REVISTA DE CIENCIAS, Vol. 3, No. 1 de 2013.

# Formulación de Hamilton-Jacobi de la $QED_4$

## Hamilton-Jacobi Formulation to $QED_4$

Luis Bravo Huertas

*Departamento de Física, Universidad de Nariño*
*Ciudad Universitaria Torobajo - Calle 18 Kra 50*
*San Juan de Pasto, Nariño, Colombia*

Aceptado Mayo; Publicado en línea Junio.

ISSN 2256-3830.

**Resumen**

En el presente trabajo se estudiará la formulación de Hamilton-Jacobi mediante el método de Lagrangianos equivalentes de Carathéodory aplicado a teoría de campos. Se analizará por medio de este formalismo la estructura clásica de la electrodinámica cuántica ($QED_4$). Se deducirán las ecuaciones de movimiento como ecuaciones diferenciales totales y se analizará las condiciones de integrabilidad para estas.

***Palabras Claves*:** Formulación de Hamilton-Jacobi, Lagrangianos Equivalentes de Carathéodory, Electrodinámica Cuántica.

**Abstract**

In the present work will study the Hamilton-Jacobi formulation using the Carathéodory's Lagrangian equivalents method applied to field's theory. I will use this formalism to the classical structure of quantum electrodynamics (QED). The equations of motion as total differential equations will be deducted and will analyzed the integrability conditions.

***Keywords*:** Hamilton-Jacobi Formulation, Carathéodory's Lagrangian Equivalents, Quantum Electrodynamics.

## 1. Introduction

La mecánica clásica posee diferentes formulaciones para describir sistemas físicos, como: las leyes de Newton, la formulación Lagrangiana, la formulación Hamiltoniana, la formulación de Hamilton Jacobi, entre otras. Todas estas formulaciones son equivalentes entre si [1]. Las dos últimas formulaciones son las más empleadas en el estudio de la mecánica cuántica y la teoría de campos.

La formulación de Hamilton-Jacobi surge del formalismo de Hamilton cuando nos interesamos por una trasformación canónica que nos lleve aún nuevo sistema de coordenadas en el espacio de fase, en donde la nueva función hamiltoniana se anule y por lo tanto la integrabilidad de las ecuaciones de Hamilton para las nuevas variables sean elementales [1,2].

Existe un método alternativo para deducir la ecuación de Hamilton-Jacobi en el cual no es necesario tener en cuenta la formulación de Hamilton y las transformaciones canónicas de Jacobi [3], este método relaciona el cálculo variacional con las ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales mediante un análisis geométrico estudiado por Carathéodory al que él llama "Cuadro completo" [4].

Carathéodory muestra como la ecuación de Hamilton-Jacobi se deriva del principio de Hamilton empleando el concepto de Lagrangianos equivalentes y utiliza el método de las características o método de Cauchy para resolver esta ecuación [5], se ha mostrado en diferentes trabajos [4,6,7], como este método puede extenderse a sistemas que son descritos por Lagrangianos singulares, en este caso la formulación de Hamilton-Jacobi agrega a los vínculos como ecuaciones diferenciales parciales y junto con la ecuación de Hamilton-Jacobi forman un conjunto de ecuaciones al cual se le denomina Ecuaciones Diferenciales Parciales de Hamilton-Jacobi (EDPHJ), se calculan las ecuaciones características asociadas a este conjunto y finalmente se analiza sus condiciones de integrabilidad.

Existen sistemas físicos en mecánica clásica y en teoría de campos que son descritos por Lagrangianos singulares [8,9], en los que es necesario introducir un nuevo tipo de variables para describirlos clásicamente, estas variables son conocidas como variables de Grassmann [10,8]; un ejemplo de estos sistemas es la descripción clásica de partículas fermiónicas. Estas nuevas variables tienen la propiedad de ser anticonmutativas lo cual genera modificaciones en el cálculo diferencial e integral y por lo tanto modifica la estructura de la mecánica. Se adaptará el planteamiento hecho por por Carathéodory para estudiar este tipo de sistemas, calculando las ecuaciones características del conjunto de EDPHJ y analizar las condiciones de integrabilidad permitiendo la obtención de las ecuaciones de movimiento.

En este trabajo se aplicará el formalismo de Hamilton-Jacobi al estudio de la estructura clásica de la electrodinámica cuántica ($\text{QED}_4$).

## 2. Formalismo Lagrangiano

En teoría de campos, una manera de describir el acoplamiento entre campos es construir un Lagrangiano que describa la teoría, como la suma de las densidades Lagrangianas de los campos libres ($\mathscr{L}^{libre}$) mas un término de describe la interacción ($\mathscr{L}^{int}$) y que dependerá de los campos presentes en el problema [11].

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}^{libre} + \mathscr{L}^{int} \tag{1}$$

El término de interacción no es del todo arbitrario, ya que además de depender de restricciones impuestas por las simetrías internas y del espacio tiempo [12], existen restricciones debido a la presencia de vínculos en la teoría libre [8].

La electrodinámica cuántica (QED) estudia la interacción de un campo fermiónico y el campo electromagnético [13], esta teoría es descrita por la siguiente densidad Lagrangiana:

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}^{EM} + \mathscr{L}^{CF} + \mathscr{L}^{int} \tag{2}$$

Siendo:

$$\mathscr{L}^{EM} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \tag{3}$$

la densidad Lagrangiana del campo electromagnético libre,

$$\mathscr{L}^{CF} = \frac{i}{2}\left[\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - \partial_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi\right] - m\bar{\psi}\psi, \tag{4}$$

la densidad Lagrangiana que describe el campo fermiónico y

$$\mathscr{L}^{int} = -gA_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi, \tag{5}$$

el término de interacción, donde $g$ se conoce como la constante de acoplamiento [13].

