REVISTA DE CIENCIAS, Vol. 3, No. 1 de 2013.

Teoría Electromagnética de Podolsky

Podolsky's Electromagnetic Theory

Jairo Andres Fajardo

Departamento de Física, Universidad de Nariño
Ciudad Universitaria Torobajo - Calle 18 Kra 50
San Juan de Pasto, Nariño, Colombia

Aceptado Mayo; Publicado en línea Junio.

ISSN 2256-3830.

Resumen

Este trabajo está dedicado al estudio de la teoría electromagnético de Podolsky; se calcularan las correspondientes ecuaciones de campos y las cargas de Noether asociadas al grupo de Poincare. Se deducirá el segundo teorema de Noether para esta teoría y se realizara un estudio canónico de la misma utilizando el método de Dirac.

***Palabras Claves*:** Teoría Electromagnética de Podolsky, Método de Dirac.

Abstract

This work is dedicated to study of Podolsky's electromagnetic theory; the corresponding field equations and the Noether charges associated to the Poincare group will be calculate. The second Noether theorem is deduced and an canonical study od the theory is realized using the Dirac's method.

***Keywords*:** Podolsky's Electromagnetic Theory, Dirac's Method.

1. Introduction

Como es conocido, la teoría electromagnética de Maxwell tiene unadependencia r^{-1} en el potencial electrostático de Coulomb para una carga eléctrica puntual. Este hecho, tiene como consecuencia divergencias en el origen tanto en la energía como en el potencial electrostático [1]. Una solución a este tipo de problemas fue propuesta por Podolsky y Schwed en el año de 1948 [2], y consistía en una generalización de la teoría del electromagnetismo al adicionar un término de segundo orden en las derivadas en el campo electromagnético A_μ. De esta manera, el Lagrangiano que describirá la teoría electromagnética de Podolsky, como es conocida, es [3]:

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + a^2\partial_\lambda F^{\alpha\lambda}\partial^\rho F_{\alpha\rho} \tag{1}$$

siendo a un parámetro constante con dimensiones de longitud y juega el papel de un cut-off. $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, es el tensor de campo electromagnético expresado en término del campo $A_\mu(x) = (\varphi, -\mathbf{A})$; donde φ representa el potencial escalar y $\mathbf{A}$ representa el potencial vectorial magnético.

La teoría electromagnética de Podolsky se reduce a la teoría de Maxwell en el límite $a \to 0$, y se caracteriza por una contribución finita en el origen a la energía del campo al igual que al potencial de una carga eléctrica puntual

[3,4,5,6]. La versión cuántica de esta teoría determina la existencia de fotones masivos con una masa $m_\gamma = \frac{\hbar}{ac}$ [4,6]. Un estudio de la influencia del potencial electrostático de Podolsky en la teoría del estado fundamental del átomo de hidrógeno ha permitido establecer límites para la constante a, ($a \leq 5{,}56 fm$); y para la masa de los fotones ($m_\gamma \geq 35{,}51 MeV$) [4]. Esta masa se interpreta como una escala de energía que caracteriza el régimen en el que la teoría de Podolsky se torna efectiva. Como consecuencia del pequeño valor de la constante de Podolsky (menor que el radio de Bhor ($a_0 = 52,9$ pm), el electromagnetismo de Maxwell es valido hasta pequeñas escalas de longitud, de manera que no se tiene la suficiente precisión para determinar el valor experimental de a mediante experimentos clásicos de electromagnetismo y si el modelo de Podolsky es correcto se esperan desviaciones de la electrodinámica de Maxwell en escalas de alta energía [4,6].

La teoría electromagnética de Podolsky es invariante ante el grupo de simetría global de Poincaré [8], como consecuencia del primer teorema de Noether, las cargas asociadas a este grupo de simetría son: la energía, el momentum lineal, el momentum angular, y el spin. Además, es una teoría gauge $U(1)$, es decir, invariante por transformaciones gauges locales del cuadrivector potencial, por lo tanto, de acuerdo al segundo teorema de Noether: existe una ecuación de continuidad, se debe exigir el cumplimiento de las identidades de Bianchi, y posee un Lagrangiano singular [9,10].

El hecho que las variables dinámicas de la teoría de Podolsky no son independientes, es decir, que existen vínculos [3,11], hace necesario que el estudio de la estructura canónica se debe desarrollar por medio del método de Dirac [12]. La teoría de Podolsky posee vínculos de primera clase, lo que implica fijar condiciones de gauge. En el estudio de la estructura Hamiltoniana de la teoría electromagnética de Podolsky vía método de Dirac, se impondrá la versión generalizada de la condición de gauge de radiación [3].

2. Simetrías gauge locales en la teoría de Podolsky

La teoría electromagnética de Podolsky es una teoría gauge $U(1)$, lo que significa que el Lagrangiano que la describe es invariante por las siguientes transformaciones gauge locales del cuadrivector potencial A_μ [1]:

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \in (x) \tag{2}$$

$$\delta A_\mu \equiv A'_\mu(x) - A_\mu(x) = \partial_\mu \in (x)$$

Esto quiere decir que: $\mathscr{L}[A_\mu(x)] = \mathscr{L}'[A'_\mu(x)]$. Los generadores del grupo de simetría $U(1)$, son [7]:

$$X^\mu{}_\beta(x) = 0 \qquad \Phi_{\beta a}(\psi, x) = 0 \qquad \varphi_{\mu\beta a}(\psi, x) = \mathbf{I} \tag{3}$$

La función $\in (x)$ definida en el espacio-tiempo es arbitraria, como consecuencia, el cuadrivector potencial no se determina de manera única. El hecho de fijar condiciones sobre el cuadrivector A_μ, para exigir el cumplimiento de determinadas propiedades físicas; se conoce como condiciones de gauge. Por ejemplo, en la electrodinámica de Maxwell al exigir el cumplimiento de la ecuación de onda por parte del cuadrivector potencial, se debe fijar la condición de gauge de Lorenz [1].

Como consecuencia del segundo teorema de Noether, el Lagrangiano que describe la teoría electromagnética de Podolsky es singular, de manera que el determinante de la matriz Hessiana es nulo [3,11]:

$$|W_0^{\mu\nu}| = \left|\frac{\partial^2 \mathscr{L}}{\partial \ddot{A}_\nu \partial \ddot{A}_\mu}\right| = \left|2a^2(\eta^{\mu\nu} - \eta^{\mu 0}\eta^{0\nu})\right| = -2a^2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{4}$$

El rango de esta matriz es tres ($R = 3$), por lo tanto existe $(N - R) = (4 - 3) = 1$, un vínculo a nivel Lagrangiano, y dos vínculos primarios a nivel Hamiltoniano [9].

Las identidades de Bianchi [13], consecuencia del segundo teorema de Noether; son definidas para el caso de la teoría electromagnética de Podolsky en la forma:

$$\partial_\mu F_{\nu\alpha} + \partial_\alpha F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\alpha\mu} = 0 \tag{5}$$

y la ecuación de continuidad [7,3], con $j_{\mu\beta} = 0$, es:

$$\partial_\mu L^\mu = 0 \tag{6}$$

3. Ecuaciones de campo de la teoría de Podolsky

Las ecuaciones de campo de la teoría de Podolsky son [3,11]:

$$(1 + 2a^2\Box)\partial_\lambda F^{\lambda\alpha} = 0 \tag{7}$$

que en términos del cuadrivector potencial pueden ser escritas como:

$$(1 + 2a^2\Box)\Box A^\alpha - \partial^\alpha(1 + 2a^2\Box)\partial_\lambda A^\lambda = 0 \tag{8}$$

Del conjunto de cuatro ecuaciones de campo (8), solo tres son de cuarto orden en las derivadas temporales, de tal manera que una ecuación de campo ($\alpha = 0$), corresponde a un vínculo a nivel Lagrangiano.

