=1,2,\ldots,n_1-1$. Ahora vamos a mostrar que por lo menos un cero de φ puede ser encontrado en cada uno de los siguientes intervalos $(-\infty,\alpha_1)$ y (α_{n_1},∞). Por hipótesis $\varphi_1(\alpha_1)=0$ y $\varphi_1(\alpha_{n_1})=0$. Aplicando el Lema 2.2 a las soluciones φ_1 y φ_2 bajo la condición $\varphi_1(\alpha_1)=0$, se concluye que existe un $\alpha_s\in(-\infty,\alpha_1)$ tal que $\varphi_2(\alpha_s)=0$. De manera similar se prueba la existencia de $\alpha_t\in(\alpha_{n_1},\infty)$.

La primera observación es que $\mathcal{J}$ es auto-adjunto en $L^2(\mathbb{R})$ para todo $u,v\in H^1(\mathbb{R})$, esto es $\langle\mathcal{J}u,v\rangle_{L^2(\mathbb{R})}=\langle u,\mathcal{J}v\rangle_{L^2(\mathbb{R})}$. En efecto, sea $v\in H^1(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{J}u,v\rangle_{L^2(\mathbb{R})}&=\int_{\mathbb{R}}\left[-(Pu')'v+Quv\right]dx\\&=\int_{\mathbb{R}}\left[Pu'v'+Quv\right]dx\\&=\int_{\mathbb{R}}\left[-(Pv')'u+Quv\right]dx\\&=\langle u,\mathcal{J}v\rangle_{L^2(\mathbb{R})}.\end{aligned}$$

Ahora, supongamos que $n_2=n_1=0$, entonces $\int_{\mathbb{R}}\varphi_1\varphi_2\,dx=\langle\varphi_1,\varphi_2\rangle_{L^2(\mathbb{R})}\neq 0$ pues φ_1 y φ_2 tienen signo definido. Por otro lado, utilizando el hecho de que $\mathcal{J}$ es auto-adjunto en $L^2(\mathbb{R})$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
\lambda_1\langle\varphi_1,\varphi_2\rangle_{L^2(\mathbb{R})} &= \langle\lambda_1\varphi_1,\varphi_2\rangle_{L^2(\mathbb{R})}\\
&= \langle\mathcal{J}\varphi_1,\varphi_2\rangle_{L^2(\mathbb{R})}\\
&= \langle\varphi_1,\mathcal{J}\varphi_2\rangle_{L^2(\mathbb{R})}\\
&= \lambda_2\langle\varphi_1,\varphi_2\rangle_{L^2(\mathbb{R})},
\end{aligned}
$$

luego $(\lambda_2-\lambda_1)\langle\varphi_1,\varphi_2\rangle_{L^2(\mathbb{R})}=0$, en consecuencia $\lambda_1=\lambda_2$ lo cual es una contradicción.■ ☑

3. Espectro

A continuación se aplica los resultados generales al operador L definido en (1) . Primero se demuestra que el operador L de $H^2(\mathbb{R})$ en $L^2(\mathbb{R})$ es acotado y auto-adjunto en $L^2(\mathbb{R})$, luego que T_q es compacto y $\sigma_{es}(M)=[c^2-1,\infty)$ y por último se concluye que $\sigma_{es}(L)=[c^2-1,\infty)$ con la ayuda del siguiente teorema.

Teorema 3.1. *Suponga que A y B son operadores auto-adjuntos en un espacio de Hilbert tal que $A-B$ es un operador compacto. Entonces $\sigma_{es}(A)=\sigma_{es}(B)$. (Para una demostración vease [1]).*

Lemma 3.2. *El operador $L: H^2(\mathbb{R})\to L^2(\mathbb{R})$ definido por (1) es acotado y auto-adjunto en $L^2(\mathbb{R})$.*

Demostración. Iniciemos probando que L es auto-adjunto en $L^2(\mathbb{R})$. En efecto

$$
\begin{aligned}
\langle Lu,v\rangle_{L^2(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} L(u)v\,dx\\
&= \int_{\mathbb{R}} \left[-(bc^2-a)u''v+(c^2-1-3cq)uv\right]\,dx\\
&= \int_{\mathbb{R}} \left[-(bc^2-a)v''u+(c^2-1-3cq)vu\right]\,dx\\
&= \langle u,Lv\rangle_{L^2(\mathbb{R})}.
\end{aligned}
$$