Para realizar un estudio clásico de la teoría, se parte de la síguete acción [8]:

$$\mathscr{A} = \int d^4x \left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - \frac{i}{2}\partial_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi - m\bar{\psi}\psi - gA_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi\right) \tag{6}$$

Se puede observar entonces, que la acción es una funcional de los campos $(A_{\mu}, \psi, \bar{\psi})$. Las variables $\psi, \bar{\psi}$ son generadores del álgebra de Grassmann con número de paridad $n_{\psi} = 1$ y la variable bosónica $A_{\mu}$ puede ser considerar como un elemento del álgebra de Grassmann con número de paridad par, $n_A = 0$ [10,8,14]. Las ecuaciones de campo asociadas a las variables $A_{\mu}$, $\psi_a$ y $\bar{\psi}_a$ son deducidas de la acción (6) calculando las siguientes derivadas funcionales:

$$\frac{\delta\mathscr{A}}{\delta A_{\nu}} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial A_{\nu}} - \partial_{\mu}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\partial_{\mu}A_{\nu}\right)}\right) = 0 \tag{7}$$

$$\frac{\delta \mathscr{A}}{\delta \psi_a} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \psi_a} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \left(\partial_\mu \psi_a\right)} \right) = 0 \tag{8}$$

$$\frac{\delta \mathscr{A}}{\delta \bar{\psi}_a} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \bar{\psi}_a} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \left(\partial_\mu \bar{\psi}_a\right)} \right) = 0 \tag{9}$$

Donde derivadas funcionales izquierdas respecto a las variables fermiónicos serán consideradas de ahora en adelante. Para calcular estas ecuaciones de campo es necesario poner de manifiesto los índices matriciales en el Lagrangiano de la siguiente manera:

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{i}{2} \bar{\psi}_a \gamma^\mu_{ab} \partial_\mu \psi_b - \frac{i}{2} \partial_\mu \bar{\psi}_a \gamma^\mu_{ab} \psi_b - m \bar{\psi}_a \psi_a - g A_\mu \bar{\psi}_a \gamma^\mu_{ab} \psi_b \tag{10}$$

Con $a, b = 1, 2, 3, 4$. Utilizando (10) es posible determinas que las ecuación de campo correspondiente a a la variable bosónica tiene la siguiente forma:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu, \tag{11}$$

donde se ha definido la siguiente corriente fermiónica: $J^\nu \equiv g \bar{\psi}_a \gamma^\nu_{ab} \psi_b$ [13]. De igual manera, las ecuaciones relacionadas a los campos $(\psi, \bar{\psi})$ son:

$$i \partial_\mu \bar{\psi}_c \gamma^\mu_{ca} + m \bar{\psi}_a = -g A_\mu \bar{\psi}_c \gamma^\mu_{ca} \tag{12}$$

$$i \gamma^\mu_{ab} \partial_\mu \psi_b - m \psi_a = g A_\mu \gamma^\mu_{ab} \psi_b \tag{13}$$

En límite de la constante de acoplamiento $g \to 0$, las ecuaciones de campo (11), (12) y (13) se reducen a las ecuaciones de campo electromagnético y fermiónico libres.

## 3. Formalismo Canónico

Para realizar un estudio canónico de la QED, se deberá definir en primer lugar los momentos canónicos asociados a las variables de campo $A_\mu$, $\psi$ y $\bar{\psi}$, de la siguiente manera [8]:

$$\pi^\nu \equiv \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{A}_\nu} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \left(\partial_0 A_\nu\right)} \tag{14}$$

$$\pi_a \equiv \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\bar{\psi}}_a} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \left(\partial_0 \bar{\psi}_a\right)} \tag{15}$$

$$\bar{\pi}_a \equiv \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\psi}_a} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \left(\partial_0 \psi_a\right)} \tag{16}$$

Utilizando (10) en (14), es posible determinar que:

$$\pi^\nu = -F^{0\nu} = F^{\nu 0} \tag{17}$$

Si se considera el caso particular en el que $\nu = 0$, se concluye que:

$$\pi^0 = F^{00} = 0$$

Esta relación corresponde a un vínculo primario [8,9], que pertenece al álgebra de Grassmann y tendrán asociado un número de paridad par $n_{\phi^1} = 0$, ya que surge del momento canónico conjugado a la variable bosónica $A_\mu$, este vínculo primario se definirá así:

$$\phi^1 \equiv \pi^0 = 0 \tag{18}$$

Ahora si se escoge $\nu = k$, se determina que:

$$\dot{A}_k = \pi^k + \partial_k A_0 \tag{19}$$

Esta expresión expresa las velocidades $\dot{A}_k$ en función de sus momentos canónicos conjugados, por esta razón se la entiende como una relación dinámica en el espacio de fase.

Ahora, de las relaciones (15) y (16) se logra:

$$\pi_a = -\frac{i}{2}\gamma^0_{ab}\psi_b \qquad , \qquad \bar{\pi}_a = -\frac{i}{2}\bar{\psi}_c\gamma^0_{ca}. \tag{20}$$

Esta expresión conecta los momentos canónicos, $(\pi_a, \bar{\pi}_a)$, con los campos $(\psi, \psi)$, por tanto, también son vínculos primarios, los cuales serán definidos de la siguiente manera:

$$\phi_a \equiv \pi_a + \frac{i}{2}\gamma^0_{ab}\psi_b \qquad , \qquad \bar{\phi}_a \equiv \bar{\pi}_a + \frac{i}{2}\bar{\psi}_c\gamma^0_{ca} = 0. \tag{21}$$

Los vínculos (21) pertenecen al álgebra de Grassmann con paridad impar $n_\psi = n_{\bar{\psi}} = 1$ debido a que surgen de la definición de momentos canónicos conjugados a las variables fermiónicas $\bar{\psi}$ y $\psi$ respectivamente. En total, el problema cuenta con 9 vínculos primarios.

