

DÍAZ Y DOS SANTOS. 2025. Un ambiente de visualización selectiva de los modelos de regresión lineal y cuadrática basado en la Geometría Interactiva de Cabri. Revista Sigma, 21 (2). Páginas 15–37.

REVISTA SIGMA

Departamento de Matemáticas y Estadística

Volumen XXI N° 2 (2025), páginas 15–37

Universidad de Nariño

Un ambiente de visualización selectiva de los modelos de regresión lineal y cuadrática basado en la Geometría Interactiva de Cabri

Eugenio Díaz Barriga Arceo¹

José Alexandre dos Santos Vaz Martins²

Abstract: This article presents a way of understanding linear and quadratic regressions using Cabri Interactive Geometry, taking advantage of the properties of this computer program to emphasize the visualization of concepts and properties, seeking to encourage learners to explore and discover, rather than focus on memorizing the usual formulas. This approach seeks to strengthen the presentation of statistical modeling through the exploration of linear and quadratic functions, knowledge that can also be reviewed in this Interactive Geometry environment. In the classroom, the comparative exploration of regression models presented to a data set is a non-traditional task that ultimately enriches the pool of resources that will be put into action by those who face the task of interpreting statistical information. **Keywords.** Statistics, selective visualization, linear and quadratic regression, goodness of fit, Cabri.

Resumen: En este artículo se presenta una forma de comprender las regresiones lineal y cuadrática utilizando la Geometría Interactiva de Cabri, aprovechando las propiedades de dicho programa de cómputo con el propósito de enfatizar la visualización de conceptos y propiedades, buscando fomentar que los aprendices realicen exploraciones y descubrimientos, más que se concentren en la memorización de las fórmulas usuales. Con este enfoque, se busca fortalecer una presentación de la modelación estadística con la exploración de las funciones lineal y cuadrática, conocimientos que pueden pasar a revisarse también en este ambiente de Geometría Interactiva. En el aula de clase, la exploración comparativa de los modelos de regresión presentados ante un conjunto de datos es una tarea no tradicional que eventualmente enriquece el acervo de recursos que pondrá en acción aquel que se enfrenta a interpretar alguna información estadística.

Palabras Clave. Estadística, visualización selectiva, regresión lineal y cuadrática, bondad de ajuste, Cabri.

¹Profesor, Universidad Autónoma del Estado de México. Correo: eugeniox@hotmail.com.

²Profesor, Instituto Politécnico da Guarda. Correo: jasvm@ipg.pt.

1. Introducción

El ajuste de curvas a un conjunto de datos es un tema presente en la modelación de muchos fenómenos científicos (Mendes da Silva, 2020; Sant'Anna et al., 2021). Un primer paso al estudiar dichos fenómenos es saber si existe entre las variables aleatorias presentes en un conjunto de datos una relación de dependencia o no: el primer abordaje gráfico usualmente permite ver si al crecer una de ellas la otra crece, decrece o se mantiene constante. Por su simplicidad computacional y algunas correspondencias con problemas reales, los primeros dos modelos para realizar la simulación de algún fenómeno son el modelo lineal ($y = Ax + B$) y el modelo cuadrático ($y = Ax^2 + Bx + C$), y puede suceder que en otros casos se hagan algunas transformaciones de los datos para reducirlos a los modelos mencionados.

Una vez recabados los datos experimentales y que se haya representado en el plano coordinado los puntos obtenidos (o transformaciones convenientes de ellos), una cuestión importante es acerca de qué curva se adapta mejor al cúmulo o nube de datos. Para eso se tienen varias formas, por ejemplo: en forma alargada, redonda, de u, de u invertida, con oscilaciones periódicas, con crecimiento o decrecimiento geométrico, entre otras (ver Figura 1). Al mismo tiempo, del conocimiento de funciones elementales, se puede intentar reconocer y asociarlas con rectas, parábolas, polinomios, curvas exponenciales, logarítmicas o funciones periódicas. Además, esto se puede complementar con alguna suposición a priori del fenómeno en estudio que auxilie a postular un modelo de ajuste con más elementos.

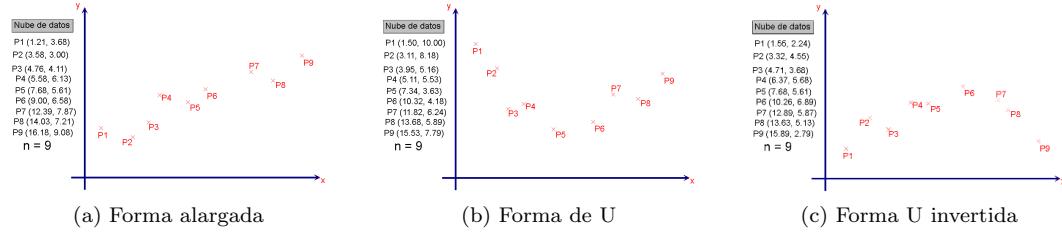


Figura 1: Cúmulos de datos en el plano. Distintas formas de nubes de datos. *Fuente: creación propia, captura de pantalla de la interfase de Cabri*

El propósito de este trabajo es describir una forma de explorar y percibir mejor los modelos lineal y cuadrático, y al método de los mínimos cuadrados con las herramientas de la geometría dinámica de Cabri, buscando exhibir visualmente para un conjunto de datos cuál de los modelos se ajusta mejor. La construcción geométrica que se desarrollará en éste documento, permite al docente organizar mejor la presentación de los modelos de regresión lineal y cuadrático, explorar diversos casos de los cúmulos de datos, contrastar las diferencias entre los modelos, así como dar un entorno donde desarrollar y evaluar las destrezas estimativas de los estudiantes respecto de valores numéricos de coeficientes de correlación y determinación. Se toma en cuenta la necesidad de visualizar las medidas de dispersión, aspecto no presente en algunos de los textos actuales (Pino y Estepa, 2019; Martins et al., 2014), así como crear ambientes educativos con elementos pertinentes para la evaluación del aprendizaje. Al ofrecer el paso a paso de la construcción, la propuesta didáctica se separa de utilizar como “cajas negras” en el aula los paquetes de cómputo especializados.