La teoría electromagnética de Podolsky es una teoría gauge $U(1)$, como consecuencia, el cuadrivector potencial no se determina de manera única. Si se exige el cumplimiento de la ecuación de onda generalizada por parte del campo A_μ:

$$(1 + 2a^2\Box)\Box A^\alpha = 0 \tag{9}$$

se debe fijar sobre A_μ la siguiente condición generalizada del gauge de Lorenz [3] :

$$(1 + 2a^2\Box)\partial_\lambda A^\lambda = 0 \tag{10}$$

Utilizando las ecuaciones de campo (5), (7), y la representación matricial del tensor de campo electromagnético $F_{\mu\nu}$, es posible obtener las ecuaciones de campo de la teoría electromagnética de Podolsky (ecuaciones de Maxwell generalizadas) en términos de los campos fundamentales: eléctrico $\mathbf{E}$ y magnético $\mathbf{B}$ [3,5]:

$$(1 + 2a^2\Box)\nabla.\mathbf{E} = 0 \tag{11}$$

$$(1 + 2a^2\Box)(\dot{\mathbf{E}} - \nabla\times\mathbf{B}) = 0 \tag{12}$$

$$\nabla.\mathbf{B} = 0 \tag{13}$$

$$\dot{\mathbf{B}} + \nabla\times\mathbf{E} = 0 \tag{14}$$

Las ecuaciones (11) y (12), son las versiones generalizadas de la ley de Gauss y Ampère respectivamente, en cuanto que (13) es la divergencia del campo magnético y (14) es la ley de inducción de Faraday

La ecuación (13) implica: la no existencia de monopolos magnéticos, y el hecho que las lineas de campo magnético son cerradas. Esta ecuación garantiza que el campo magnético puede ser escrito en términos del rotacional de un campo vectorial; denominado potencial vectorial magnético $\mathbf{A}$ [1]:

$$\nabla.\mathbf{B} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A} \tag{15}$$

La ecuación (14) es simplemente la ley de inducción de Faraday que en forma integral se escribe en la forma:

$$\int_s \dot{\mathbf{B}}.d\mathbf{s} + \oint_c \mathbf{E}.d\mathbf{r} = 0 \tag{16}$$

y establece que un cambio en el flujo magnético a través de una superficie s induce un campo eléctrico a lo largo de la trayectoria c que limita s

Al sustituir (15) en (14), permite expresar el campo eléctrico en términos de un potencial escalar φ, y el potencial vectorial magnético $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \partial_0 \mathbf{A} \tag{17}$$

lo que permite definir el cuadrivector potencial en la forma: $A_\mu(x) = (\varphi, -\mathbf{A})$ [1].

La ecuación diferencial que describe el potencial electrostático de una carga eléctrica puntual e, en la teoría electromagnética de Podolsky se obtiene considerando $A^\mu = [\varphi(r), 0]$; de tal manera que (9) se escribe en la forma [5,6]:

$$-(1 - 2a^2\nabla^2)\nabla^2\varphi(r) = \rho(r) = e\delta(r) \tag{18}$$

donde $\rho(r)$ es la densidad de carga eléctrica puntual. La solución de (18), utilizando transformada de Fourier, es un potencial electrostático tipoYukawa [5,6,14]:

$$\varphi(r) = \frac{e}{4\pi}\frac{1 - e^{-\frac{r}{a}}}{r} \tag{19}$$

y cuenta con las siguientes propiedades: una valor finito en el origen, converge al potencial de Coulomb para $r >> a$, y es de tipo asintótico:

$$\varphi(r) = \begin{cases} \lim\limits_{r\to 0} \varphi(r) = \lim\limits_{r\to 0} \frac{e}{4\pi}\frac{1-e^{-\frac{r}{a}}}{r} = \frac{e}{4\pi a} \\ \\ r >> a \qquad \varphi(r) = \frac{e}{4\pi}\frac{1}{r} \\ \\ \lim\limits_{r\to\infty} \varphi(r) = 0 \end{cases} \tag{20}$$

El campo electrostático para una carga eléctrica puntual es de tipo central [5]:

$$\mathbf{E}(r) = -\nabla\varphi = \frac{e}{4\pi}\left(\frac{1 - e^{-\frac{r}{a}}}{r^2} - \frac{e^{-\frac{r}{a}}}{ar}\right)\mathbf{e_r} \tag{21}$$

de manera que el flujo eléctrico es [5]:

$$\oint_s \mathbf{E}.d\mathbf{s} = e\left[1 - e^{-\frac{r}{a}}\left(1 + \frac{r}{a}\right)\right] = \begin{cases} 0 \quad r << a \\ \\ e \quad r >> a \end{cases} \tag{22}$$

Como consecuencia, para $r >> a$, el flujo es proporcional a la carga eléctrica contenida en el volumen v. En el caso electrostático $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, por lo tanto el campo eléctrico es conservativo.

4. Cargas conservadas en la teoría de Podolsky

La teoría electromagnética de Podolsky es invariante ante el grupo global de Poincaré, como consecuencia del primer teorema de Noether, las cargas conservadas son: la energía, el momentum lineal, el momentum angular orbital, y el spin [3,8,13].

4.1. *Energía del campo electromagnético*

El tensor momentum-energía es [3]:

$$\theta^{\mu}{}_{\alpha} = F^{\nu\mu}F_{\alpha\nu} + \frac{1}{4}\eta^{\mu}{}_{\alpha}F^{\rho\nu}F_{\rho\nu} + a^2\eta^{\mu}{}_{\alpha}(\partial^{\rho}F_{\nu\rho}\partial_{\lambda}F^{\nu\lambda} + F^{\rho\nu}\Box F_{\rho\nu}) \tag{23}$$
$$-2a^2(F^{\mu\nu}\Box F_{\alpha\nu} + F_{\alpha\nu}\Box F^{\mu\nu} + \partial_{\nu}F^{\mu\nu}\partial^{\rho}F_{\alpha\rho})$$

La energía del campo electromagnético para la teoría de Podolsky, en términos de los campos: eléctrico y magnético, se define de la forma [3]:

$$E = \int\limits_{\Omega} dx^3\theta^{0}{}_{0} \tag{24}$$

$$= \int_{\Omega} dx^3 \left\{\frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) + a^2[\,-(\nabla.\mathbf{E})^2 + 2(\mathbf{E}.\Box\mathbf{E} + \mathbf{B}.\Box\mathbf{B}) - (\dot{\mathbf{E}} - \nabla\times\mathbf{B})^2\,]\right\}$$

En el caso electrostático ($\dot{\mathbf{E}} = 0$, $\mathbf{B} = 0$); y considerando el hecho que el campo eléctrico tiene un comportamiento asintótico, se obtiene la siguiente expresión para la energía electrostática [3]:

$$E = \int_{\Omega} dx^3 \left\{\frac{1}{2}\mathbf{E}^2 - a^2(\nabla.\mathbf{E})^2\right\} \tag{25}$$

Teniendo en cuenta la expresión de campo eléctrico (21), la energía electrostática de una carga eléctrica puntual en la teoría electromagnética de Podolsky se define de manera finita y positiva [5]:

$$E = \frac{e^2}{2a} \tag{26}$$

4.2. *Momentum lineal del campo electromagnético*

El momentum lineal del campo electromagnético para la teoría de Podolsky, en términos de los campos: eléctrico y magnético, es:

$$P_i = \int\limits_{\Omega} dx^3\theta^{0}{}_{i} \tag{27}$$

$$= \int\limits_{\Omega} dx^3 \left\{\mathbf{E}\times\mathbf{B} + 2a^2[\,\mathbf{E}\times\Box\mathbf{B} - \mathbf{B}\times\Box\mathbf{E} + \nabla.\mathbf{E}(\dot{\mathbf{E}} - \nabla\times\mathbf{B})]\right\}_i$$