Se procede ahora a definir el Hamiltoniano canónico de la teoría de la siguiente manera [8] :

$$H_C = \int d^3x \mathscr{H}_C = \int d^3x \left(\dot{A}_\mu \pi^\mu + \dot{\psi}_a \bar{\pi}_a + \dot{\bar{\psi}}_a \pi_a - \mathscr{L}\right). \tag{22}$$

Ahora, utilizando las ecuaciones (18), (19) y (20) la densidad Hamiltoniana canónica $(\mathscr{H}_C)$, se re escribe en la forma:

$$\mathscr{H}_C = \frac{1}{2}\left(\pi^k\right)^2 + \pi^k\partial_k A_0 + \frac{1}{4}F_{ki}F^{ki} + \frac{i}{2}\partial_k\bar{\psi}\gamma^k\psi - \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^k\partial_k\psi + m\bar{\psi}\psi + gA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \tag{23}$$

La QED esta definida en el espacio de fase compuesto por variables bosónicas y fermiónicas: $(A_\mu, \psi_a, \bar{\psi}_a, \pi^\mu, \bar{\pi}_a, \pi_a)$, debido a esto, es necesario utilizar los paréntesis de Bose-Fermi en los cálculos que prosiguen; si $B$ define una variable bosónica y $F$ una fermiónica, los paréntesis de Bose-Fermi serán definidos como [8,10]:

$$\begin{aligned}\{B_1, B_2\} \equiv \int d^3z \left[\left(\frac{\delta B_1}{\delta\psi_c(z)}\frac{\delta B_2}{\delta\bar{\pi}_c(z)} - \frac{\delta B_2}{\delta\psi_c(z)}\frac{\delta B_1}{\delta\bar{\pi}_c(z)} + \frac{\delta B_1}{\delta\bar{\psi}_c(z)}\frac{\delta B_2}{\delta\pi_c(z)} - \frac{\delta B_2}{\delta\bar{\psi}_c(z)}\frac{\delta B_1}{\delta\pi_c(z)}\right)\right] \\ + \int d^3z \left[\left(\frac{\delta B_1}{\delta A_\alpha(z)}\frac{\delta B_2}{\delta\pi^\alpha(z)} - \frac{\delta B_2}{\delta A_\alpha(z)}\frac{\delta B_1}{\delta\pi^\alpha(z)}\right)\right]\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}\{F, B\} \equiv \int d^3z \left[-\left(\frac{\delta F}{\delta\psi_c(z)}\frac{\delta B}{\delta\bar{\pi}_c(z)} + \frac{\delta B}{\delta\psi_c(z)}\frac{\delta F}{\delta\bar{\pi}_c(z)} + \frac{\delta F}{\delta\bar{\psi}_c(z)}\frac{\delta B}{\delta\pi_c(z)} + \frac{\delta B}{\delta\bar{\psi}_c(z)}\frac{\delta F}{\delta\pi_c(z)}\right)\right] \\ + \int d^3z \left[\left(\frac{\delta F}{\delta A_\alpha(z)}\frac{\delta B}{\delta\pi^\alpha(z)} - \frac{\delta B}{\delta A_\alpha(z)}\frac{\delta F}{\delta\pi^\alpha(z)}\right)\right]\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}\{F_1, F_2\} \equiv \int d^3z \left[-\left(\frac{\delta F_1}{\delta\psi_c(z)}\frac{\delta F_2}{\delta\bar{\pi}_c(z)} + \frac{\delta F_2}{\delta\psi_c(z)}\frac{\delta F_1}{\delta\bar{\pi}_c(z)} + \frac{\delta F_1}{\delta\bar{\psi}_c(z)}\frac{\delta F_2}{\delta\pi_c(z)} + \frac{\delta F_2}{\delta\bar{\psi}_c(z)}\frac{\delta F_1}{\delta\pi_c(z)}\right)\right] \\ + \int d^3z \left[\left(\frac{\delta F_1}{\delta A_\alpha(z)}\frac{\delta F_2}{\delta\pi^\alpha(z)} + \frac{\delta F_2}{\delta A_\alpha(z)}\frac{\delta F_1}{\delta\pi^\alpha(z)}\right)\right]\end{aligned} \tag{26}$$

De (24), (25) y (26) es posible deducir que los paréntesis fundamentales no nulos de Bose-Fermi para la QED son:

$$\begin{aligned}\{A_\mu(x), \pi^\nu(y)\} &= \delta^\nu_\mu\delta^3(x-y), \\ \{\psi_a(x), \bar{\pi}_b(y)\} &= -\delta_{ab}\delta^3(x-y), \\ \{\bar{\psi}_a(x), \pi_b(y)\} &= -\delta_{ab}\delta^3(x-y).\end{aligned} \tag{27}$$

## 4. Formulación de Hamilton Jacobi

La ecuación de Hamilton-Jacobi (HJ) asociada a la densidad Hamiltoniana (23) es:

$$\phi^t \equiv p^t + \mathscr{H} = 0 \tag{28}$$

Donde $p^t$ se ha definido como la densidad de momento asociado a $t$, los vínculos primarios (18) y (21) son ecuaciones diferenciales parciales en el formalismo de HJ, y junto con (28) forman el sistema de ecuaciones diferenciales parciales denominado EDPHJ:

$$\phi^t \equiv p^t + \mathscr{H} = 0, \tag{29}$$

$$\phi^1 \equiv \pi^0 = 0, \tag{30}$$

$$\phi_a \equiv \pi_a + \frac{i}{2}\gamma^0_{ab}\psi_b = 0, \tag{31}$$

$$\bar{\phi}_a \equiv \bar{\pi}_a + \frac{i}{2}\bar{\psi}_c\gamma^0_{ca} = 0. \tag{32}$$