Varios estudios señalan que la Geometría Interactiva fomenta una mejor comprensión de la función cuadrática en estudiantes de niveles básico y medio (Peyrerol y Alves, 2021; Binotto et al. 2022; Sousa et al., 2023). Se identifica en Cavalcante (2017), un abordaje didáctico específico sobre la enseñanza de parábola, la cual se propone como lugar geométrico de puntos, aunque basada en anteponer el enfoque numérico a las exploraciones geométricas. Una

construcción dinámica de la función cuadrática se puede realizar con manipulación numérica o geométrica de los coeficientes de dicha función. Nuestra propuesta tiene un carácter más geométrico y el cambio de los coeficientes se da gradualmente en forma “continua”. Este estudio del modelo de regresión cuadrática se realiza usando controladores geométricos: los tres valores reales del modelo cuadrático son simulados por tres deslizadores en Cabri, siendo un deslizador un segmento cuya longitud regula un valor numérico, construcción muy frecuente en la Geometría Interactiva.

En este punto es importante considerar que los valores de las ordenadas corresponden a la variable dependiente, mientras que los de las abscisas a los de la variable independiente. Para evitar errores en las predicciones de los modelos, se debe distinguir si el modelo será de la forma $y = F(x)$ (con x hacemos predicciones sobre y) o bien de la forma $x = G(y)$ (con y hacemos predicciones sobre x): hay problemas educativos al usar el modelo de regresión lineal directa también como modelo predictivo para una regresión lineal inversa (Ribeiro et al., 2012). Esto nos marca una separación importante al estudiar funciones matemáticas deterministas con las funciones que involucran variables aleatorias. Otra situación que merece especial atención consiste en explorar dinámicamente la cuestión de la escala, manipulando dinámicamente la graduación del eje y (Queiroz, 2020).

La idea de ofrecer la visualización de la correlación de un modelo estará en función del tamaño de un círculo, de una forma similar a la visualización del avance de una epidemia, como se ha usado para el caso del coronavirus³. Las exploraciones geométricas se realizarán aprovechando el arrastre de puntos y el manejo de los parámetros a través de los deslizadores, así como las herramientas “Macro” y “Botón ocultar/mostrar” para ofrecer al estudiante una visualización selectiva de los diversos elementos involucrados. Con ellas se podrán explorar de forma controlada y organizada los cambios en la nube de datos y sus efectos en las características y los parámetros de los modelos. Es pertinente recalcar que la construcción geométrica paso a paso permite exhibir lo que hay detrás de los cálculos que otros paquetes, aunque los obtienen, no los muestran y quedan como cajas negras para los estudiantes de Estadística.

Debido a la diversidad de elementos que se pretenden construir en un ambiente de visualización selectiva, al final se presentarán alternativas de exploración de este recurso en el aula de Estadística para el docente.

2. Método de los Mínimos Cuadrados: Modelo y Experimento

La construcción de los segmentos $Y_{cal} - Y_{obs}$, para los distintos datos obtenidos y el modelo es fundamental para cuantificar la discrepancia entre el modelo y los datos experimentales (ver Figura 2). Desde luego, esto se realiza una vez seleccionado a priori el modelo de acuerdo con la forma de nube de datos que se haya identificado.

La discrepancia entre el modelo y los datos experimentales hará patente que un modelo es más adecuado cuando su discrepancia sea más pequeña respecto a la nube de datos. Este punto puede interpretarse de varias formas. En este trabajo, se busca hacer lo más pequeño posible el total de la suma de los cuadrados de las distancias entre los valores dependientes observados y los calculados para los valores independientes que se recolectan en el conjunto de datos. Es decir, la propuesta de modelos se realiza usando el método de los mínimos

³Línea de tiempo sobre el avance del coronavirus. Enlace: <https://www.youtube.com/watch?app=desktop&v=X31Z2ycbatk&t=286s>.

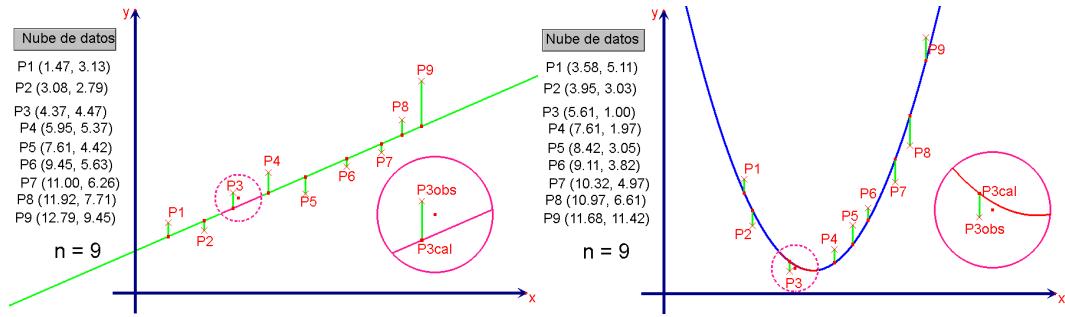


Figura 2: La construcción clave: el segmento $Y_{ical} - Y_{iobs}$. Modelo lineal (izquierda), modelo cuadrático (derecha). (*Fuente: creación propia, captura de pantalla de la interfaz de Cabri*)

cuadrados.

En el entorno Cabri se puede enfatizar la visualización mediante sus distintas herramientas, en particular, la herramienta “Aspecto” nos auxilia a tomar convenciones muy útiles en el aula. Esto se añade a la capacidad de arrastre de la Geometría Interactiva de Cabri que aporta un extraordinario dinamismo en los conceptos de estadística y la comparte con otros ambientes de geometría dinámica. Así se observan las variaciones de los estadísticos construidos, ya sea desde el arrastre de un punto (Pino y Estepa, 2019), hasta el cambio del cúmulo completo de datos. Por ejemplo, se puede hacer una distinción clara entre los datos experimentales y las estimaciones que genera el modelo, dando dos aspectos diferentes a los puntos marcados en el plano (ver Figura 3). Cabri ofrece varias opciones para personalizar la apariencia de los puntos.