La generalización del vector de Poynting en la teoría electromagnética de Podolsky, se define de la forma:

$$S_i = \frac{c}{4\pi}\theta^{0}{}_{i} \tag{28}$$

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\left\{\mathbf{E}\times\mathbf{B} + 2a^2[\,\mathbf{E}\times\Box\mathbf{B} - \mathbf{B}\times\Box\mathbf{E} + \nabla.\mathbf{E}(\dot{\mathbf{E}} - \nabla\times\mathbf{B})]\right\}$$

y es quien determina la dirección de propagación de la onda electromagnética. El flujo de energía del campo electromagnético es [15,1]:

$$\Phi = \int_s \mathbf{S}.d\mathbf{s} \tag{29}$$

4.3. *Momentum angular orbital del campo electromagnético*

El momentum angular orbital del campo electromagnético [8,1]; para la teoría de Podolsky es:

$$L_{ij} = \int_{\Omega} dx^3(x_i\theta^{0}{}_{j} - x_j\theta^{0}{}_{i}) = \frac{1}{c^2}\int_{\Omega} dx^3(x_iS_j - x_jS_i) \tag{30}$$
$$= \frac{1}{c^2}\int_{\Omega} dx^3\epsilon^{kij}x_iS_j = \frac{1}{c^2}\int_{\Omega} dx^3(\mathbf{r}\times\mathbf{S})_k$$

por lo tanto:

$$\mathbf{L} = \frac{1}{c^2}\int_{\Omega} dx^3(\mathbf{r}\times\mathbf{S}) \tag{31}$$

4.4. *Spin del campo electromagnético*

El tensor de spin para la teoría electromagnética de Podolsky es definido de la siguiente manera:

$$S_{\mu\nu} = \int_{\Omega} dx^3 \left(\left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{A}^{\alpha}} - \partial_0 \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \ddot{A}^{\alpha}} \right) - 2\partial_k \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_k \dot{A}^{\alpha})} \right) \right] (I_{\mu\nu})^{\alpha\beta} A_{\beta} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \ddot{A}^{\alpha}} (I_{\mu\nu})^{\alpha\beta} \dot{A}_{\beta} \right) \tag{32}$$

Utilizando la representación matricial de los generadores de rotaciones de Lorentz para un campo vectorial [1] [8]; el tensor de spin se reescribe en la forma:

$$\begin{aligned} S_{\mu\nu} = \int_{\Omega} dx^3 \{ & A_{\nu}(F_{\mu 0} + 2a^2 \partial_0 \partial^{\rho} F_{\mu\rho} - 4a^2 \eta_{\mu k} \partial^k \partial_{\rho} F^{0\rho}) \\ & - A_{\mu}(F_{\nu 0} + 2a^2 \partial_0 \partial^{\rho} F_{\nu\rho} - 4a^2 \eta_{\nu k} \partial^k \partial_{\rho} F^{0\rho}) \\ & + 2a^2 \dot{A}_{\nu}(\eta_{\mu 0} \partial_{\rho} F^{0\rho} - \partial^{\rho} F_{\mu\rho}) \\ & - 2a^2 \dot{A}_{\mu}(\eta_{\nu 0} \partial_{\rho} F^{0\rho} - \partial^{\rho} F_{\nu\rho}) \} \end{aligned} \tag{33}$$

El spin en términos del campo eléctrico, el campo magnético, y el potencial vector; es [8]:

$$\begin{aligned} S_{ij} = \int_{\Omega} dx^3 \{ \; & \mathbf{A} \times \mathbf{E} \\ & + 2a^2 [\, \mathbf{A} \times \ddot{\mathbf{E}} - \mathbf{A} \times (\nabla \times \dot{\mathbf{B}}) + 2a^2 \mathbf{A} \times \nabla(\nabla . \mathbf{E}) - \dot{\mathbf{A}} \times \dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{A}} \times (\nabla \times \mathbf{B}) \,] \}_k \end{aligned} \tag{34}$$

5. Estructura Hamiltoniana de la teoría de Podolsky

El estudio de la estructura canónica de un sistema dinámico con vínculos se desarrolla por medio del algoritmo de Dirac-Bergmann [12,16,17]. En la teoría electromagnética de Podolsky, el espacio de fase completo Γ, esta conformado por los campos linealmente independientes $(A_{\mu}, \dot{A}_{\mu})$, y sus momentos canónicos conjugados $(\pi_A^{\mu}, \pi_{\dot{A}}^{\mu})$. Utilizando las siguientes notaciones: $(\dot{A}_{\mu} \equiv \bar{A}_{\mu}, \pi_A^{\mu} \equiv p^{\mu}, \pi_{\dot{A}}^{\mu} \equiv \pi^{\mu})$; el espacio de fase completo de dimensión $2Nm = (2)(4)(2) = 16$, es:

$$\Gamma : \quad (A_{\mu}, \bar{A}_{\mu}, p^{\mu}, \pi^{\mu}) \tag{35}$$

Los momentos canónicos (p^{μ},π^{μ}) tienen la siguiente forma [3,11]:

$$\pi^{\alpha} = 2a^2(\eta^{\alpha 0} \partial_{\rho} F^{0\rho} - \partial_{\rho} F^{\alpha\rho}) \tag{36}$$

$$p^{\alpha} = F^{\alpha 0} + 2a^2(\partial_0 \partial_{\rho} F^{\alpha\rho} - 2a^2 \eta^{\alpha k} \partial_k \partial_{\rho} F^{0\rho}) \tag{37}$$

5.1. *Vínculos primarios y Hamiltoniano canónico*

La singularidad del Lagrangiano que describe la teoría electromagnética de Podolsky, implica, a nivel Hamiltoniano, que las variables dinámicas que definen el espacio de fase Γ no son independientes, debido a la existencia de dos vínculos primarios, los cuales surgen de la definición de momentos canónicos (36), y (37):

$$\pi^0 = 0 \tag{38}$$

$$\pi^i = -2a^2 \partial_{\rho} F^{i\rho} \tag{39}$$

[1] $(I_{\mu\nu})^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha}{}_{\mu}\eta^{\beta}{}_{\nu} - \eta^{\alpha}{}_{\nu}\eta^{\beta}{}_{\mu}$

$$p^0 = \partial_i \pi^i \tag{40}$$

$$p^i = F^{i0} + 2a^2(\partial_0 \partial_\rho F^{i\rho} - 2a^2 \eta^{ik} \partial_k \partial_\rho F^{0\rho}) \tag{41}$$

Las relaciones (38) y (40) establecen los vínculos primarios de la teoría. Estas relaciones reducen el espacio de fase inicial Γ a un espacio de fase reducido Γ_c, de dimensión 14:

$$\Gamma_c : \quad (A_\mu, \bar{A}_\mu, p^i, \pi^i) \tag{42}$$

Los vínculos primarios determinan relaciones entre las variables dinámicas de la teoría de Podolsky [12,16,17], de manera que estas no son independientes. Ellos surgen de la definición de momentos canónicos y son definidos de la siguiente manera [3,11]:

$$\Phi_1(x) \equiv \pi^0 \approx 0 \tag{43}$$

$$\Phi_2(x) \equiv p_0 - \partial_i \pi^i \approx 0$$

El símbolo " $\approx$ " denota una igualdad débil, e implica que una variable dinámica $B(x) \approx 0$ será definida cero en el espacio de fase reducido Γ_c, y diferente de cero en el espacio de fase completo Γ:

$$B(x) = \begin{cases} B(A_\mu, \bar{A}_\mu, p^i, \pi^i) = 0 \quad \text{en } \Gamma_c \\ \\ B(A_\mu, \bar{A}_\mu, p^\mu, \pi^\mu) \neq 0 \quad \text{en } \Gamma \end{cases} \tag{44}$$

Como consecuencia, $B(x) \approx 0$ puede tener paréntesis de Poisson diferentes de cero con otro tipo de variables dinámicas [12,16,17].