Siguiendo la sistemática del Método de Hamilton-Jacobi a la Carathéodory [4,14,6], debemos asociar a cada una de estas EDPHJ una seria de variables independientes, de esta manera a la ecuación (29) se le deberá asociar la variable independiente $x^0 = t$, debido a que $p^t$ se ha definido como la densidad de momento asociado a esta coordenada, además, $\phi^t$ contiene la densidad Hamiltoniana que esta directamente relacionada con la dinámica del sistema. A la ecuación (30) se le puede asociar en principio un parámetro arbitrario que sea función del espacio-tiempo, pero debido a que $\phi^1$ nace de la definición de momento canónico conjugado al campo $A_0(x)$, se definirá a este campo como el parámetro asociado a esta EDPHJ, es decir que $A_0$ también es un parámetro que describe la evolución del sistema físico en las mismas condiciones que $t$. Las EDPHJ (31) y (32) surgen de la definición de los momentos $(\pi_a, \bar{\pi}_a)$ conjugados a las variables $(\bar{\psi}_a, \psi_a)$ respectivamente, por lo tanto, se relacionará a $(\bar{\psi}, \psi)$ como los parámetros independientes a las EDPHJ (31) y (32) respectivamente. De esta manera, la evolución dinámica de una variable definida en el espacio de fase $(A_\mu, \psi, \bar{\psi}, \pi^\mu, \pi, \bar{\pi})$ para una variable dinámica $F(A_\mu, \psi, \bar{\psi}, \pi^\mu, \pi, \bar{\pi})$ está definido por el diferencial:

$$dF(x) = \int d^3y \Big[\{F(x), \phi^t(y)\}dt + \{F(x), \phi^1 y)\}dA_0 + (-1)^{(n_F+1)}d\bar{\psi}_a(y)\{F(x), \phi_a(y)\}\Big] \tag{33}$$
$$+ \int d^3y \left[\{F(x), \bar{\phi}_a(y)\}d\psi_a(y)\right]$$

Con el fin de garantizar que el conjunto de EDPHJ es linealmente independiente [4,14,6], se procederá a analizar las condiciones de integrabilidad de las relaciones (29), (30), (31) y (32). Primero, se analizará la integrabilidad de las ecuaciones fermiónicas los cuales deberán satisfacer las siguientes condiciones:

$$d\phi_a(x) = 0 \qquad , \qquad d\bar{\phi}_a(x) = 0. \tag{34}$$

Utilizando las relaciones (27) y después de un laborioso calculo, es posible determinar las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} d\phi_a(x) &= \left(i\gamma^k_{ad}\partial^x_k\psi_d(x) - m\psi_a(x) - gA_\mu(x)\gamma^\mu_{ad}\psi_d(x)\right)dt - i\gamma^0_{ab}d\psi_b(x) = 0, \\ d\bar{\phi}_a(x) &= \left(i\partial^x_k\bar{\psi}_c(x)\gamma^k_{ca} + m\bar{\psi}_a(x) + gA_\mu(x)\bar{\psi}_c(x)\gamma^\mu_{ca}\right)dt - id\bar{\psi}_b(x)\gamma^0_{ba} = 0, \end{aligned} \tag{35}$$

de las cuales se puede deducir que

$$\begin{aligned} d\psi_c(x) &= \left(\gamma^0_{ca}\gamma^k_{ad}\partial^x_k\psi_d(x) + im\gamma^0_{ca}\psi_a(x) + igA_\mu(x)\gamma^0_{ca}\gamma^\mu_{ad}\psi_d(x)\right)dt \\ d\bar{\psi}_d(x) &= \left(\partial^x_k\bar{\psi}_c(x)\gamma^k_{ca}\gamma^0_{ad} - im\bar{\psi}_a(x)\gamma^0_{ad} - igA_\mu(x)\bar{\psi}_c(x)\gamma^\mu_{ca}\gamma^0_{ad}\right)dt. \end{aligned} \tag{36}$$

Así, las condiciones de integrabilidad de las EDPHJ fermiónicas determinan relaciones entre los diferenciales $d\psi$,$d\bar{\psi}$ y $dt$, tal como lo muestran la relación (36), indicando, que las EDPHJ (31) y (32) no son linealmente independientes [6].

De igual manera, se analizará la integrabilidad de la EDPHJ bosónica (30), esta condición exige que se cumpla:

$$d\phi^1(x) = 0. \tag{37}$$

Utilizando nuevamente los Paréntesis de Bose-Fermi (27), se puede determinar que

$$d\phi^1(x) = \left(\partial^x_k\pi^k(x) - g\bar{\psi}(x)\gamma^0\psi(x)\right)dt = 0. \tag{38}$$

Así, la condición de integrabilidad de $\phi^1$ genera una nueva EDP de carácter bosónico $n_{\phi^2} = 0$, esta debe ser agregada al conjunto de EDPHJ y se definirá de la siguiente forma:

$$\phi^2(x) \equiv \partial^x_k\pi^k(x) - g\bar{\psi}(x)\gamma^0\psi(x) = 0 \tag{39}$$