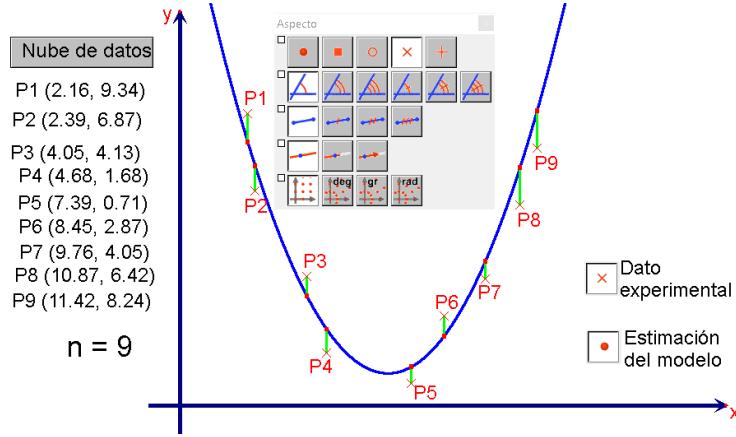


Figura 3: Una convención posible: datos experimentales y los cálculos estimados del modelo. Visualización con la herramienta Aspecto de Cabri. (*Fuente: creación propia, captura de pantalla de la interfaz de Cabri*)

En el aula, resulta muy conveniente observar cómo una suma asociada a la construcción de estos segmentos contribuye a generar una respuesta numérica y geométrica, que puede explorarse empíricamente en primer lugar. De ahí se partirá para justificar la solución óptima

(explorando una suma de diferencias que no se anule, como es el caso de la suma de los cuadrados de las diferencias). Este enfoque visual es importante para juzgar qué tan bueno es un modelo respecto a otro.

Aquí se trabaja entonces con la suma de los cuadrados de las diferencias y en seguida, con la raíz cuadrada del cociente entre dicha suma y el número de datos recabados. Es decir, se construye una media de las desviaciones de los datos (Martins et al., 2014). Con la Geometría Interactiva de Cabri será posible visualizar y comparar simultáneamente varios modelos, como el lineal y el cuadrático, que son el propósito del presente trabajo.

La construcción geométrica de éste parámetro estadístico en la Geometría Interactiva de Cabri es muy provechosa en el contexto general de la enseñanza y aprendizaje de la estadística, similarmente a lo propuesto para visualizar la varianza con otros recursos (Pino y Estepa, 2019), pues introduce nociones dinámicas sobre la bondad de ajuste, que serán clave para hacer visibles varias propiedades del fenómeno en estudio (linealidad, crecimiento, periodicidad, amplitud, fase). En la parte final, los deslizadores asociados a los coeficientes de correlación y de determinación de cada modelo particular permitirán evaluar las estimaciones hechas por los estudiantes.

3. Regresión lineal

Si el cúmulo de datos se agrupa muy cerca de una recta (o informalmente, tiene forma como de una salchicha), se puede postular que el fenómeno se ajusta aproximadamente al modelo lineal. En casos especiales, también hay cúmulos de datos que, bajo una transformación adecuada son susceptibles a modelarse con modelos lineales.

Para explorar el ajuste del modelo lineal $y = Ax + B$, dado un conjunto de datos representados, se construye en Cabri una recta arbitraria con origen en un punto libre y cuya pendiente sea también arbitraria, esto es, que permita su manipulación directa. El propósito de construir dicha recta es ofrecer un acercamiento heurístico de la regresión lineal, donde los cálculos numéricos no nos dificulten observar las propiedades geométricas del dispositivo que se habilitará aquí.

Del conocimiento de funciones, se sabe que el modelo $y = Ax + B$ queda completamente definido cuando se identifica la pendiente A y la ordenada al origen B de dicha función. Existen varios estudios que señalan las dificultades tempranas en el aprendizaje de la función afín (Chavez, 2018; Morales et al., 2017). Además, también se ha observado que la Geometría Interactiva permite generar propuestas de enseñanza con logros educativos importantes al abordarlas mediante variación de parámetros (Cervantes et al., 2012). Entonces, como una extensión natural de este enfoque se presenta al modelo lineal con Geometría Interactiva como una alternativa al método de mínimos cuadrados. En primer lugar, se describe cómo es el método geométrico y en seguida cómo se corrobora con lo obtenido por el método de mínimos cuadrados.

3.1. Visualización de la bondad del ajuste.

Para explorar las propiedades de la regresión lineal, es necesario tomar la ecuación de la recta arbitraria. Las herramientas *Calculadora*, *Ecuación* y *coordenadas* de Cabri ofrecen estas posibilidades para implementarla en la construcción.

Después se construye una recta paralela al eje de las ordenadas que pase por un punto experi-

mental que representa el i -ésimo dato observado; en él, se construye el segmento $Y_{ical} - Y_{iobs}$, donde Y_{ical} es el punto de intersección entre la paralela al eje de las ordenadas con la recta arbitraria (nuestro modelo lineal); el punto Y_{iobs} corresponde al i -ésimo punto experimental; esta construcción se repetirá para todos los puntos experimentales (ver Figura 2, para $i = 3$). Se aclara que, por la verticalidad de dichos segmentos, en las figuras se ha escrito $P_{ical} - P_{iobs}$ en lugar de $Y_{ical} - Y_{iobs}$, donde el subíndice i nos indica el número de dato, cal que indica que el valor es calculado vía el modelo propuesto y obs que es el observado experimentalmente. Se hace de esta forma para aprovechar el dinamismo que tiene Cabri, el cual exhibe la interacción de una manera rápida, mostrando cambios que corresponden a una gran cantidad de situaciones posibles.

Este proceso se replica para cada uno de los N datos experimentales, con el objetivo de calcular los cuadrados de las $Y_{ical} - Y_{iobs}$, para cada uno de los puntos experimentales P_i y después efectuar la suma de todos ellos. Este número sirve para tener una representación de qué tan bueno es el ajuste. Se puede entonces dividir entre el número de datos, sacar la raíz cuadrada de dicho resultado, y después crear una circunferencia que tenga ese valor de radio, con centro arbitrario (es una circunferencia cuyo radio es la media de la dispersión de datos). A pesar de la redundancia, la construcción aumenta la percepción de cambio numérico con una visualización geométrica del área de la circunferencia trazada, facilitando su exhibición ante los estudiantes y el control de la minimización de la suma de los cuadrados de las diferencias mencionadas (ver Figura 4).

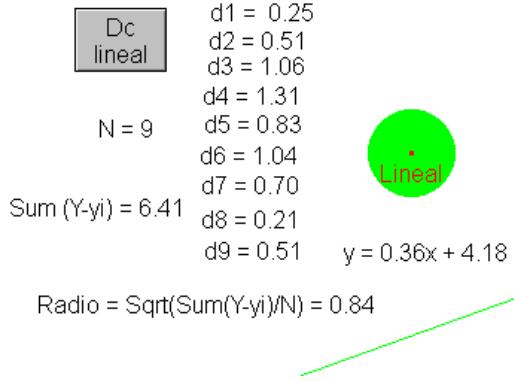


Figura 4: Circunferencia para visualizar la bondad del ajuste. (*Fuente: creación propia, captura de pantalla de la interfase de Cabri*).