Utilizando la desigualdad de Young

$$|ab|\leq\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2},$$

y el hecho que $\text{máx}\{c^2-1-3cq(x):x\in\mathbb{R}\}\leq 3(c^2-1)$ se prueba que L es acotado. En efecto,

$$
\begin{aligned}
\|Lu\|^2_{L^2(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} |-(bc^2-a)u''+(c^2-1-3cq)u|^2\,dx\\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \left\{\left[(bc^2-a)u''\right]^2+2|(bc^2-a)u''||3(c^2-1)u|+\left[3(c^2-1)u\right]^2\right\}\,dx\\
&\leq 2(bc^2-a)^2\int_{\mathbb{R}}|u''|^2\,dx+18(c^2-1)^2\int_{\mathbb{R}}|u|^2\,dx\\
&\leq C^2\|u\|^2_{H^2(\mathbb{R})}.
\end{aligned}
$$

De la desigualdad anterior se obtiene que $\|Lu\|_{L^2(\mathbb{R})}\leq C\|u\|_{H^2(\mathbb{R})}$.■ ☑

Lemma 3.3. *Sea $M: H^2(\mathbb{R})\to L^2(\mathbb{R})$ el operador definido por*

$$Mu=-(bc^2-a)u''+(c^2-1)u,$$

entonces $\sigma_{es}(M)=[c^2-1,\infty)$.

Demostración. Iniciemos mostrando que $\sigma(M)=[c^2-1,\infty)$. Observe que

$$\|(M-\lambda)u\|_2^2=\|(M-\text{Re}\lambda)u\|_2^2+(\text{Im}\lambda)^2\|u\|_2^2\,,\qquad u\in H^2(\mathbb{R}). \tag{11}$$

De la igualdad (11), se tiene que

$$\|(M-\lambda)u\|_2\geq|\text{Im}\lambda|\|u\|_2\,,\qquad u\in H^2(\mathbb{R}). \tag{12}$$

Si $\mathrm{Im}\lambda \neq 0$, la desigualdad (12) implica que el operador $M - \lambda I$ es inyectivo. Por el Teorema de la inversa acotada se concluye que el operador resolvente $R_\lambda(M) = (M - \lambda I)^{-1}$ existe y es acotado en $L^2(\mathbb{R})$. Por otro lado, aplicando el Teorema de Plancherel tenemos que

$$\begin{aligned}
\|(M-\lambda)u\|_2^2 &= \| -(bc^2-a)u'' + (c^2-1-\lambda)u\|_2^2 \\
&= \| \left[(bc^2-a)\xi^2 + (c^2-1-\lambda)\right] \widehat{u}(\xi)\|_2^2 \\
&= \int_{\mathbb{R}} [(bc^2-a)\xi^2 + (c^2-1-\lambda)][(bc^2-a)\xi^2 + (c^2-1-\overline{\lambda})]|\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left[(bc^2-a)^2\xi^4 + 2(bc^2-a)(c^2-1-\mathrm{Re}\lambda)\xi^2 + |c^2-1-\lambda|^2\right] |\widehat{u}(\xi)|^2\, d\xi.
\end{aligned}$$

Observemos que si $c^2 - 1 - \mathrm{Re}\lambda > 0$, entonces

$$\|(M-\lambda)u\|_2 \geq |c^2-1-\lambda| \left(\int_{\mathbb{R}} |\widehat{u}(\xi)|^2\, d\xi\right)^{1/2} \geq |c^2-1-\mathrm{Re}\lambda|\|u\|_2.$$

Si $c^2 - 1 > \mathrm{Re}\lambda$, nuevamente por el Teorema de la inversa acotada se concluye que el operador $R_\lambda(M)$ existe y es acotado. En consecuencia, si $c^2 - 1 > \mathrm{Re}\lambda$ o $\mathrm{Im}\lambda \neq 0$, entonces $\lambda \in \rho(M)$. Como $\sigma(M)$ es el complemento en $\mathbb{C}$ de $\rho(M)$, entonces $\sigma(M) \subseteq [c^2-1, \infty)$. Probemos ahora que $\lambda \in \sigma(M)$ si $\lambda \geq c^2 - 1$. Sea $\psi(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sec h^2 x$ y definamos

$$\psi_\epsilon(x) = \sqrt{\epsilon}\, e^{\left(i\sqrt{\frac{\lambda-(c^2-1)}{bc^2-a}}\, x\right)} \psi(\epsilon x), \quad \epsilon > 0.$$