Se procederá a analizar la integrabilidad de esta nueva EDPHJ, exigiendo que se cumpla: $d\phi^2(x) = 0$ y utilizando (33), se puede deducir de la integrabilidad de $\phi^2$ la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} d\phi^2(x) &= -g\partial_k^x \left(\bar{\psi}_c(x)\gamma_{cd}^k \psi_d(x)\right) + g\left(d\bar{\psi}_b(x)\gamma_{bc}^0\psi_c(x) + \bar{\psi}_c(x)\gamma_{cb}^0 d\psi_b(x)\right) \\ &= -g\partial_k^x \left(\bar{\psi}_c(x)\gamma_{cd}^k \psi_d(x)\right) + g\partial_k^x \left(\bar{\psi}_c(x)\gamma_{cd}^k \psi_d(x)\right) = 0. \end{aligned}$$

Así, la integrabilidad de $\phi^2$ es idénticamente satisfecha, por lo tanto, las EDPHJ de carácter bosónicas están en involución con los paréntesis de Bose-Fermi. La nueva EDPJH, $\phi^2$, debe ser agregada al conjunto de EDPHJ ya existentes, y al igual que este conjunto, será necesario asociarse un nuevo parámetro; este parámetro deberá ser de paridad par y será designado como $W(x)$ y en principio es arbitrario. Considerando el conjunto completo de EDPHJ (29), (30), (31), (32), (39), y la relación (36), se puede escribir el diferencial de una variable dinámica $F(x)$, (33), en la forma:

$$\begin{aligned} dF(x) = \int d^3y[\{F(x),\phi^t(y)\} + \{F(x),\phi^1(y)\}dA_0(y) + \{F(x),\phi^2(y)\}dW(y) \qquad (40) \\ +(-1)^{(n_F+1)}\left(\partial_k^y\bar{\psi}_c(y)\gamma_{cd}^k\gamma_{da}^0 - im\bar{\psi}_d(y)\gamma_{da}^0 - igA_\mu(y)\bar{\psi}_c(y)\gamma_{cd}^\mu\gamma_{da}^0\right)\{F(x),\phi_a(y)\} \\ +\{F(x),\bar{\phi}_a(y)\}\left(\gamma_{ac}^0\gamma_{cd}^k\partial_k^y\psi_d(y) + im\gamma_{ac}^0\psi_c(y) + igA_\mu(y)\gamma_{ac}^0\gamma_{cd}^\mu\psi_d(y)\right)] \end{aligned}$$

## 5. Paréntesis Generalizados

La expresión entre corchetes cuadrados en (40), especifica una forma particular de los paréntesis generalizados (PG) [6]. Así, el PG entre dos variables dinámicas $F(x)$ y $G(y)$ se definen formalmente de la siguiente manera:

$$\{F(x),G(y)\}^* = \{F(x),G(y)\} - \int\int d^3u d^3v \left\{F(x),\Sigma_a^i(u)\right\}\left(C_{ab}^{ij}(u,v)\right)^{-1}\{\Sigma_b^j(v),G(y)\} \qquad (41)$$

Donde $i,j = 1,2$, y se ha definido:

$$\begin{aligned} \Sigma_a^1 &\equiv \phi_a = \pi_a + \frac{i}{2}\gamma_{ab}^0\psi_b = 0 \\ \Sigma_a^2 &\equiv \bar{\phi}_a = \bar{\pi}_a + \frac{i}{2}\bar{\psi}_b\gamma_{ba}^0 = 0, \end{aligned}$$

y con $\left(C_{ab}^{ij}(u,v)\right)^{-1}$ siendo la inversa de la matriz $C_{ab}^{ij}(u,v)$ cuyos elementos de matriz son construidos a partir de los paréntesis de Bose-Fermi entre las EDPHJ $\Sigma_a^i$ y $\Sigma_b^j$.

$$C_{ab}^{ij}(u,v) = \begin{pmatrix} \{\phi_a(u),\phi_b(v)\} & \{\phi_a(u),\bar{\phi}_b(v)\} \\ \{\bar{\phi}_a(u),\phi_b(v)\} & \{\bar{\phi}_a(u),\bar{\phi}_b(v)\} \end{pmatrix} = -i\begin{pmatrix} 0 & \gamma_{ab}^0 \\ \gamma_{ba}^0 & 0 \end{pmatrix}\delta^3(u-v). \qquad (42)$$

La inversa de esta matriz está dada por [8]:

$$\left(C_{ab}^{ij}(u,v)\right)^{-1} = i\begin{pmatrix} 0 & \gamma_{ba}^0 \\ \gamma_{ab}^0 & 0 \end{pmatrix}\delta^3(u-v) \qquad (43)$$

La definición de PG permite reducir el número de parámetros independientes, en este caso $\psi_a$ y $\bar{\psi}_a$; con esto, la evolución de una variable dinámica $F(x)$ depende únicamente de los parámetros independientes $(t, A_0, W)$. En términos de los PG, el diferencial (40) esta dado por la expresión:

$$dF(x) = \int d^3y\left[\{F(x),\phi^t(y)\}^*dt + \{F(x),\phi^1(y)\}dA_0(y) + \{F(x),\phi^2(y)\}dW(y)\right] \qquad (44)$$

Ahora, se procederá ahora a analizar nuevamente las condiciones de integrabilidad utilizando el diferencial (44). Se comenzara con las EDPHJ de carácter bosónico y se estudiara primero la integrabilidad de $\phi^1(x)$:

$$d\phi^1(x) = 0. \qquad (45)$$

De la relaciones (41) y (44) se puede determinar que:

$$d\phi^1(x) = \left[\partial_k^x \pi^k(x) - g\bar{\psi}_c(x)\gamma^0_{cd}\psi_d(x)\right] dt = \phi^2(x)dt = 0 \tag{46}$$

Apoyándose en (44), la integrabilidad de $\phi^2(x)$ está dada por:

$$\begin{aligned} d\phi^2(x) &= \int d^3y\{\phi^2(x), \phi^t(y)\}^* dt \\ &= -g\partial_k^x \left(\bar{\psi}_c(y)\gamma^k_{cd}\psi_d(y)\right) + g\bar{\psi}_b(x)\gamma^k_{bd}\partial_k^x\psi_d(x) + g\bar{\psi}_b(x)\gamma^k_{bd}\partial_k^x\psi_d(x) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{47}$$

Las relaciones (46) y (47) establecen que las EDPHJ ($\phi^1$ y $\phi^2$) están en involución bajo la definición (44).