De la definición (39), es posible despejar $\dot{\bar{A}}_i$:

$$\dot{\bar{A}}^i = \frac{1}{2a^2}\pi^i + \partial_j F^{ij} + \partial^i \bar{A}^0 \tag{45}$$

El Hamiltoniano canónico asociado a la teoría electromagnética de Podolsky es definido en la forma:

$$H_c = \int\limits_\Omega dx^3 \left(\pi^\mu_A \dot{A}_\mu \ + \pi^\mu_{\dot{A}} \ddot{A}_\mu - \mathscr{L} \right) = \int\limits_\Omega dx^3 \left(p^\mu \bar{A}_\mu \ + \pi^\mu \dot{\bar{A}}_\mu - \mathscr{L} \right) \tag{46}$$

que al ser escrito en el espacio de fase reducido Γ_c se expresa de la siguiente manera [3,11]:

$$H_c(A_\mu, \bar{A}_\mu, p^i, \pi^i) = \int\limits_\Omega dx^3 \Big\{ \partial_i \pi^i \bar{A}_0 + p^i \bar{A}_i + \frac{1}{4a^2}\pi^i \pi_i + \pi^i \partial^j F_{ij} + \pi^i \partial_i \bar{A}_0 \tag{47}$$

$$+ \frac{1}{2}(\bar{A}^i - \partial^i A^0)(\bar{A}_i - \partial_i A_0) + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} - a^2 (\partial_j \bar{A}^j - \partial_j \partial^j A^0)(\partial_k \bar{A}^k - \partial_k \partial^k A^0) \Big\}$$

5.2. *Hamiltoniano primario*

La dinámica en el espacio de fase completo Γ para la teoría electromagnética de Podolsky, esta determinada por el Hamiltoniano primario H_p, el cual es una combinación lineal del Hamiltoniano canónico H_c, y los 2 vínculos primarios (Φ_1, Φ_2) [12,16,17]:

$$H_p(A_\mu, \bar{A}_\mu, p^\mu, \pi^\mu) = H_c + \int_\Omega dx^3 \{ \lambda^1(x)\Phi_1(x) + \lambda^2(x)\Phi_2(x) \} \tag{48}$$

Los multiplicadores de Lagrange: $\lambda^1(x)$, y $\lambda^2(x)$; son funciones arbitrarias definidas en el espacio-tiempo e introducidas como consecuencia de la existencia de vínculos primarios. A pesar de la existencia de vínculos primarios, el método de Dirac-Bergmann exige que las variables dinámicas $(A_\mu, \bar{A}_\mu, p^\mu, \pi^\mu)$ y los multiplicadores de Lagrange forman un conjunto de variables independientes, con el fin de realizar un estudio consistente de la teoría [12,16,17].

La funcional de acción para la teoría electromagnética de Podolsky, definida en el espacio de fase completo, es:

$$A[A_\mu, \bar{A}_\mu, p^\mu, \pi^\mu, \lambda^a] = \int_\sigma dx^4 \left\{ p^\mu \bar{A}_\mu \; + \pi^\mu \dot{\bar{A}}_\mu - \; \mathscr{H}_c - \lambda^a(x)\Phi_a(x) \right\} \tag{49}$$

con $a = 1, 2$.

La evolución temporal de una variable dinámica $F(x) = F(A_\mu, \bar{A}_\mu, p^\mu, \pi^\mu)$; en el espacio de fase Γ, se determina a partir del principio de Hamilton modificado de acción extremal: $\delta A[A_\mu, \bar{A}_\mu, p^\mu, \pi^\mu, \lambda^a] = 0$; más las condiciones de frontera. Al considerar variaciones independientes en $\delta A_\mu, \delta\bar{A}_\mu, \delta p^\mu, \delta\pi^\mu, \delta\lambda^a$; la definición de paréntesis de Poisson, y el hecho que los vínculos son definidos como débilmente cero en el espacio de fase reducido $\Phi_a(x) \approx 0$; se determina la evolución temporal de $F(x)$ [12,16,17]:

$$\dot{F}(x) \approx \{F(x), H_p\} \tag{50}$$

con la definición de paréntesis fundamentales de Poisson [3,11]:

$$\{A_\mu(x), p^\nu(y)\} = \delta^\nu_\mu \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \qquad \{\bar{A}_\mu(x), \pi^\nu(y)\} = \delta^\nu_\mu \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \tag{51}$$

5.3. *Consistencia y clasificación de vínculos en la teoría de Podolsky*

Definidos los vínculos primarios y el Hamiltoniano primario, se procede a determinar los multiplicadores de Lagrange $\lambda^a(x)$, al exigir consistencia de vínculos primarios; es decir, estos deben permanecer constantes en el tiempo [12,16,17]:

$$\dot{\Phi}_a(x) \approx \{\Phi_a(x), H_p(y)\} \approx h_a(x, y) + \int_\Omega dy^3 P_{ab}(x, y)\lambda^b(y) \approx 0 \tag{52}$$

donde $h_a(x, y) \equiv \{\Phi_a(x), H_c(y)\}$; y $P_{ab}(x, y) \equiv \{\Phi_a(x), \Phi_b(y)\}$ se define como la matriz de vínculos. La consistencia de vínculos primarios podría resultar en tres casos posibles [12,16,17]:

$\boxed{1.}$ $h_a(x, y) \not\approx 0$, y $|P_{ab}(x, y)| \not\approx 0$

El determinante de la matriz de vínculos es diferente de cero: $|\{\Phi_a(x), \Phi_b(y)\}| \not\approx 0$. Bajo condiciones de frontera de los campos, la inversa de la matriz de vínculos $P^{-1}_{ab}(x, y)$, se determina de manera única a partir de:

$$\int_\Omega dz^3 P_{ab}(x, z)P^{-1}_{bc}(z, y) = \int_\Omega dz^3 P^{-1}_{ab}(x, z)P_{bc}(z, y) = \delta_{ac}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \tag{53}$$

Como consecuencia, los multiplicadores de Lagrange asociados a vínculos primarios se calculan de la siguiente forma:

$$\lambda^b(u) = -\int_\Omega dv^3 P^{-1}_{be}(u, v)h_e(v, y) = -\int_\Omega dv^3 P^{-1}_{be}(u, v)\{\Phi_e(v), H_c(y)\} \tag{54}$$

$\boxed{2.}$ $h_a(x, y) \approx 0$, y $P_{ab}(x, y) \approx 0$

Es el caso en el cual la matriz de vínculos es identicamente nula: $P_{ab}(x, y) \approx 0$; de manera que se obtiene la identidad $0 \approx 0$. Como consecuencia, los multiplicadores de Lagrange asociados a vínculos primarios permanecen indeterminados y por lo tanto son arbitrarios.