Ahora, $\psi'_\epsilon(x)$ y $\psi''_\epsilon(x)$ estan dadas por

$$\begin{aligned}
\psi'_\epsilon(x) &= e^{i\sqrt{\frac{\lambda-(c^2-1)}{bc^2-a}}\, x} \left(\sqrt{\epsilon} i\sqrt{\frac{\lambda-(c^2-1)}{bc^2-a}}\psi(\epsilon x) + \epsilon^{3/2}\psi'(\epsilon x)\right) \\
\psi''_\epsilon(x) &= e^{i\sqrt{\frac{\lambda-(c^2-1)}{bc^2-a}}\, x} \left(-\sqrt{\epsilon}\left[\frac{\lambda-(c^2-1)}{bc^2-a}\right]\psi(\epsilon x) + 2\epsilon^{3/2}\sqrt{\frac{\lambda-(c^2-1)}{bc^2-a}} i\psi'(\epsilon x) + \epsilon^{5/2}\psi''(\epsilon x)\right)
\end{aligned}$$

En consecuencia se tiene que ψ_ϵ satisface

$$\begin{aligned}
(M-\lambda)\psi_\epsilon &= -(bc^2-a)\psi''_\epsilon + (c^2-1-\lambda)\psi_\epsilon \\
&= -\epsilon^{3/2}(bc^2-a)\exp\left(i\sqrt{\tfrac{\lambda-(c^2-1)}{bc^2-a}}\, x\right)\left[2i\sqrt{\tfrac{\lambda-(c^2-1)}{bc^2-a}}\psi'(\epsilon x) + \epsilon\psi''(\epsilon x)\right].
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\|(M-\lambda)\psi_\epsilon\|_2 = \epsilon^{3/2}(bc^2-a)\left\|2\sqrt{\frac{\lambda-(c^2-1)}{bc^2-a}} i\psi'(\epsilon x) + \epsilon\,\psi''(\epsilon x)\right\|_2.$$

Observemos que

$$\begin{aligned}
\|\psi_\epsilon\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}} \left|\sqrt{\epsilon}\exp\left(i\sqrt{\tfrac{\lambda-(c^2-1)}{bc^2-a}}\right)\psi(\epsilon x)\right|^2 dx \\
&= \epsilon\int_{\mathbb{R}} |\psi(\epsilon x)|^2\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} |\psi(u)|^2\, du = \|\psi\|_2^2 = 1.
\end{aligned}$$

Ahora, la derivada de $\psi(\epsilon x)$ está dada

$$\psi'(\epsilon x) = -\sqrt{3}\,\epsilon\, \sec h^2(\epsilon x)\tanh(\epsilon x),$$

y por tanto

$$
\begin{aligned}
\|\psi'(\epsilon x)\|_2^2 &= 3\epsilon^2 \int_{-\infty}^{\infty} \sec h^4(\epsilon x)\tanh^2(\epsilon x)\,dx, \quad u=\epsilon x\\
&= 3\epsilon \int_{-\infty}^{\infty} \sec h^4 u\, \tanh^2 u\,du\\
&= 3\epsilon \int_{-\infty}^{\infty} (1-\tanh^2 u)\tanh^2 u\,\sec h^2 u\,du, \quad v=\tanh u\\
&= 3\epsilon \int_{-1}^{1} (1-v^2)v^2\,dv\\
&= \frac{4\epsilon}{5}.
\end{aligned}
$$

Derivando $\psi'(\epsilon x)$, se tiene que

$$\psi''(\epsilon x) = -\sqrt{3}\,\epsilon^2\,[-2\sec h^2(\epsilon x)\tanh^2(\epsilon x)+\sec h^4(\epsilon x)],$$

y por tanto

$$
\begin{aligned}
\|\psi''(\epsilon x)\|_2^2 &= 3\epsilon^4 \int_{-\infty}^{\infty} |-2\sec h^2(\epsilon x)\tanh^2(\epsilon x)+\sec h^4(\epsilon x)|^2\,dx\\
&= 3\epsilon^3 \int_{-\infty}^{\infty} [4\sec h^4 u\tanh^4 u - 4\sec h^6 u\tanh^2 u+\sec h^8 u]\,du\\
&= 3\epsilon^3\left[4\frac{4}{35}-4\frac{16}{105}+\frac{32}{35}\right]\\
&= \frac{16\epsilon^3}{7},
\end{aligned}
$$