Se analizara a continuación la integrabilidad de los vínculos fermiónicos. Usando (44), se puede determinar que:

$$\begin{aligned} d\phi_a(x) &= g\gamma^0_{ac}\int d^3y\psi_c(y)\delta^3(x-y)dW(y) = g\gamma^0_{ac}\psi_c(x)dW(x) = 0 \\ d\phi_a(x) &= g\gamma^0_{ac}\int d^3y\psi_c(y)\delta^3(x-y)dW(y) = g\gamma^0_{ac}\psi_c(x)dW(x) = 0. \end{aligned} \tag{48}$$

Como las componentes de los espinores $\psi$ y $\bar{\psi}$ son independientes, se determina que:

$$dW = 0 \tag{49}$$

Debido a las condiciones (49), el diferencial (44), se debe reescribir de la siguiente manera:

$$dF(x) = \int d^3y \left[\{F(x), \phi^t(y)\}^* dt + \{F(x), \phi^1(y)\}dA_0(y)\right] \tag{50}$$

Se puede verificar fácilmente con el diferencial anterior que el sistema de EDPHJ esta en involución, y por lo tanto este y las respectivas ecuaciones características son integrables. En principio se asumió que los campos $(A_\mu, \psi_a, \bar{\psi}_a, \pi^\mu, \bar{\pi}_a, \pi)$ eran independientes, pero debido a la presencia de las EDPHJ y de de haber considerado a $(A_0, \psi, \bar{\psi})$ como los parámetros independientes asociados a las EDPHJ; se establece que los campos $(A_k, \pi^k, \bar{\pi}_a, \pi_a)$ son los grados de libertad de la teoría.

Ahora, se procederá a deducir primero los PG entre los campos independientes del problema, para ello, se iniciara calculando el PG de $A_i(x)$ con cualquier variable dinámica $G(y)$, el cual esta dado por:

$$\begin{aligned} \{A_i(x), G(y)\}^* = \{A_i(x), G(y)\} &- i\gamma^0_{ab}\int d^3v \left\{A_i(x), \bar{\phi}_a(v)\right\}\left\{\phi_b(v), G(y)\right\} \\ &- i(-1)^{(n_G+1)}\gamma^0_{ba}\int d^3v \left\{\bar{\phi}_b(v), G(y)\right\}\left\{A_i(x), \phi_a(v)\right\}. \end{aligned} \tag{51}$$

Del cual se determina que el único PG de $A_i$ diferente de cero con los campos independientes es:

$$\left\{A_i(x), \pi^k(y)\right\}^* = \delta^k_i\delta^3(x-y) \tag{52}$$

De igual manera, el PG de $\pi^k(x)$ con alguna variable dinámica $G(y)$, esta dado por:

$$\begin{aligned} \left\{\pi^k(x), G(y)\right\}^* = \left\{\pi^k(x), G(y)\right\} &- i\gamma^0_{ab}\int d^3v \left\{\pi^k(x), \bar{\phi}_a(v)\right\}\left\{\phi_b(v), G(y)\right\} \\ &- i(-1)^{(n_G+1)}\gamma^0_{ba}\int d^3v \left\{\bar{\phi}_b(v), G(y)\right\}\left\{\pi^k(x), \phi_a(v)\right\}, \end{aligned} \tag{53}$$

del que es posible comprobar que

$$\left\{\pi^k(x), A_i(y)\right\}^* = -\delta^k_i\delta^3(x-y). \tag{54}$$

Ahora, se procederá a deducir los PG de los campos fermiónicos. Primero se determina que el PG de $\pi_c(x)$ con cualquier variable dinámica, esta definido así:

$$\begin{aligned} \{\pi_c(x), G(y)\}^* = \{\pi_c(x), G(y)\} &- i\gamma^0_{ab}\int d^3v \left\{\pi_c(x), \bar{\phi}_a(v)\right\}\left\{\phi_b(v), G(y)\right\} \\ &-i\gamma^0_{ba}\int d^3v \left\{\bar{\phi}_b(v), G(y)\right\}\left\{\pi_c(x), \phi_a(v)\right\}, \end{aligned} \tag{55}$$

del cual es posible mostrar que

$$\{\pi_c(x), \bar{\pi}_a(y)\}^* = \frac{i}{4}\gamma^0_{ca}\delta^3(x-y). \tag{56}$$

De esta manera se concluye que (54), (56) y (56) son los únicos PG de la teoría.