$\boxed{3.}$ $h_a(x, y) \not\approx 0$, y $|P_{ab}(x, y)| \approx 0$

En este caso surgen vínculos secundarios:

$$X_\alpha(x) \equiv h_a(x, y)V^a_\alpha(x) \approx 0 \tag{55}$$

donde $V^a_\alpha(x)$, con $\alpha = 1, 2, .., M - S$; son los vectores nulos asociados a la matriz $P_{ab}(x, y)$ y que son definidos por:

$$\int_\Omega dx^3 P_{ab}(x, y)V^a_\alpha(x) = 0 \tag{56}$$

siendo M el número de vínculos primarios, y S el rango de $P_{ab}(x, y)$. Al igual que con los vínculos primarios a los vínculos secundarios se les debe exigir consistencia, es decir: $\dot{X}_\alpha(x) \approx 0$. El proceso de consistencia de vínculos secundarios finaliza cuando se cumpla las condiciones $\boxed{1.}$ ó $\boxed{2.}$.

Al finalizar el proceso de consistencia, el conjunto total de J vínculos (primarios más secundarios) de la teoría $\Phi_j(x) \approx 0$, con $j = 1, 2, .., J$; se deben clasificar en vínculos de primera y segunda clase. Los vínculos de primera clase cumplen la condición que la matriz de vínculos es nula: $P_{ij}(x, y) \approx 0$; como consecuencia, sus multiplicadores de Lagrange asociados son arbitrarios. Por el contrario, si el determinante de la matriz de vínculos es diferente de cero: $|\{\Phi_i(x), \Phi_j(y)\}| \not\approx 0$; los vínculos son de segunda clase, de manera que es posible determinar la inversa de la matriz de vínculos $P_{ij}^{-1}(x, y)$ y por lo tanto los multiplicadores de Lagrange asociados a vínculos de segunda clase se determinan a partir de [12,16,17]:

$$\lambda^i(u) = -\int_\Omega dv^3 P_{ij}^{-1}(u, v)\{\Phi_j(v), H_c(y)\} \tag{57}$$

Al estudiar la consistencia de vínculos primarios en la teoría electromagnética de Podolsky se obtiene, [3,11]:

$$\dot{\Phi}_1(x) \approx 0 \qquad \dot{\Phi}_2(x) \approx \partial_k p^k \approx 0 \tag{58}$$

La consistencia del vínculo primario $\dot{\Phi}_1(x) \approx 0$, resulta en la identidad $0 \approx 0$, de manera que no surgen vínculos secundarios asociados a él. La consistencia del vínculo primario $\dot{\Phi}_2(x) \approx 0$, genera un vínculo secundario:

$$\Phi_3(x) \equiv \partial_k p^k \approx 0 \tag{59}$$

Al exigir la consistencia de este vínculo no surgen mas vínculos de esta condición ya que se llega a la identidad $0 \approx 0$ [3,11]:

$$\dot{\Phi}_3 \approx 0 \tag{60}$$

Por lo tanto, en la teoría electromagnética de Podolsky existen dos vínculos primarios, y un vínculo secundario; que forman el conjunto completo de vínculos de la teoría [3,11]:

$$\Phi_1(x) = \pi^0 \approx 0 \qquad \Phi_2(x) = p^0 - \partial_k \pi^k \approx 0 \qquad \Phi_3(x) \equiv \partial_k p^k \approx 0 \tag{61}$$

Es posible demostrar, sin mucha dificultad, que este conjunto de vínculos es de primera clase:

$$P_{ij}(x, y) = \{\Phi_i(x), \Phi_j(y)\} \approx 0 \tag{62}$$

con $i, j = 1, 2, 3$.

5.4. *Hamiltoniano extendido*

Hecha la clasificación de vínculos en primera y segunda clase, se tiene que los multiplicadores de Lagrange asociados a vínculos de segunda clase se determinan de manera única. Sin embargo, los multiplicadores de Lagrange asociados a vínculos de primera clase permanecen indeterminados y arbitrarios, así, la evolución temporal de un sistema físico con vínculos de primera clase en el espacio de fase completo no se determina de manera única [12,16,17].

Dirac conjeturo que los vínculos de primera clase son generadores de transformaciones gauge locales, como consecuencia, la dinámica en el espacio de fase completo, estará determinada por el Hamiltoniano extendido (H_E) [12,16,17]. H_E para la teoría electromagnética de Podolsky es definido por la combinación lineal del Hamiltoniano canónico y todos los vínculos de primera clase de la teoría. Teniendo en cuenta la conjetura de Dirac, la dinámica en el espacio de fase completo en la teoría de Podolsky esta determinada por el siguiente Hamiltoniano extendido [3]:

$$\begin{aligned} H_E &= H_c + \int_\Omega dx^3 \{\lambda^1(x)\Phi_1(x) + \lambda^2(x)\Phi_2(x) + \lambda^3(x)\Phi_3(x)\} \\ &= H_c + \int_\Omega dx^3 \lambda^i(x)\Phi_i(x) \end{aligned} \tag{63}$$

con $i = 1, 2, 3$.

La evolución temporal de una variable dinámica $F(x) = F(A_\mu, \bar{A}_\mu, p^\mu, \pi^\mu)$, está dada por [12,16,17]:

$$\dot{F}(x) \approx \{F(x), H_E\} \tag{64}$$

En general, si el estado inicial del sistema físico en un tiempo t_0, es $F(t_0)$; y el estado final es $F(\delta t)$, donde δt representa una evolución temporal infinitesimal del sistema, una expansión en series de Taylor a primer orden de $F(\delta t)$, determina que:

$$F(\delta t) = F(t_0) + \dot{F}\delta t \tag{65}$$

Esta relación establece que el estado final del estado físico, dependerá además del estado inicial $F(t_0)$, de la elección de los multiplicadores de Lagrange asociados a vínculos de primera clase λ^i, los cuales son arbitrarios. Si se consideran dos estados finales para un determinado sistema físico con el mismo estado inicial y que difieren en el valor escogido de los multiplicadores de Lagrange λ^i:

$$F(\delta t) = F(t_0) + \delta t\{F(x), H_c\} + \delta t \int_\Omega dy^3 \lambda^i \{F(x), \Phi_i(y)\} \tag{66}$$

$$F^{'}(\delta t) = F(t_0) + \delta t\{F(x), H_c\} + \delta t \int_\Omega dy^3 \lambda^{'i} \{F(x), \Phi_i(y)\} \tag{67}$$

se puede determinar que:

$$\delta F = F(\delta t) - F^{'}(\delta t) = \int_\Omega dy^3 \delta t[\lambda^i(y) - \lambda^{'i}(y)]\{F(x), \Phi_i(x)\} \tag{68}$$

$$= \int_\Omega dy^3 \in^i (y)\{F(x), \Phi_i(x)\} = \{F(x), \Pi(y)\}$$

Dirac afirmó que los diferentes estados finales del sistema físico correspondientes a la elección arbitraria de los multiplicadores de Lagrange asociados a vínculos de primera clase, deberán estar asociados al mismo estado físico y por lo tanto deben ser equivalentes. En conclusión, los vínculos de primera clase son generadores de transformaciones de equivalencia o como se conocen hoy en día transformaciones gauge locales, las cuales conectan estados finales para diferentes λ^i, y dejan invariante el sistema físico. Esta afirmación es lo que se conoce como la conjetura de Dirac [12,16,17].

El generador de transformaciones gauge locales para la teoría electromagnética de Podolsky se caracteriza por los parámetros arbitrarios: $(\in, \bar{\in})$; y tiene la forma [3]:

$$\Pi(y) = \int_\Omega dy^3 \in^i (y)\Phi_i(y) = \int_\Omega dy^3 (p^\mu \partial_\mu \in + \pi^\mu \partial_\mu \bar{\in}) \tag{69}$$

donde $\bar{\in} \equiv \dot{\in}$.