Una de las virtudes de la Geometría Interactiva de Cabri es su facultad de arrastre de los puntos en el plano. Para comenzar la búsqueda de la recta de regresión, se barre el plano con una recta que mantenga invariable su pendiente; así pues, se busca en todo el plano la recta que, con pendiente arbitraria constante, hace mínima la media de las dispersiones de los datos. Es decir, se hace mínimo el radio de la circunferencia visualizada.

3.2. Búsqueda de un punto de la recta de regresión.

Al explorar la construcción arrastrando el punto de origen de la recta arbitraria, se observa como la circunferencia cambia de radio. Al manipular así la recta, se ve que hay una posición en la cual la circunferencia tendrá menor radio.

Si imaginamos cada uno de los puntos de la nube como masas puntuales dispersas por el plano, un punto que debería ser parte de la recta que se ha encontrado empíricamente

es (x_{prom}, y_{prom}) , punto correspondiente al centro de masa de la nube, en el que podría concentrarse la masa total del cúmulo de puntos, manteniendo su equilibrio (Figura 5). Donde sabemos que:

$$x_{prom} = \bar{X} = \frac{\sum x_i}{n}; \quad y_{prom} = \bar{Y} = \frac{\sum y_i}{n}.$$

Si todos los puntos de la nube se concentraran en él, la media de la dispersión sería nula. En este ambiente de Geometría Interactiva se puede lograr entonces ofrecer la visualización de este concepto (Martins et al.; 2014).

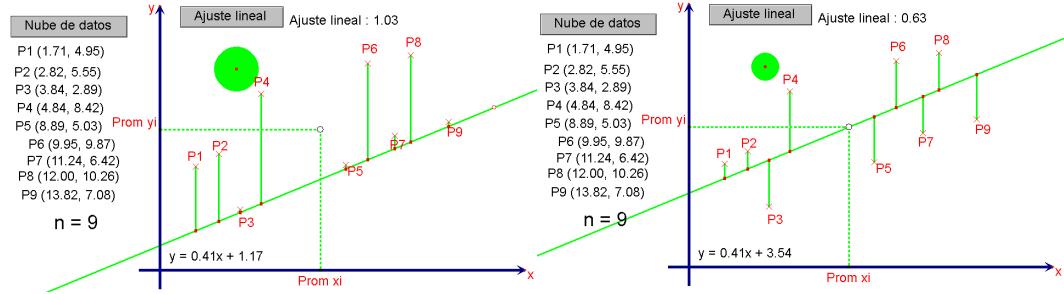


Figura 5: Rectas de pendiente constante. Recta que no pasa por $(prx_i, pry_i) = (x_{prom}, y_{prom})$ (izquierda) y recta que si lo hace (derecha). Obsérvese cómo decrece la dispersión al pasar por el punto mencionado. (Fuente: creación propia, captura de pantalla de la interfase de Cabri).

3.3. Pendiente y ordenada al origen.

Después, oscilando la inclinación de la recta alrededor de dicho punto, se puede ajustar para hacer aún más pequeña la circunferencia. Ahora girando la recta, se observa que aún es posible mejorar el ajuste. Al adjuntar la ecuación de la recta con la herramienta “Ecuación y coordenadas” de Cabri puede observarse el cambio gradual de la dispersión hasta minimizarlo y encontrar la recta de regresión buscada.

En Cabri, con el comando “Botón ocultar/mostrar” es posible seleccionar la recta, los segmentos $Y_{cal} - Y_{obs}$ de este modelo así como los cálculos intermedios, dejando visibles tan sólo los ejes y el conjunto de datos observados. El botón así creado agrupará los elementos necesarios para la exploración de la regresión lineal, lo que permite al docente proponer un esquema de estimación de la dispersión de un cúmulo de datos a sus estudiantes, ejercicio que puede verificarse restituyendo / restringiendo la visualización con dicho botón.

3.4. Método de los mínimos cuadrados: fórmulas de la regresión lineal.

La función a optimizar (minimizar, en este caso) es:

$$F(A, B) = \sum (Ax_i + B - y_i)^2.$$

Para ello, se pretende que

$$\nabla F(A, B) = \vec{0} \implies \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial A} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial B} = 0 \end{cases}$$

Lo que lleva a resolver el sistema:

$$\begin{cases} A \sum x_i^2 + B \sum x_i = \sum x_i y_i \\ A \sum x_i + B n = \sum y_i \end{cases}$$

La solución de este sistema puede encontrarse, por ejemplo, por la regla de Cramer y es:

$$A = m = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}; \quad B = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}.$$

O bien pueden reescribirse como:

$$A = \frac{\sum x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum x_i^2 - n \bar{x}^2}; \quad B = \bar{y} - A \bar{x}.$$

Estos valores se pueden usar para comparar con los valores obtenidos por la exploración geométrica.

4. Regresión cuadrática

Para darle interactividad al ambiente en el modelo cuadrático, Cabri permite también explorar dinámicamente los significados de los parámetros del modelo mediante deslizadores, una construcción muy conocida. Los tres deslizadores construidos permitirán variar el modelo (ver Figura 6).

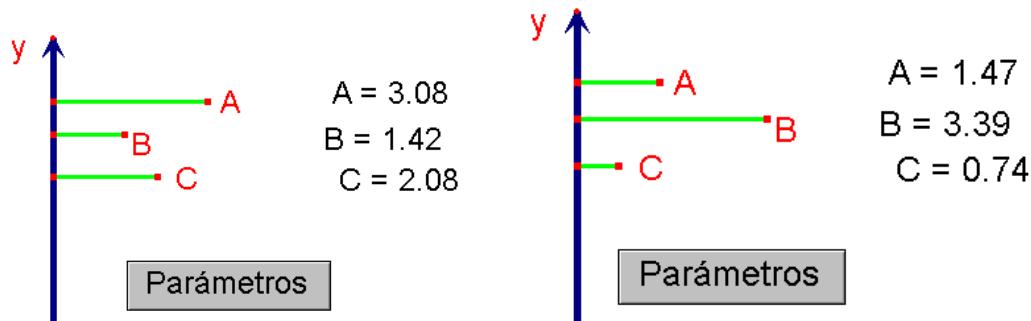


Figura 6: Modelo cuadrático. Deslizadores y Coeficientes del modelo $y = Ax^2 + Bx + C$. De izquierda hacia derecha, el deslizador A decrece, el deslizador B crece y el deslizador C decrece. (Fuente: creación propia, captura de pantalla de la interfase de Cabri).