## 6. Ecuaciones Características

Se procederá a calcular, mediante el diferencial (50), las ecuaciones características asociadas a las sistema de EDPHJ, que corresponden a las ecuaciones de movimiento de la teoría [7]. Empezando con las variables dinámicas bosónicas $A_i$ se establece que:

$$dA_i(x) = \int d^3y \left[\{A_i(x), \phi^t(y)\}^* dt + \{A_i(x), \phi^1(y)\} dA_0(y)\right]. \tag{57}$$

Utilizando los siguientes PG de $A_i(x)$:

$$\{A_i(x), \phi^t(y)\}^* = \left[\pi^i(y) + \partial^y_i A_0(y)\right]\delta^3(x-y), \tag{58}$$

$$\{A_i(x), \phi^1(y)\}^* = 0, \tag{59}$$

se puede determinar que:

$$dA_i(x) = \int d^3y \left[\pi^i(y) + \partial^y_i A_0(y)\right]\delta^3(x-y)dt \tag{60}$$

$$= \left[\pi^i(x) + \partial^x_i A_0(x)\right] dt \tag{61}$$

Definiendo $\dot{A}_i \equiv \partial_0 A_i$, se obtiene:

$$\dot{A}_i = \pi^i(x) + \partial^x_i A_0(x) \tag{62}$$

Este resultado concuerda correctamente con la expresión (19) derivada de la definición de momento canónico conjugado. De igual manera, la evolución del campo $\pi^k(x)$, utilizando (50), esta dado por:

$$d\pi^k(x) = \int d^3y \left[\{\pi^k(x), \phi^t(y)\}^* dt + \{\pi^k(x), \phi^1(y)\} dA_0(y)\right], \tag{63}$$

los PG que aparece en la expresión anterior son dados por:

$$\{\pi^k(x), \phi^t(y)\}^* = \frac{1}{2}F^{ij}(y)\left[\delta^k_i\partial^y_j - \delta^k_j\partial^y_i\right]\delta^3(x-y) - g\bar{\psi}(y)\gamma^k\psi(y)\delta^3(x-y), \tag{64}$$

$$\{\pi^k(x), \phi^1(y)\}^* = 0. \tag{65}$$

Substituyendo (64) en (63) se obtiene que

$$d\pi^k(x) = \left[\frac{1}{2}\left(\partial^x_i F^{ik}(x) - \partial^x_j F^{kj}(x)\right) - g\bar{\psi}(x)\gamma^k\psi(x)\right] dt$$

Cambiando el índice mudo $j \to i$ y utilizando la propiedad de antisimetría del tensor de campo electromagnético, la expresión anterior resulta en:

$$d\pi^k(x) = \left[\partial^x_i F^{ik}(x) - g\bar{\psi}(x)\gamma^k\psi(x)\right] dt$$

Definiendo $\dot{\pi}^k \equiv \partial_0\pi^k$, y usando $\pi^k = F^{k0}$, se concluye que:

$$\partial_\mu F^{\mu k} = g\bar{\psi}(x)\gamma^k\psi(x) \tag{66}$$

Ahora la EDPHJ (39), se puede reescribir así:

$$\partial^x_k F^{k0}(x) = g\bar{\psi}(x)\gamma^0\psi(x) \tag{67}$$

Sumando un cero particular $\partial_0 F^{00}$, a la expresión anterior, se obtiene:

$$\partial_\mu F^{\mu 0} = g\bar{\psi}(x)\gamma^0\psi(x). \tag{68}$$

Recordando que $J^\nu \equiv g\bar{\psi}(x)\gamma^\nu\psi(x)$, las ecuaciones (66) y (68) se escriben en la siguiente forma compacta:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu \tag{69}$$

La ecuación (69) describe el campo electromagnético con fuentes, en componentes se escribe como:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = J^0 \tag{70}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \boldsymbol{J} \tag{71}$$

El hecho de que el tensor de campo electromagnético, $F^{\mu\nu}$ satisface la identidad de Bianchi:

$$\partial_\mu F^{\nu\alpha} + \partial_\nu F^{\alpha\mu} + \partial_\alpha F^{\mu\nu} = 0 \tag{72}$$

se deduce de aquí:

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{73}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{74}$$

Las relaciones (70), (71), (73) y (74) constituye lo que se conoce como las ecuaciones de de campo electromagnético con fuentes [11].

Ahora, se procede a calcular las ecuaciones de movimiento para las variables fermiónicas. El diferencial de $\pi_a(x)$, usando (50), es dado por:

$$d\pi_a(x) = \int d^3y \left[\{\pi_a(x), \phi^t(y)\}^* dt + \{\pi_a(x), \phi^1(y)\} dA_0(y)\right]. \tag{75}$$

Después de un laborioso calculo, es posible mostrar que

$$2d\pi_a(x) = \left[i\gamma^k_{ac}\partial^x_k\psi_c(x) - m\psi_a(x) - gA_\mu(x)\gamma^\mu_{ac}\psi_c(x)\right] dt. \tag{76}$$

Utilizando la relación (20) en la expresión anterior se puede escribir en la siguiente forma:

$$\left[(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\,\psi(x)\right]_a = gA_\mu(x)\gamma^\mu_{ac}\psi_c(x). \tag{77}$$

Finalmente, se calculara la ecuación de movimiento asociada a $\bar{\psi}_a(x)$, utilizando nuevamente (50) del cual se obtiene el siguiente diferencial para esta variable fermiónica:

$$d\bar{\pi}_a(x) = \int d^3y \left[\{\bar{\pi}_a(x), \phi^t(y)\}^* dt + \{\bar{\pi}_a(x), \phi^1(y)\} dA_0(y)\right]. \tag{78}$$

Procediendo con cálculos similares que conllevaron al resultado (76), es posible mostrar que

$$2d\bar{\pi}_a(x) = [i\partial^x_k\bar{\psi}_b(x)\gamma^k_{ba} + m\bar{\psi}_a(x) + gA_\mu(x)\bar{\psi}_b(x)\gamma^\mu_{ba}]dt; \tag{79}$$

ahora utilizando la expresión (20), $\bar{\pi}_a = -\frac{i}{2}\bar{\psi}_b\gamma^0_{ba}$, se determina que:

$$\left[\bar{\psi}(x)\left(i\gamma^\mu\overleftarrow{\partial}_\mu + m\right)\right]_a = -gA_\mu(x)\bar{\psi}_b(x)\gamma^\mu_{ba} \tag{80}$$

Las ecuaciones (77) y (80) se conocen como las ecuaciones de Dirac para los campos espinoriales $\psi$ y $\bar{\psi}$ respectivamente [7].