Las transformaciones gauge locales para la teoría de Podolsky que dejan invariante el sistema físico y que conecta los diferentes estados equivalentes, correspondientes a la elección arbitraria de los multiplicadores de Lagrange asociados a vínculos de primera clase, son:

$$\delta A_\mu(x) = \{A_\mu(x), \Pi(y)\} = \partial_\mu \in (x) \qquad \delta \bar{A}_\mu(x) = \{\bar{A}_\mu(x), \Pi(y)\} = \partial_\mu \bar{\in}(x) \tag{70}$$

$$\delta p^\mu(x) = \{p^\mu(x), \Pi(y)\} = 0 \qquad \delta \pi^\mu = \{\pi^\mu(x), \Pi(y)\} = 0$$

De estas relaciones, es posible determinar las transformaciones gauge locales de los campos A_μ, y $\bar{A}_\mu$:

$$A^{'}_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \in (x) \tag{71}$$

$$\bar{A}^{'}_\mu(x) = \bar{A}_\mu(x) + \partial_\mu \bar{\in}(x)$$

La evolución temporal de los campos: $(A_\mu, \bar{A}_\mu, p^\mu, \pi^\mu)$; en la teoría electromagnética de Podolsky, se determina a partir de las ecuaciones de Hamilton (64), y son un conjunto de 16 ecuaciones de primer orden en las derivadas temporales [3,11]:

$$\dot{p}^k(x) \approx -\partial^k \partial_i \pi^i + \partial^j \partial_j \pi^k + \partial_i F^{ik} \tag{72}$$

$$\dot{p}^0(x) \approx -\partial_i F^{0i} - 2a^2 \partial_k \partial^k (\partial_j \bar{A}^j - \partial_j \partial^j A^0) \tag{73}$$

$$\dot{\pi}_0(x) \approx 0 \tag{74}$$
$$\dot{\pi}^k(x) \approx -p^k - F^{0k} - 2a^2\partial^k\partial_i F^{0i} \tag{75}$$
$$\dot{\bar{A}}^i(x) \approx \frac{1}{2a^2}\pi^i + \partial_j F^{ij} + \partial^i \bar{A}^0 + \partial^i \lambda^2 \tag{76}$$
$$\dot{\bar{A}}_0(x) \approx \lambda^1 \tag{77}$$
$$\dot{A}_0(x) \approx \bar{A}^0 + \lambda^2 \tag{78}$$
$$\dot{A}_i(x) \approx \bar{A}_i - \partial_i \lambda^3 \tag{79}$$

Las ecuaciones de Hamilton deducidas anteriormente se expresan en términos de igualdades débiles. Como consecuencia de la arbitrariedad de los multiplicadores de Lagrange asociados a vínculos de primera clase, estas ecuaciones no determinan una evolución temporal única, por lo que es necesario eliminar los vínculos de primera clase y determinar sus multiplicadores de Lagrange asociados. Las ecuaciones de Hamilton son débilmente equivalentes a las ecuaciones de campo:

$$(1 + 2a^2\Box)\partial_\lambda F^{\lambda\alpha} \approx 0 \tag{80}$$

5.5. *Condición generalizada de gauge de radiación*

En el algoritmo de Dirac-Bergmann, los vínculos de segunda clase son eliminados por definición de paréntesis de Dirac, y los vínculos de primera clase se eliminan al introducir condiciones de gauge [12,16,17].

Las condiciones de gauge son vínculos introducidos inicialmente de forma arbitraria, con el objetivo de transformar los vínculos de primera clase en vínculos de segunda clase y de esta manera determinar los multiplicadores de Lagrange λ^i asociados a ellos. Las condiciones de gauge deben cumplir con los siguientes requisitos [12,16,17]:

1. El número de condiciones de guage introducidas debe ser igual al número de vínculos de primera clase existentes.
2. Las condiciones de gauge son vínculos introducidos de manera arbitraria y relacionan las variables dinámicas de la teoría:
$$\Omega_j(x) = \Omega_j(A_\mu, \bar{A}_\mu, p^\mu, \pi^\mu) \approx 0 \tag{81}$$
3. Las condiciones de gauge deben permanecer constantes en el tiempo, es decir, se debe exigir consistencia sobre $\Omega_j(x) \approx 0$:
$$\dot{\Omega}_j(x) \approx 0 \tag{82}$$
4. Las condiciones de gauge $\Omega_j(x) \approx 0$, y los vínculos de primera clase $\Phi_i(x) \approx 0$; deben formar un conjunto de vínculos de segunda clase, es decir, el determinante de la matriz construida entre los vínculos de primera clase y las condiciones de gauge debe ser diferente de cero:
$$|\{\Omega_j(x), \Phi_i(y)\}| \not\approx 0 \tag{83}$$
5. Las condiciones de gauge deben dejar invariante el álgebra de Poincaré.
6. Las condiciones de gauge deben ser fijadas de manera única, es decir, elegida una determinada condición de gauge $\Omega_j(x) \approx 0$, al realizar una transformación gauge local de los campos: $(A_\mu, \bar{A}_\mu, p^\mu, \pi^\mu)$; se debe exigir:
$$\Omega_j^{'}(x) = \Omega_j^{'}(A_\mu^{'}, \bar{A}_\mu^{'}, p^{'\mu}, \pi^{'\mu}) \not\approx 0 \tag{84}$$
7. Las condiciones de gauge deben ser "attainable", es decir, si los campos: A_μ, $\bar{A}_\mu$, p^μ, y π^μ; no satisfacen las condiciones de gauge: $\Omega_j(x) \not\approx 0$; al realizar una transformación gauge local de estos campos, se debe cumplir la condición de gauge:
$$\Omega_j^{'}(x) = \Omega_j^{'}(A_\mu^{'}, \bar{A}_\mu^{'}, p^{'\mu}, \pi^{'\mu}) \approx 0 \tag{85}$$

Del hecho que las condiciones de gauge son arbitrarias, los multiplicadores de Lagrange asociados a vínculos de primera clase dependerán de la condición de gauge escogida.

La existencia de tres vínculos primarios en la teoría electromagnética de Podolsky, hace necesario imponer arbitrariamente tres condiciones de gauge. De esta manera, en el estudio de la estructura canónica de la teoría electromagnética de Podolsky vía método de Dirac, se impone el siguiente conjunto de condiciones de gauge, las cuales son conocidas como condición generalizada del gauge de radiación y son deducidas a partir de las ecuaciones de campo (7) [3]:

$$\Omega_1(x) \equiv \bar{A}^0 \approx 0 \qquad \Omega_2(x) \equiv (1+2a^2\Box)\partial_i A_i \approx 0 \quad \Omega_3(x) \equiv A^0 \approx 0 \tag{86}$$

La condición generalizada del gauge de radiación cumple con los requisitos de condiciones de gauge y garantiza el cumplimiento de la ecuación de onda generalizada tipo transversal por parte del cuadrivector A_μ [3]. Por lo tanto, los vínculos de primera clase y la versión generalizada del gauge de radiación formaran un conjunto de vínculos de segunda clase, los cuales deben ser eliminados por definición de paréntesis de Dirac [12,16,17].