Debemos crear ahora la función correspondiente, combinando las herramientas “Expresión” y “Ecuación y coordenadas”, así como “Aplicar una Expresión” sobre los ejes coordenados.

Con la herramienta “Expresión”, se escribe “ $A * x^2 + B * x + C$ ”. Ahora se toma un punto sobre el eje x , se obtienen sus coordenadas con la herramienta “Ecuación y coordenadas” (también, editando con la herramienta Texto, se puede omitir la segunda coordenada, que siempre sería 0).

Ahora se toma la herramienta “Aplicar una expresión”, dando clic sobre “ $A*x^2+B*x+C$ ”, y después dando clic en cada uno de los valores numéricos que representan A, B, C, x . El resultado de dicha acción será el valor numérico que corresponde a la variable dependiente en el modelo cuadrático. El lugar geométrico del punto (x, y) cuando x se desplaza por todo el eje de las abscisas generará la gráfica del modelo cuadrático en estudio (Figura 7). Se tiene un nuevo modelo, al que se le adjuntará una circunferencia que muestre su bondad de ajuste.

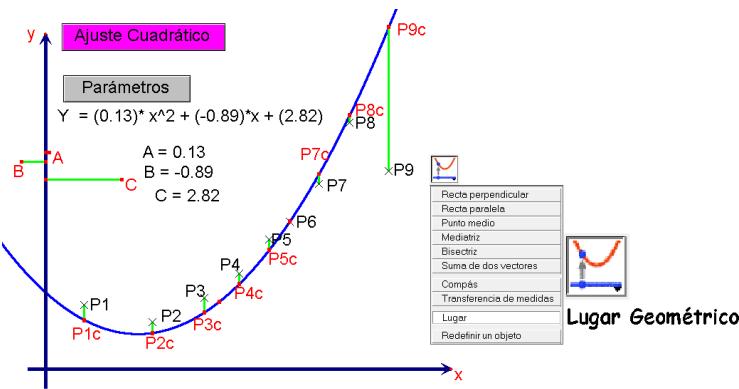


Figura 7: Trazo con lugar geométrico del modelo cuadrático. (*Fuente: creación propia, captura de pantalla de la interfase de Cabri*).

4.1. Elementos de exploración geométrica de la bondad de ajuste cuadrática

Similarmente al caso del modelo lineal, para explorar el ajuste en el modelo cuadrático se realiza para cada dato la construcción de los segmentos correspondientes $Y_{ical} - Y_{iobs}$, se calculan sus cuadrados, después su suma y finalmente se crea la circunferencia cuyo radio sea la raíz cuadrada de la suma dividida entre el número de datos.

Al seleccionar los elementos que hemos creado hasta aquí en otro botón de ocultar o mostrar, se permitirá al docente una mayor flexibilidad en el aula y dar una visualización dirigida de sus diferentes elementos (nube de puntos, curva de ajuste, cálculos numéricos parciales, coeficientes del ajuste, entre otras agrupaciones posibles).

Es notorio que estas tareas pueden simplificarse en Cabri utilizando la herramienta de Macros (ver Figura 8), una actividad que enseña mucho al estudiante, pues debe saber qué elementos ha de seleccionar como objetos iniciales (los puntos del modelo, los ejes, la expresión algebraica del modelo, los deslizadores correspondientes y un punto libre como centro para una circunferencia que permita visualizar la bondad del ajuste) y también qué elementos serán objetos finales (la suma de cuadrados de los segmentos correspondientes $Y_{ical} - Y_{iobs}$, y la circunferencia asociada a dicha dispersión acumulada).

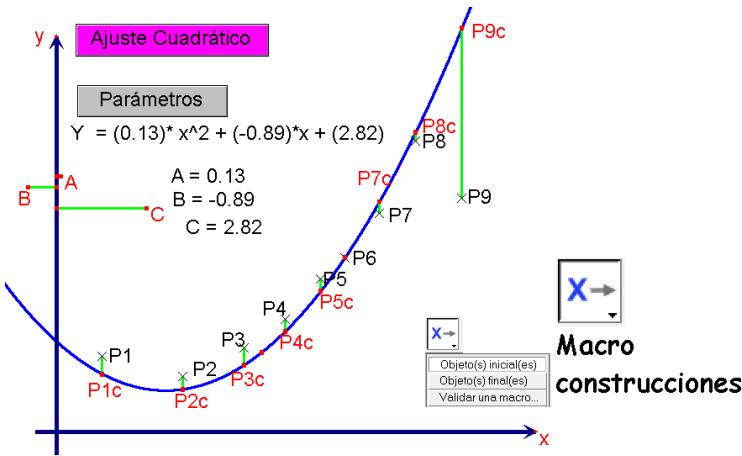


Figura 8: Herramientas para Macros en Cabri y los modelos lineal y cuadrático. (*Fuente: creación propia, captura de pantalla de la interfase de Cabri*).

Es importante que en el aula se pueda explorar el fenómeno de muy diversas formas. Por ejemplo, con una variación en la forma del cúmulo de datos (como en el caso de la Figura 9, donde se han desplazado algunos puntos): si ninguno de los puntos de la nube de puntos está sobre las curvas, se puede contrastar si el cúmulo de datos es más cercano a un modelo lineal que a uno cuadrático. Los círculos con radio mayor nos indican el modelo que se encuentra más alejado de la nube de datos (ver Figura 9).

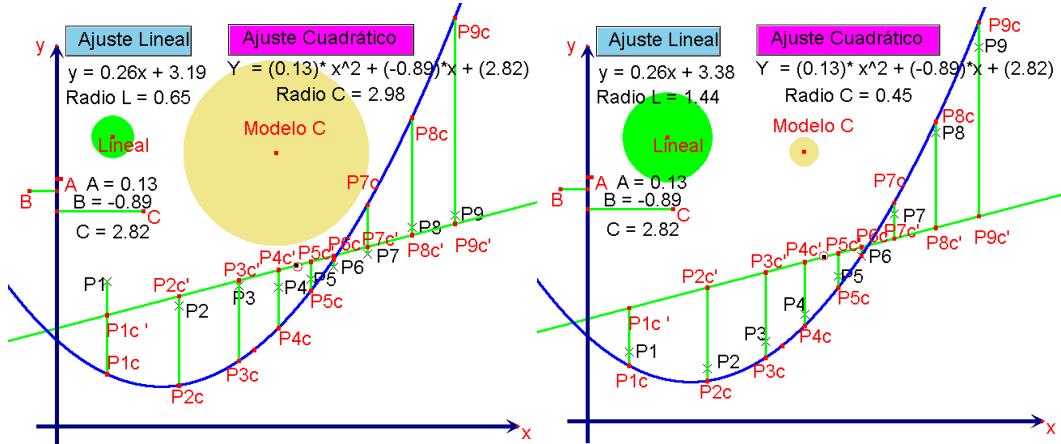


Figura 9: Bondad de ajuste en las regresiones lineal y cuadrática. Mejor ajuste del modelo cuadrático, a la izquierda, y del modelo lineal, a la derecha. (*Fuente: creación propia, captura de pantalla de la interfase de Cabri*).