## 7. Remarks and conclusions

En este trabajo se presentó el formalismo de Hamilton Jacobi para sistemas singulares. Mediante problemas prácticos se hizo la generalización para sistemas con infinitos grados de libertad y sistemas descritos por medio de variables de Grassmann. Se mostró que el formalismo de Hamilton Jacobi, permite a través de las condiciones de integrabilidad obtener nuevos vínculos que surgen de la teoría, de igual manera que las condiciones de consistencia lo hacen en el formalismo Hamiltoniano de Dirac. En algunos trabajos se ha probado la equivalencia entre las condiciones de integrabilidad y las condiciones de consistencia [7].

En particular, se mostró que cada vínculo es reconocido como una ecuación diferencial parcial en el formalismo de Hamilton Jacobi y a cada uno de estos vínculos se les asigna un parámetro independiente. Si todos los vínculos primarios y obtenidos por integrabilidad se cierran en un álgebra de Lie, entonces, se dice que el sistema es involutivo y las respectivas ecuaciones de movimiento o características son integrables. Si todos los vínculos o algunos no están en involución es debido a que existe una dependencia lineal entre las EDP, esto permitirá redefinir la dinámica en términos de los paréntesis generalizados reduciendo el número de parámetros independientes. Las ecuaciones de movimiento quedan entonces expresadas en términos de los vínculos que están en involución con los paréntesis de Poisson y sus respectivos parámetros independientes. Se puede observar que vínculos en involución se refiere a vínculos de primera clase en el formalismo de Dirac, por lo tanto, la evolución de un sistema en el formalismo de Hamilton Jacobi esta dada por el Hamiltoniano y los vínculos de primera clase y sus respectivos parámetros independientes, llegando directamente a la conjetura de Dirac [9].

El formalismo de Hamilton-Jacobi permitió estudiar la estructura clásica de la electrodinámica cuántica (QED), el problema tiene, inicialmente, una EDPHJ bosónica y ocho EDPHJ asociadas al sector fermiónicos, al analizar la integrabilidad de las EDPHJ fermiónicos se determinó relaciones entre las variables independientes del sistema. La integrabilidad de la EDPHJ bosónica genera otra EDPHJ también de carácter bosónico y la integrabilidad de este es directamente satisfecha. En este punto, se debe asociar un parámetro independiente a la nueva EDPHJ bosónica y junto con las relacion (36) la dinámica está dada en términos de los paréntesis generalizados y las EDPHJ bosónicas que están en involución con los paréntesis de Bose-Fermi como lo indica (44). Se mostró que con el uso de este diferencial las EDPHJ cumplen las condiciones de integrabilidad y por lo tanto las ecuaciones de movimiento son integrables. Finalmente, se calcularon las ecuaciones de Maxwell con fuentes en forma covariante (66) y de igual manera las ecuaciones (77) y (80) que corresponden a las ecuaciones de Dirac para los campos espinoriales $\psi$ y $\bar{\psi}$.

## Referencias

[1] Herbert Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, New York, NY, USA, 1990.
[2] L Landau and E. Lifshitz, *Mechanics*, Reverté", Barcelona, 1994.
[3] Bertin M.C and Pimentel B.M and Pompeia P.J, Rev. Bras. de Ensino, **29**, 393 (2007).
Pimentel B and Teixeira R and Tomazelli J.L, Ann. of Phys., **84**, 267 (1998).
Teixeira R, *Formalismo de Hamilton Jacobi para Sistemas Singulares*, Disertación de Maestria, Instituto de Física Teórica, Sao Paulo, 1996.
Teixeira R, *Quantização de sistemas singulares via formalismo de Hamilton-Jacobi*, Tesis de Doctorado, Instituto de Física Teórica, Sao Paulo, 2000.
[4] Bertin M.C and Pimentel B.M and Pompeia P.J, Rev. Bras. de Ensino, **30**, 3 (2008).
[5] P Puig, Curso Teórico Práctico de Ecuaciones Diferenciales Aplicado a la Física y Tecnia, Roberto Puig Alvarez, Madrid, 1978.
Elsgoltz L., *Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional*, MIR, Moscú", 1977.
[6] Pimentel B and M. C. Bertin and Valcárcel C.E, Ann. of Phys., **323**, 3137 (2008).
[7] Pimentel B and Teixeira R and Tomazelli J.L, Ann. of Phys., **267**, 75 (1998).
[8] K Sundermeyer, *Constrained Dynamics with Applications to Yang-Mills Theory, General Relativity, Classical Spin, Dual String Model*, Springer-Verlag, New York, 1982.
[9] P. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics*, Yeshiva University, New York, 1974.
[10] Carneiro C. and Thomaz M., Revista Brasileira de Ensino de Física, **22**, 474 (2000).
Tilles C., *Quantização de partículas com spin*, Disertación de Maestria, Instituto de Física Teórica, Sao Paulo, 2007.
[11] R. Aldrovandi and J. G. Pereira, *Notes for a Course on CLASSICAL FIELDS*, Instituto de Física Teórica, Sao Paulo, 2008.
[12] W Greiner and J Reinhardt, *Field Quantization*, Springer, New York 1996.
[13] Franz Mandl and Graham Shaw, *Quantum Field Theory 2th*, Wiley ans Sons, 2010.
[14] R. Teixeira, *Quantização de sistemas singulares via formalismo de Hamilton-Jacobi*, Tesis de Doctorado, Instituto de Física Teórica, Sao Paulo, 2000.