luego $\|\psi'(\epsilon x)\|_2 = 2\sqrt{\epsilon/5}$ y $\|\psi''(\epsilon x)\|_2 = 4\sqrt{\epsilon^3/7}$. De aquí

$$
\begin{aligned}
\frac{\|(M-\lambda)\psi_\epsilon\|_2}{\|\psi_\epsilon\|_2} &= \|(M-\lambda)\psi_\epsilon\|_2\\
&= \epsilon^{3/2}(bc^2-a)\left\|2\sqrt{\tfrac{\lambda-(c^2-1)}{bc^2-a}}\,i\psi'(\epsilon x)+\epsilon\,\psi''(\epsilon x)\right\|_2\\
&\le \epsilon^{3/2}(bc^2-a)\left[2\sqrt{\tfrac{\lambda-(c^2-1)}{bc^2-a}}\,\|\psi'(\epsilon x)\|_2+\epsilon\,\|\psi''(\epsilon x)\|_2\right]\\
&= 4\epsilon^2(bc^2-a)\left[\sqrt{\frac{\lambda-(c^2-1)}{5(bc^2-a)}}+\frac{\epsilon^2}{\sqrt{7}}\right].
\end{aligned}
$$

En consecuencia, existe una sucesión $\{\psi_{1/n}\}$ con $\|\psi_{1/n}\|_2 = 1$ tal que

$$\frac{\|(M-\lambda)\psi_{1/n}\|_2}{\|\psi_{1/n}\|_2} \to 0 \quad \text{cuando} \quad n\to\infty.$$

Del criterio de no invertibilidad se concluye que si $\lambda \ge c^2-1$, entonces $\lambda\in\sigma(M)$, dado que

$$\sigma(M) = \sigma_{dis}(M)\cup\sigma_{es}(M),$$

sólo resta determinar $\sigma_{dis}(M)$. Sea $u\in H^2(\mathbb{R})$ tal que $Mu=\lambda u$ para algún $\lambda\ge c^2-1$, entonces

$$
\begin{aligned}
\|(M-\lambda)u\|_2^2 &= \|-(bc^2-a)u''+(c^2-1-\lambda)u\|_2^2\\
&= \|[(bc^2-a)\xi^2+c^2-1-\lambda]\widehat{u}(\xi)\|_2^2\\
&= \int_{\mathbb{R}} |(bc^2-a)\xi^2+c^2-1-\lambda|^2|\widehat{u}(\xi)|^2\,dx\\
&= \int_{\mathbb{R}-I_\lambda} |(bc^2-a)\xi^2+c^2-1-\lambda|^2|\widehat{u}(\xi)|^2\,dx = 0,
\end{aligned}
$$

donde el conjunto

$$\begin{aligned} I_\lambda &= \left\{\xi \in \mathbb{R} : (bc^2 - a)\xi^2 + c^2 - 1 - \lambda = 0\right\} \\ &= \left\{-\sqrt{\tfrac{\lambda-(c^2-1)}{bc^2-a}}, \sqrt{\tfrac{\lambda-(c^2-1)}{bc^2-a}}\right\}, \end{aligned}$$

tiene medida de Lebesgue cero. Como $|(bc^2 - a)\xi^2 + (c^2 - 1 - \lambda)| > 0$ para todo $\xi \in \mathbb{R} - I_\lambda$, tenemos que $\widehat{u}(\xi) = 0$ casi en todas partes. Por lo tanto $\widehat{u} \equiv 0$ y λ no es un valor propio, en consecuencia $\sigma_{dis}(M) = \varnothing$.■ ☑

Teorema 3.4. *El operador $T_q : H^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ definido por*

$$T_q u = qu$$

es compacto.