Otra exploración posible debido a la versatilidad de Cabri, es observar el cambio en la bondad de ajuste manteniendo la misma nube de puntos salvo que ahora se deslizan verticalmente tres puntos P_1 , P_2 y P_9 , con lo que se puede observar que el mejor ajuste pasa de un modelo lineal a un modelo cuadrático y viceversa (ver Figura 9).

Regresando a la optimización del modelo de regresión cuadrática, se analizan ahora las fórmulas de los parámetros que minimizan la función de mínimos cuadrados correspondiente.

4.2. Método de los mínimos cuadrados: regresión cuadrática.

Aplicando el método de mínimos cuadrados al modelo $y = Ax^2 + Bx + C$, los coeficientes de la regresión cuadrática, a saber A, B, C , pueden obtenerse del planteamiento del siguiente problema de optimización en 3 variables sin restricciones.

Dado un conjunto de N datos experimentales (x_i, y_{iobs}) , $i = 1, 2, 3, \dots, N$, se desea encontrar una función $f(A, B, C) = Ax^2 + Bx + C$ tal que se minimice la cantidad:

$$S(A, B, C) = \sum (y_{ical} - y_{iobs})^2, \text{ con } (y_{ical}) = Ax_i^2 + Bx_i + C.$$

De aquí se reescribe la función $S(A, B, C)$ de la siguiente forma:

$$S(A, B, C) = \sum (y_{ical} - y_{iobs})^2 = \sum (Ax_i^2 + Bx_i + C - y_{iobs})^2.$$

Para minimizar la función, igualamos su gradiente al vector nulo, vector de tres componentes:

$$\nabla S = \bar{0} \implies \frac{\partial S}{\partial A} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial B} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial C} = 0.$$

Se llega al siguiente sistema de 3 ecuaciones sobre los coeficientes desconocidos A, B, C :

$$\begin{cases} A \sum x_i^4 + B \sum x_i^3 + C \sum x_i^2 = \sum x_i^2 y_i \\ A \sum x_i^3 + B \sum x_i^2 + C \sum x_i = \sum x_i y_i \\ A \sum x_i^2 + B \sum x_i + Cn = \sum y_i \end{cases}$$

Por medio de la regla de Cramer, se llega a la solución de dicho sistema. Las siguientes fórmulas permiten obtener los 3 coeficientes buscados para el modelo cuadrático:

$$\begin{aligned} \Delta &= n \left| \begin{array}{cc} \sum x_i^4 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^3 & \sum x_i^2 \end{array} \right| - \sum x_i \left| \begin{array}{cc} \sum x_i^4 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i \end{array} \right| + \sum x_i^2 \left| \begin{array}{cc} \sum x_i^3 & \sum x_i^2 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i \end{array} \right| \\ \Delta_A &= n \left| \begin{array}{cc} \sum x_i^2 y_i & \sum x_i^3 \\ \sum x_i y_i & \sum x_i^2 \end{array} \right| - \sum x_i \left| \begin{array}{cc} \sum x_i^2 y_i & \sum x_i^3 \\ \sum y_i & \sum x_i \end{array} \right| + \sum x_i^2 \left| \begin{array}{cc} \sum x_i y_i & \sum x_i^2 \\ \sum y_i & \sum x_i \end{array} \right| \\ \Delta_B &= n \left| \begin{array}{cc} \sum x_i^4 & \sum x_i^2 y_i \\ \sum x_i^3 & \sum x_i y_i \end{array} \right| - \sum x_i \left| \begin{array}{cc} \sum x_i^4 & \sum x_i^2 y_i \\ \sum x_i^2 & \sum y_i \end{array} \right| + \sum x_i^2 \left| \begin{array}{cc} \sum x_i^3 & \sum x_i y_i \\ \sum x_i^2 & \sum y_i \end{array} \right| \\ \Delta_C &= \sum y_i \left| \begin{array}{cc} \sum x_i^4 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^3 & \sum x_i^2 \end{array} \right| - \sum x_i y_i \left| \begin{array}{cc} \sum x_i^4 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i \end{array} \right| + \sum x_i^2 y_i \left| \begin{array}{cc} \sum x_i^3 & \sum x_i^2 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i \end{array} \right| \end{aligned}$$

Es decir:

$$A = \frac{\Delta_A}{\Delta}; \quad B = \frac{\Delta_B}{\Delta}; \quad C = \frac{\Delta_C}{\Delta}.$$

Se observa aquí que las fórmulas obtenidas no son tan inmediatas como aquellas del modelo lineal. El problema frecuentemente se presenta como un ejercicio de aplicación y sin resolución explícita en los textos de Cálculo de Varias Variables y de Análisis Matemático. Al buscar este problema en la red, se señala también que es soluble, pero se omiten frecuentemente las fórmulas que lo resuelven.

El comando Calculadora de Cabri permite obtener los cocientes respectivos (ver Figura 10). La construcción puede explorarse libremente antes de dejarse llevar por los valores óptimos fijos de los cálculos numéricos. Los cálculos intermedios pueden ocultarse, dejando visible únicamente los cálculos finales del ajuste cuadrático.

N = 9	P1 (3,21; 5,63)	P2 (4,34; 5,84)	P3 (5,45; 6,00)	P4 (6,74; 5,13)	P5 (8,03; 4,63)
	P6 (9,00; 4,05)	P7 (10,05; 5,21)	P8 (11,79; 5,87)	P9 (12,92; 6,18)	
sum xi =	71,53				
xi^2 =	656,64				
xi^3 =	6.640,15				
xi^4 =	71.517,60				
sum yi =	48,55				(ajuste) C = 8,47
xi * yi =	385,82				(ajuste) A = 0,06
i^2 * yi =	3.580,46				(ajuste) B = -0,90
Det Sis =	552.173,31				Det A = 30.758,45
					Det B = -496.043,35
					Det C = 4.676.923,78

Figura 10: Herramienta Calculadora y cálculos intermedios para obtener los coeficientes del ajuste en el modelo cuadrático según el Método de Mínimos Cuadrados. Pueden verse $\sum x_i^2$, Δ y parámetros A, B, C . (Fuente: creación propia, captura de pantalla de la interfase de Cabri).