5.6. *Paréntesis de Dirac en la teoría de Podolsky*

Los vínculos de primera clase $\Phi_i(x) \approx 0$, y la condición generalizada del gauge de radiación $\Omega_j(x) \approx 0$, forman un conjunto de seis vínculos $\Delta_a(x) \approx 0$, de segunda clase:

$$\Delta_1(x) = \bar{A}^0 \approx 0 \tag{87}$$

$$\Delta_2(x) = (1+2a^2\Box)\partial_i A_i \approx 0$$

$$\Delta_3(x) = A^0 \approx 0$$

$$\Delta_4(x) = \pi^0 \approx 0$$

$$\Delta_5(x) = p^0 - \partial_k \pi^k \approx 0$$

$$\Delta_6(x) = \partial_k p^k \approx 0$$

A partir de los cuales se puede definir la matriz de vínculos $P_{ab}(x,y) = \{\Delta_a(x), \Delta_b(y)\}$; con $a, b = 1,2,3,4,5,6$; de la siguiente manera:

$$P_{ab}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\hat{F}_x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{F}_x & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \tag{88}$$

donde $\hat{F}_x = (1-2a^2\nabla_x^2)\nabla_x^2$; es un operador diferencial.

Los vínculos $\Delta_a(x) \approx 0$, son de segunda clase: $|P_{ab}(x,y)| = |\{\Delta_a(x), \Delta_b(y)\}| \not\approx 0$. Así, la inversa de la matriz de vínculos de segunda clase se determina a partir de la siguiente condición:

$$\int_\Omega dz^3 P_{ab}(x,z) P_{bc}^{-1}(z,y) = \int_\Omega dz^3 P_{ab}^{-1}(x,z) P_{bc}(z,y) = \delta_{ac}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \tag{89}$$

La matriz $P_{bc}^{-1}(x,y)$ tiene la forma [3]:

$$P_{bc}^{-1}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G(\mathbf{x},\mathbf{y}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) & 0 \\ \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -G(\mathbf{x},\mathbf{y}) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{90}$$

Donde $G(\mathbf{x},\mathbf{y})$ satisface la ecuación diferencial:

$$(1-2a^2\nabla_x^2)\nabla_x^2 G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \tag{91}$$

Por medio del método de funciones de Green y utilizando el hecho que el campo electromagnético tienen un comportamiento asintótico, permite fijar $G(\mathbf{x},\mathbf{y})$ de manera única [3]:

$$G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = [(1-2a^2\nabla_x^2)\nabla_x^2]^{-1}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1-e^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{a}}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \tag{92}$$

Donde $[(1-2a^2\nabla_x^2)\nabla_x^2]^{-1}$ es el inverso del operador $(1-2a^2\nabla_x^2)\nabla_x^2$; y $G(\mathbf{x},\mathbf{y})$ su correspondiente función de Green.

Calculada la matriz $P_{bc}^{-1}(x,y)$ para la condición generalizada del gauge de radiación, el conjunto de vínculos de segunda clase $\Delta_a(x) \approx 0$ son eliminados al introducir los paréntesis de Dirac. Los paréntesis de Dirac para dos variables dinámicas $F(x)$ y $G(y)$ son definidos de la siguiente manera [3,12,16,17]:

$$\begin{aligned} \{F(x),G(y)\}_D &= \{F(x),G(y)\} \\ &- \int_\Omega\int_\Omega dv^3du^3\{F(x),\Delta_a(u)\}P_{ab}^{-1}(u,v)\{\Delta_b(v),G(y)\} \end{aligned} \tag{93}$$

Bajo esta definición, se debe cumplir que: $\{\Delta_a(x),F(y)\}_D = 0$. Como consecuencia, los vínculos de segunda clase son transformados en identidades fuertes, es decir $[\Delta_a(x) = 0]$:

$$\begin{aligned} \Delta_1(x) &= \bar{A}^0 = 0 \\ \Delta_2(x) &= (1+2a^2\Box)\partial_i A_i = 0 \\ \Delta_3(x) &= A^0 = 0 \\ \Delta_4(x) &= \pi^0 = 0 \\ \Delta_5(x) &= p^0 - \partial_k\pi^k = 0 \\ \Delta_6(x) &= \partial_k p^k = 0 \end{aligned} \tag{94}$$

De ellas se puede determinar que el número de grados de libertad de la teoría de Podolsky es 10.

Estas relaciones permiten establecer que $A^0 = \bar{A}^0 = \pi^0 = 0$. De igual manera, la relación $p^0 - \partial_k\pi^k = 0$, indica que el campo p^0 es una variable dependiente de los momentos π^k. Sin embargo, las otras relaciones no permiten establecer expresiones lineales entre las coordenadas. Debido a esto, se escoge como coordenadas para describir el problema a los siguientes campos:

$$(A_i, \bar{A}_i, p^i, \pi^i) \tag{95}$$

Ahora, se procederá a calcular los paréntesis de Dirac entre estas variables. Los paréntesis no nulos entre las coordenadas de la teoría electromagnética de Podolsky, bajo la condición generalizada del gauge de radiación, son [3]:

$$\begin{aligned} \{\bar{A}_i(x), \pi^j(y)\}_D &= \delta_i^j \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \\ \{\pi^j(x), \bar{A}_i(y), \}_D &= -\delta_i^j \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \\ \{A_i(x), p^j(y)\}_D &= \delta_i^j \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - (1-2a^2\nabla_x^2)\partial_i^x \partial_j^x G(x,y) \\ \{p^j(x), A_i(y)\}_D &= -\delta_i^j \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + (1-2a^2\nabla_x^2)\partial_i^x \partial_j^x G(x,y) \end{aligned} \tag{96}$$

los paréntesis de Dirac también dependeran de la elección de las condiciones de gauge, al igual que ocurre con los multiplicadores de Lagrange asociados a los vínculos de primera clase.

En teoría clásica de campos, una observable $\mathcal{O}$, es invariante ante transformaciones gauge locales, de manera que su paréntesis de Dirac es débilmente cero con el conjunto de vínculos de primera clase [16]:

$$\{\mathcal{O}, \Phi_i\}_D \approx 0 \tag{97}$$

bajo esta definición, las cargas conservadas en la electrodinámica de Podolsky, son observables.

5.7. *Estructura canónica de la teoría de Podolsky bajo la condición generalizada del gauge de radiación*

Eliminado el conjunto total de vínculos de la teoría, la evolución temporal de una variable dinámica $F(x)$, en el espacio de fase completo, se determina de manera única bajo la condición de gauge elegida. La evolución temporal de $F(x)$, en función de la definición de paréntesis de Dirac, es [12,16,17]:

$$\dot{F}(x) = \{F(x), H_c\}_D \tag{98}$$

La estructura canónica de la teoría electromagnética de Podolsky bajo la condición generalizada del gauge de radiación, la cual garantiza una ecuación de onda generalizada de tipo transversal, tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{A}_i(x) &= \bar{A}_i - (1-2a^2\nabla_x^2)\int_\Omega dy^3 \bar{A}_j(y)\partial_i^x\partial_j^x G(x,y) \\ \dot{\bar{A}}_i(x) &= \frac{1}{2a^2}\pi_i + \partial^k F_{ik} \\ \dot{p}^i(x) &= -\partial^i\partial_j\pi^j + \partial^j\partial_j\pi^i + \partial_j F^{ji} \\ \dot{\pi}^i(x) &= -p^i - \bar{A}^i - 2a^2\partial^i\partial^k\bar{A}_k \\ \dot{p}^0(x) &= -\partial_i\bar{A}^i - 2a^2\partial_i\partial^i\partial^k\bar{A}_k \\ \bar{A}^0 &= 0 \\ A^0 &= 0 \\ \pi^0 &= 0 \end{aligned} \tag{99}$$

De esta manera se obtiene una evolución temporal única para la teoría de Podolsky bajo la condición generalizada del gauge de radiación.