Demostración. Suponga que existe una sucesión acotada $\{u_n\}$ en $H^2(\mathbb{R})$, se requiere probar que la sucesión $\{u_n q\}$ tiene una subsucesión convergente en $L^2(\mathbb{R})$. Por la suposición sobre la sucesión $\{u_n\}$ se concluye que existe una función $u \in H^2(\mathbb{R})$ tal que u_n converge debílmente a u en $H^2(\mathbb{R})$. Sea $\Omega = (-R, R)$ un intervalo abierto, entonces

$$\begin{aligned} \|(u_n - u)q\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}} |u_n - u|^2 |q|^2 \, dx \\ &= \int_{\Omega} |u_n - u|^2 |q|^2 \, dx + \int_{\mathbb{R}\setminus\Omega} |u_n - u|^2 |q|^2 \, dx. \end{aligned}$$

Como la inclusión de $H^2(\Omega)$ en $L^2(\Omega)$ es compacta sobre el intervalo acotado Ω, entonces u_n converge a u en $L^2(\Omega)$-norma; es decir, para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N$ implica que

$$\|u_n - u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |u_n - u|^2 \, dx < \epsilon^2.$$

Como q es acotado, entonces para $n \geq N$

$$\int_{\Omega} |u_n - u|^2 |q|^2 \, dx < k_1 \|u_n - u\|_{L^2(\Omega)}^2 < k_1 \epsilon^2,$$

donde k_1 es constante. Por otro lado, como u_n converge debílmente a u en $H^2(\mathbb{R})$ entonces $\|u_n - u\|_2$ es acotado. Ahora. Más aun, existe $R > 0$ lo suficientemente grande tal que si $|x| > R$, entonces $|q(x)| < \epsilon$. Por lo tanto

$$\int_{\mathbb{R}\setminus\Omega} |u_n - u|^2 |q|^2 \, dx < \epsilon^2 \int_{\mathbb{R}\setminus\Omega} |u_n - u|^2 \, dx < k_2 \epsilon^2,$$

donde k_2 es una constante. En consecuencia

$$\|(u_n - u)q\|_2^2 < (k_1 + k_2)\epsilon^2$$

Lo anterior implica que $\|(u_n - u)q\|_2$ puede hacerse arbitrariamente pequeño, eligiendo n suficientemente grande. Esto prueba que qu_n converge a qu en $L^2(\mathbb{R})$.■ ☑

Teorema 3.5. *Sea L el operador definido en (1)*

$$Lu = -(bc^2 - a)u'' + (c^2 - 1)u - 3cqu,$$

entonces $\sigma_{es}(L) = [c^2 - 1, \infty)$.

Demostración. Dado que $\mathcal{D}(L) = \mathcal{D}(M) = H^2(\mathbb{R})$ y $(L - M)u = -3cT_q u$ es compacto, entonces el Teorema 3.1 asegura que $\sigma_{es}(L) = \sigma_{es}(M) = [c^2 - 1, \infty)$.■ ☑

Los resultados más relevantes se resumen en los Teoremas 3.6 y 3.7, en los cuales se caracteriza el espectro del operador L.

Teorema 3.6. *El espectro del operador $L : H^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ consiste de una parte esencial $[c^2 - 1, \infty)$ junto con un número finito de valores propios discretos (con espacios propios finito-dimensionales) en el intervalo $[-2(c^2 - 1), c^2 - 1)$.*

Demostración. Iniciemos mostrando que el operador L es acotado inferiormente, esto significa que existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $\langle L\varphi, \varphi\rangle_{L^2(\mathbb{R})} \geq \beta\langle \varphi, \varphi\rangle_{L^2(\mathbb{R})}$ para todo $\varphi \in H^2(\mathbb{R})$. En efecto, observemos que $\inf\{c^2 - 1 - 3cq(x) : x \in \mathbb{R}\} = -2(c^2 - 1)$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\langle Lu, u\rangle_{L^2(\mathbb{R})} &= \langle -(bc^2 - a)u_{xx}, u\rangle_{L^2(\mathbb{R})} + \int_{\mathbb{R}} [c^2 - 1 - 3cq(x)]|u(x)|^2\, dx \\
&= \langle (bc^2 - a)u_x, u_x\rangle_{L^2(\mathbb{R})} + \int_{\mathbb{R}} [c^2 - 1 - 3cq(x)]|u(x)|^2\, dx \\
&\geq \int_{\mathbb{R}} [c^2 - 1 - 3cq(x)]|u(x)|^2\, dx \\
&\geq -2(c^2 - 1) \int_{\mathbb{R}} |u(x)|^2\, dx. \qquad (13)
\end{aligned}$$