Una vez realizados los cálculos, en Cabri es posible agrupar los nuevos cálculos, creando un botón para mostrar u ocultar cálculos intermedios, otro para los valores de los coeficientes A, B, C del ajuste por mínimos cuadrados y la circunferencia de dispersión respectiva (ver Figura 11).

En Geometría Dinámica y en particular con Cabri se privilegia la visualización; por ello se busca que los menús, los comandos o los cálculos no oculten el fenómeno educativo que se recrea en la pantalla. Y también se debe mencionar que la agrupación de los elementos no tiene carácter definitivo, esto es, se puede redefinir si así conviene a los propósitos pedagógicos o de investigación que se tengan, lo que distingue a Cabri de otros paquetes de cómputo.

Además, se puede elegir qué objetos se desean mostrar para no sobrecargar el acto de visualización de los estudiantes; es decir, Cabri permite promover una visualización selectiva de objetos. En la enseñanza de la Estadística es deseable cuidar que los cálculos numéricos no oscurezcan los conceptos que deseamos presentar al estudiante, para enfocarse a la exploración de los modelos y al descubrimiento de propiedades. Así, el profesor puede seleccionar mostrar las variaciones geométricas sin mostrar los cálculos para impulsar la estimación numérica, o permitir ambas para ganar interconexión entre ambos registros.

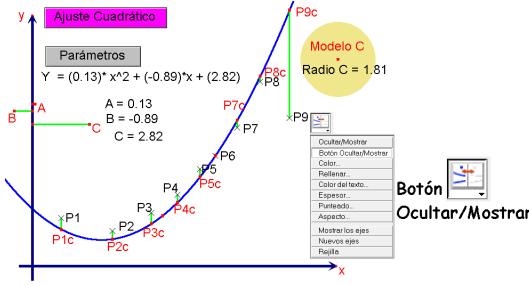


Figura 11: Herramienta Botón Ocultar/Mostrar como herramienta para el agrupamiento de objetos y cálculos con el propósito de una visualización selectiva. (*Fuente: creación propia, captura de pantalla de la interfase de Cabri*).

4.3. Exploración del modelo cuadrático.

El modelo cuadrático puede ser explorado aisladamente ocultando el modelo lineal construido anteriormente sobre el mismo cúmulo de datos. Un objetivo posible de exploración es poner en evidencia la sensibilidad de la dispersión al modificar los coeficientes A, B, C del modelo mediante el desplazamiento de sus deslizadores (ver Figura 12).

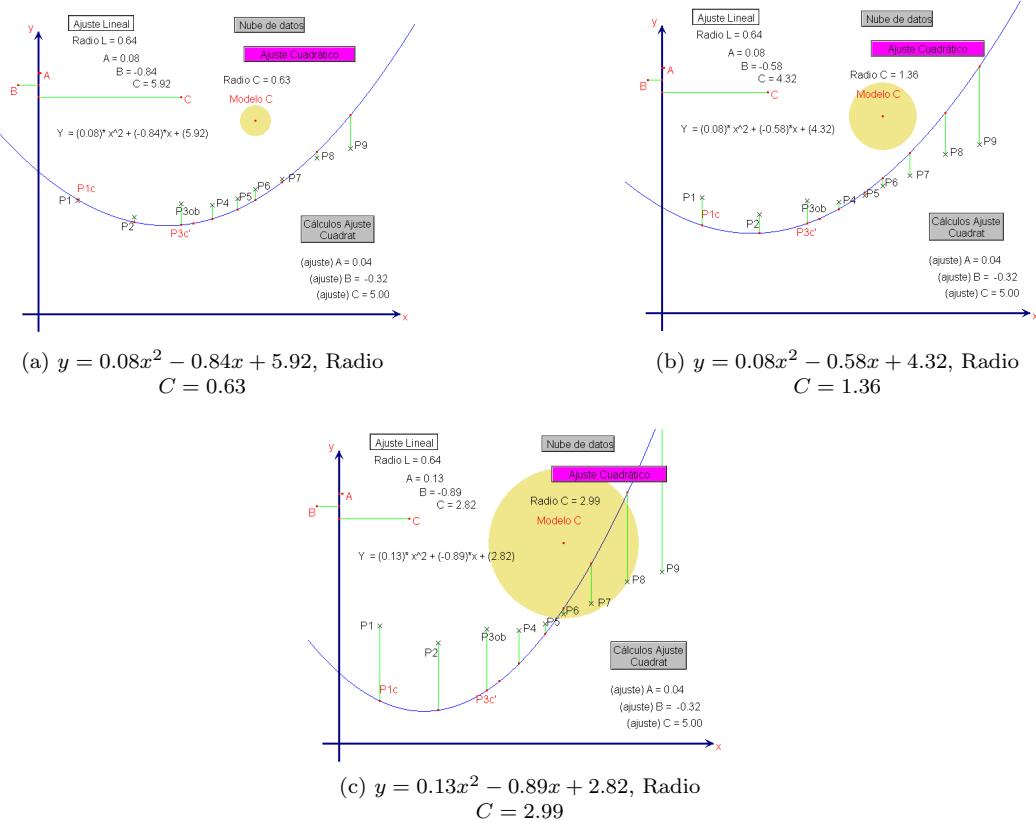


Figura 12: Modelo cuadrático ante la variación de los coeficientes A, B y C . (*Fuente: creación propia, captura de pantalla de la interfase de Cabri*).

4.4. Exploraciones de los modelos lineal y cuadrático.

Cabri permite explorar la bondad de ajuste de otra forma con un cúmulo de datos dinámico. Por ejemplo, una exploración dinámica de la nube de puntos permite exhibir la sensibilidad de ambos modelos ante el desplazamiento vertical de un dato (en nuestro ejemplo, el último dato, (ver Figura 13)). Todo puede explorarse libremente antes de contar con fórmulas para optimizar los coeficientes de los modelos propuestos, y obtener empíricamente dichos parámetros gracias a la geometría dinámica de Cabri.