6. Remarks and conclusions

Se estudío la teoría electromagnética de Podolsky, la teoría de Podolsky es una generalización de la teoría de Maxwell, que considera términos de segundo orden en las derivadas en el campo electromagnético A_μ, y es descrita por el Lagrangiano (1). Se obtuvo las ecuaciones de campo (7) para la teoría electromagnética de Podolsky, estas ecuaciones de campo expresadas en términos del cuadrivector potencial, permiten exigir el cumplimiento de la ecuación de onda generalizada (9) por parte de A_μ, al fijar la condición generalizada del gauge de Lorenz (10) [3]. Utilizando las ecuaciones de campo y las identidades de Bianchi (5), se dedujo las ecuaciones generalizadas de Maxwell $(4{,}11), (4{,}12), (4{,}13), (4{,}14)$. Al hacer un análisis electrostático de estas ecuaciones, se encontró un potencial eléctrico tipo Yukawa (19) para una carga eléctrica puntual, este potencial tiene un valor finito en el origen, converge al potencial de Coulomb, y es de tipo asintótico; como consecuencia de este potencial, se demostró que el campo electrostático (21) es central y conservativo, lo que permite calcular el flujo eléctrico (22) [5].

La teoría electromagnética de Podolsky es invariante ante el grupo global de Poincaré, como consecuencia del primer teorema de Noether, se obtuvo las cargas conservadas asociadas a la teoría de Podolsky: la energía (24), el momentum lineal (27), el momentum angular orbital (31), y el spin (34). El momentum lineal permite una generalización del vector de Poynting (28); y se debe tener en cuenta que el spin no tiene interpretación clásica. Además, se probó que la energía electrostática (26) de una carga eléctrica puntual en la teoría electromagnética de Podolsky es positiva y finita [3,5].

Se demostró que la teoría de Podolsky es una teoría gauge $U(1)$, como consecuencia, el cuadrivector potencial no se determina de manera única. A partir del segundo teorema de Nother, se obtuvo las identidades de Bianchi (5), se dedujo la ecuación de continuidad (6), y se probó que Lagrangiano de la teoría de Podolsky es singular (4). De manera que existe un vínculo a nivel Lagrangiano, y dos vínculos primarios a nivel Hamiltoniano; lo que implica que las variables dinámicas de la teoría de Podolsky no son independientes, por lo tanto, el estudio de la estructura canónica se debe desarrollar por el algoritmo de Dirac-Bergmann [3].

En el análisis de la estructura canónica vía algoritmo Dirac-Bergmann de la teoría electromagnética de Podolsky, se obtuvo dos vínculos primarios (43) que surgen de la definición de momentos canónicos, estos vínculos primarios reducen el espacio de fase completo Γ a un espacio de fase reducido Γ_c, de manera que el Hamiltoniano canónico (47) esta definido en Γ_c [3]. El Hamiltoniano primario (48) combinación lineal del Hamiltoniano canónico y los vínculos primarios, define la dinámica en el espacio de fase completo y permite el estudio de consistencia de vínculos. Al estudiar la consistencia de los vínculos primarios se encontró un vínculo secundario, de manera que en la teoría de Podolsky existe un conjunto de tres vínculos de primera clase (61) [3].

Se estudío la conjetura de Dirac, esta conjetura establece que los vínculos de primera clase son generadores de transformaciones gauge locales (70), las transformaciones gauge conectan los estados finales equivalentes correspondientes a la elección arbitraria de los multiplicadores de Lagrange asociados a estos vínculos de primera clase y dejan invariante el sistema físico. Como consecuencia, la dinámica en el espacio de fase completo para la teoría electromagnética de Podolsky esta determinada por el Hamiltoniano extendido (63), H_E permitió deducir la evolución temporal de los campos: $(A_\mu, \bar{A}_\mu, p^\mu, \pi^\mu)$; a partir de las ecuaciones de Hamilton (64). Sin embargo este conjunto de 16 ecuaciones diferenciales de primer orden en las derivadas no determinan una evolución temporal única debido a la arbitrariedad en los multiplicadores de Lagrange asociados a los vínculos de primera clase. Se demostró que las ecuaciones de Hamilton son débilmente equivalentes a las ecuaciones de campo [3].

El conjunto de tres vínculos de primera clase en la teoría electromagnética de Podolsky, se eliminaron al introducir la condición generalizada del gauge de radiación (86), estas condiciones de gauge fueron deducidas de las ecuaciones de campo (7). La condición generalizada del gauge de radiación y los tres vínculos de primera clase forman un conjunto de seis vínculos de segunda clase (87), los cuales se eliminaron por definición de paréntesis de Dirac (93), los paréntesis de Dirac permitieron escoger como coordenadas del problema a los campos: $(A_i, \bar{A}_i, p^i, \pi^i)$ [3]. La definición de paréntesis de Dirac fijan de manera única los multiplicadores de Lagrange asociados a vínculos de primera clase bajo la condición de gauge escogida. Se cálculo los paréntesis de Dirac fundamentales (96), bajo la condición generalizada del gauge de radiación entre los campos: $(A_i, \bar{A}_i, p^i, \pi^i)$. A partir de estos paréntesis fundamentales de Dirac se obtuvo una estructura canónica que garantiza una ecuación de onda generalizada tipo transversal (99) en la teoría electromagnética de Podolsky [3].

Referencias

[1] David J. Griffiths, *Introduction to electrodynamics*, Prentice Hall, Nueva Jersey, 1999.
[2] B. Podolsky and P. Schwed, Rev. Mod. Phys. **20**, 40 (1948).

[3] Carlos A. P. Galvao and B. M. Pimentel, Can. J. Phys. **66**, 460 1948).
[4] R. R. Cuzinatto and C. A. M. de Melo and L. G. Medeiros and P. J. Pompeia, *How can one probe Podolsky Electrodynamics*, arXiv:0810.4106v2 [quant-ph], 23 oct 2009.
[5] Antonio Accioly and Hatsumi Mukai, Braz. J. of Phys., **28**, 1 (1998).
[6] R. R. Cuzinatto and C. A. M. de Melo and P. J. Pompeia, *Second order gauge theory*, arXiv:hep-th/0502052v5, 17 Jul 2007.
[7] J. Morales, MOMEMTO Revista de Física **39**, (2009).
[8] W Greiner and J Reinhardt, *Field Quantization*, Springer, New York 1996.
[9] H.O.Girotti, *CLASSICAL AND QUANTUM DYNAMICS OF CONSTRAINED SYSTEMS*, Tesis de Doctorado Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brazil (1989).
[10] Heinz J. Rothe and Klaus D. Rothe, *Classical and Quantum Dynamics of Constrained Hamiltonian Systems*, World Scientific Lecture Notes in Physics, Singapore, 2010.
[11] Randall Guedes Teixeira, *Formalismo de Hamilton Jacobi para Sistemas Singulares*, Disertación de maestria del Instituto de Física Teórica Universidade Estadual Paulista, Sao Paulo, 1996.
[12] P.A.M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics*, Yeshiva University, New York, 1964.
[13] R. Aldrovandi and J. G. Pereira, *Notes for a Course on CLASSICAL FIELDS*, Instituto de Física Teórica, Sao Paulo, 2008.
[14] Marcelo Alonso and Edward J. Finn, *FÍSICA VOLUMEN III: FUNDAMENTOS CUÁNTICOS Y ESTADÍSTICOS*, Addison-Wesley, 1986.
[15] Marcelo Alonso and Edward J. Finn, *FÍSICA VOLUMEN II: CAMPOS Y ONDAS*, Addison-Wesley, 1998.
[16] Iraís Rubalcava García, *Análisis hamiltoniano de teorías tipo BF*, Disertación de Maestría, UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA, Febrero 2010.
[17] Merylin Cristina Ortega Ortega, Método de Dirac Aplicado a sistemas singulares, Trabajo de Grado Universidad de Nariño, Departamento de Física, 2011.