La relación (13) muestra que el espectro del operador L es acotado inferiormente. En efecto, inicialmente del Teorema 3.4 tenemos que $\sigma_{es}(L) = [c^2 - 1, \infty)$. Ahora, sea $\lambda \in \sigma_{dis}(L)$ y $Lu = \lambda u$, entonces reemplazando en la desigualdad (13) se llega a que $\lambda \geq -2(c^2 - 1)$. Esto implica que $\sigma_{dis}(L) \subset \big[-2(c^2 - 1), c^2 - 1\big)$, resta mostrar que $\sigma_{dis}(L)$ es finito.

Suponga que existe una sucesión $\{\lambda_n\} \subseteq \sigma_{dis}(L) \subset [-2(c^2 - 1), c^2 - 1)$, entonces existe una subsucesión $\{\lambda_{n_k}\}$ tal que $\lambda_{n_k} \to \lambda$ cuando $k \to \infty$ y $\lambda \in [\beta, c^2 - 1]$. Consideremos dos casos:

(a) Supongamos que $\lambda \in [-2(c^2 - 1), c^2 - 1)$. Debido a que $\sigma(L)$ es cerrado y $\{\lambda_{n_k}\}$ converge a λ se tiene que $\lambda \in \sigma(L)$, pero esto implica que $\lambda \in \sigma_{dis}(L)$ lo cual es una contradición.

(b) Supongamos ahora que $\lambda = c^2 - 1$, consideremos

$$\begin{aligned}
L - (c^2 - 1)I &= L - \lambda_n I + [\lambda_n - (c^2 - 1)]I \\
&= \mathcal{J}_n + [\lambda_n - (c^2 - 1)]I, \qquad \lambda_n \in \sigma_{dis}(L).
\end{aligned}$$

Observemos que $\mathcal{J}_n$ es auto-adjunto en $L^2(\mathbb{R})$, entonces

$$\dim\left[\mathcal{R}(\mathcal{J}_n)^{\perp}\right] = \dim\left[\mathcal{N}(\mathcal{J}_n^*)\right] = \dim\left[\mathcal{N}(\mathcal{J}_n)\right] < \infty \qquad (14)$$

Como L es auto-adjunto en $L^2(\mathbb{R})$, $\lambda_n \in \sigma_{dis}(L)$ y además se tiene (14), entonces aplicando el Teorema 3.5 se concluye que $\mathcal{R}(\mathcal{J}_n)$ es cerrado. Ahora, eligiendo n suficientemente grande existe η tal que $\eta = \lambda_n - (c^2 - 1)$, entonces por el Teorema 3.4 se concluye que $\mathcal{R}[\mathcal{J}_n + \eta I] = \mathcal{R}[L - (c^2 - 1)I]$ es cerrado, además

$$\dim\left[\mathcal{R}(L - (c^2 - 1)I)^{\perp}\right] = \dim\left[\mathcal{N}(L - (c^2 - 1)I)\right] < \infty,$$

por ser $L - (c^2 - 1)I$ auto-adjunto en $L^2(\mathbb{R})$, luego aplicando el Teorema 3.5 se concluye que $\lambda = c^2 - 1 \notin \sigma_{es}(L)$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto necesitamos tener que $\sigma_{dis}(L)$ es finito.■ ☑

Observemos que la derivada de la función q definida en (2)

$$\begin{aligned}
q'(x) &= -2\gamma\frac{c^2 - 1}{c}\ \sec h^2(\gamma x)\tanh(\gamma x) \\
&= -\frac{2\gamma(c^2 - 1)(e^{\gamma x} - e^{-\gamma x})}{c(e^{\gamma x} + e^{-\gamma x})^2}, \qquad \gamma = \sqrt{\frac{c^2 - 1}{bc^2 - a}},
\end{aligned}$$

tiene un único cero en $x = 0$.

Teorema 3.7. *El operador diferencial $L : H^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ definido en (1)*

$$Lu = -(bc^2 - a)u'' + (c^2 - 1 - 3cq)u,$$

tiene exactamente un valor propio negativo simple tal que cualquier función propia ψ correspondiente satisface que $\psi > 0$ o $\psi < 0$, el valor propio cero es simple con función propia asociada q'.

Demostración. Iniciemos mostrando que $\lambda = 0$ es un valor propio con función propia correspondiente q'. En efecto

$$\begin{aligned} L(q') &= -(bc^2 - a)q''' + (c^2 - 1 - 3cq)q' \\ &= \left[-(bc^2 - a)q'' + (c^2 - 1)q - \frac{3}{2}cq^2\right]' \\ &= 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Por otro lado, el Teorema 3.6 garantiza la existencia de un valor propio mínimo λ_0. Supongamos por contradicción que la función propia ψ correspondiente a λ_0 tiene al menos un cero x_0. Ahora como cero es un valor propio de L con función propia correspondiente q', entonces $\lambda_0 < 0$ y ψ, q' satisfacen $L(\psi) = \lambda_0 \psi$ y $L(q') = 0$; es decir que

$$\begin{aligned} -\left(bc^2 - a\right)\psi'' + \left(c^2 - 1 - 3cq - \lambda_0\right)\psi = 0 \\ -\left(bc^2 - a\right)q''' + \left(c^2 - 1 - 3cq\right)q' = 0. \end{aligned}$$

Observemos que $c^2 - 1 - 3cq - \lambda_0 > c^2 - 1 - 3cq$ y $\psi(x_0) = 0$, por el Lema 2.2 existen x_1, x_2 ceros de q' tales que $-\infty < x_1 < x_0 < x_2 < \infty$, lo cual es una contradicción porque q' solo tiene un cero. Afirmamos ahora que λ_0 es un valor propio simple de L. En efecto, supongamos ahora que ψ_1 y ψ_2 son funciones propias correspondientes a λ_0, entonces el wronskiano de la ecuación de valores propios está dado por

$$W(\psi_1, \psi_2) = \psi_1\psi_2' - \psi_1'\psi_2.$$

Observe que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}W(\psi_1, \psi_2) &= (\psi_1\psi_2' - \psi_2\psi_1')' \\ &= \psi_2''\psi_1 - \psi_2\psi_1'' \\ &= \frac{1}{bc^2 - a}\left[\psi_2 L(\psi_1) - \psi_1 L(\psi_2)\right] \\ &= \frac{1}{bc^2 - a}\left[\psi_2\left(\lambda_0\psi_1\right) - \psi_1\left(\lambda_0\psi_2\right)\right] \\ &= 0, \end{aligned}$$

entonces $W(\psi_1, \psi_2) = k$, donde k es una constante. Ahora

$$\lim_{x\to\infty} k = \lim_{x\to\infty}(\psi_1\psi_2' - \psi_2\psi_1') = 0,$$

entonces $k = 0$. En consecuencia las funciones propias φ_1 y φ_2 son linealmente dependientes, lo cual muestra que λ_0 es un valor propio simple. De manera similar se muestra que $\lambda = 0$ es un valor propio simple.

Ahora veremos que no existen valores propios de L en $(\lambda_0, 0)$. Supongamos que existe $\lambda_1 \in (\lambda_0, 0)$ tal que $L\psi = \lambda_1\psi$ con $\psi \in \mathcal{D}(L) - \{0\}$. Como $\lambda_1 > \lambda_0$, se sigue del Teorema 2.3 que ψ debe tener al menos un cero. Dado que $0 > \lambda_1$, aplicando otra vez al Teorema 2.3 pero en esta ocasión a los valores propios λ_1 y $\lambda_2 = 0$ se concluye que q' debe tener al menos dos ceros, lo cual es una contradicción.■ ☑

Referencias

[1] M. Reed, B. Simon,*Methods of modern mathematical physics. I. Functional analysis*. Second edition. Academic Press, Inc., New York, 1980.

[2] J. Angulo, Existence and Stability of Solitary Wave Solutions to Nonlinear Dispersive Evolution Equation, Publicacões Matemáticas. IMPA. 2003.

[3] H. Brezis, *Análisis Funcional teoría y aplicaciones*. Alianza Editorial. Madrid. 1984.

[4] K. Yosida, *Functional Analysis*. Springer, New York, 1965.

[5] M. Berger, *Nonlinearity and Functional Analysis*. Academic Press, New York, 1997.

[6] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Aplications*. Volumen I,IIB, Springer-Verlag, New York, 1990.

[7] E. Codington, N. Levinson, *Theory of Ordinary Diferential Equations*,Mc Graw-Hill.1995.