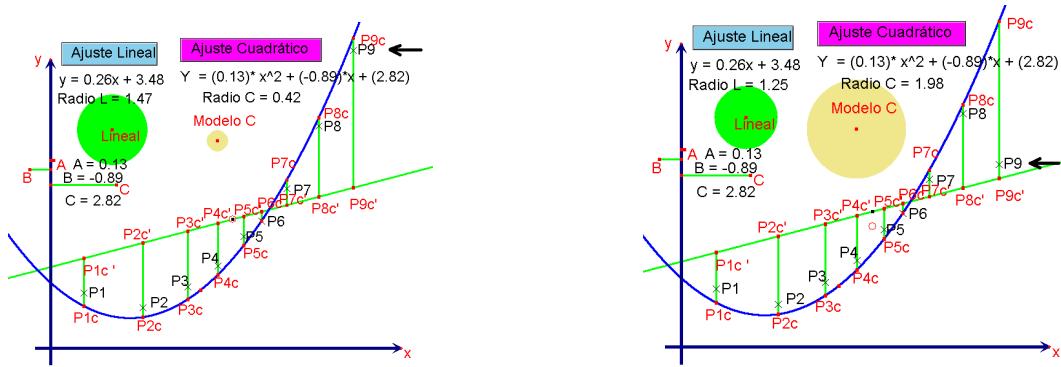


Figura 13: Bondad de ajuste bajo la variación vertical del dato P9, indicado por la flecha. A la izquierda, mejor ajuste del modelo cuadrático; a la derecha, el modelo lineal. (*Fuente: creación propia, captura de pantalla de la interfase de Cabri*).

5. Bondad de ajuste y coeficientes de correlación y de determinación

Para modelos más generales, un estadístico para medir el grado de dependencia de un modelo es el coeficiente de determinación que establece el grado de dependencia entre la variable dependiente con la independiente de acuerdo con el modelo propuesto, sea lineal, cuadrático o de otro tipo. Se define con la siguiente expresión:

$$R^2 = \frac{\sum(Y_{obs} - \bar{Y})^2}{\sum(Y_{ical} - \bar{Y})^2}.$$

El coeficiente de determinación se mueve en el intervalo de 0 a 1. Mientras más cerca de 1 se encuentre, el modelo se ajusta mejor a los datos; cuando se acerca a 0, el modelo propuesto se aleja más de ofrecer una buena explicación al fenómeno.

Para desarrollarlo en el ambiente Cabri, debemos generar cada uno de los Y_{ical} , así como \bar{Y} , para calcular las diferencias $Y_{ical} - \bar{Y}$, $Y_{obs} - \bar{Y}$, así como sus cuadrados. El valor Y_{ical} debe generarse con el modelo propuesto. En la construcción que hemos desarrollado para el modelo cuadrático, ya están calculados con $\sum y_i$, además del promedio $\bar{Y} = \frac{\sum y_i}{n}$.

Combinamos entonces las herramientas de “Aplicar una expresión” y “Calculadora” para

obtener los valores que hemos mencionado (ver Figura 14). Se incluye su representación geométrica para observar donde se ubica respecto al intervalo $[0, 1]$:

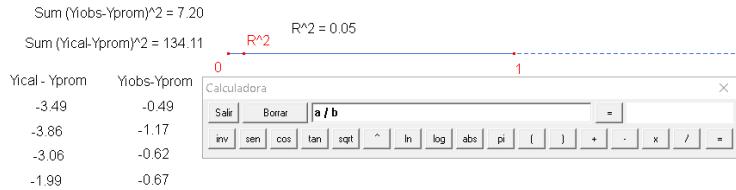


Figura 14: Cálculo del coeficiente de determinación y su visualización en un intervalo de números reales. Cálculo de $\sum(Y_{obs} - \bar{Y})^2$, $\sum(Y_{ical} - \bar{Y})^2$ y el cociente R^2 representado en el intervalo numérico $[0, 1]$. (Fuente: creación propia, captura de pantalla de la interfase de Cabri).

En el caso especial del modelo lineal, el coeficiente de correlación y el coeficiente de determinación se relacionan de la siguiente forma:

$$r_{xy}^2 = R^2$$

El coeficiente de correlación lineal es un estadístico que nos ofrece un parámetro numérico para saber si la dependencia lineal es creciente o decreciente si el valor se acerca a 1 o -1 , respectivamente. Se calcula con la siguiente fórmula:

$$r_{xy} = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\sqrt{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \sqrt{n \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2}}.$$

Si el valor se acerca a 0, el modelo lineal queda en duda. Su visualización se ha trabajado en otros ambientes de Geometría Interactiva también, incluso se practica estimarlos a través de observar la nube de puntos (Queiroz, 2020). Esto, desde luego, puede construirse también en Cabri, combinando las herramientas “Calculadora” y “Transferencia de medidas” para generar un punto deslizante en el intervalo $[-1, 1]$ que permite visualizar la relación entre la nube de datos y el coeficiente de correlación lineal (ver Figura 15). Mediante el botón de “Ocultar/Mostrar” es posible crear un ambiente donde se trabaje la estimación a través de un conjunto de puntos, incluso seleccionando no sólo el coeficiente de correlación sino los valores de ajuste de los modelos, la dispersión de datos, etc. En la construcción realizada, usando el comando “Calculadora” se puede obtener el coeficiente de correlación lineal. Para ello se requiere obtener también otros cálculos intermedios.

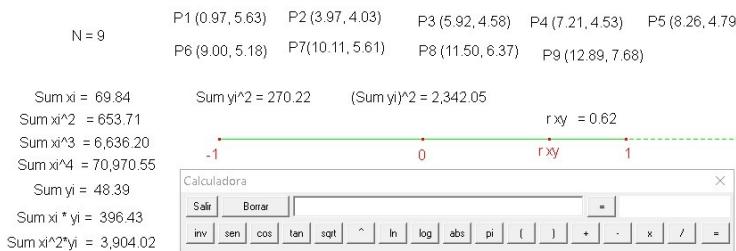


Figura 15: Herramienta Calculadora y cálculo del coeficiente de correlación lineal. Visualización de r_{xy} en el intervalo $[-1, 1]$. (Fuente: creación propia, captura de pantalla de la interfase de Cabri).

En este punto, el ambiente también puede usarse para ofrecer al profesor en la clase o al estudiante un recurso para practicar una visualización asociada entre la forma del cúmulo de datos con los coeficientes de correlación y de determinación, previo a efectuar una evaluación con caja negra de esta destreza (Queiroz, 2020). Además, se busca que la construcción pueda ser reproducible por los docentes en las aulas de Estadística, dando oportunidad a una comprensión profunda de los conceptos inmersos en ella, para después buscar adquirir una destreza global de asociación entre cúmulos de datos con los coeficientes estadísticos mencionados.

Justo para complementar o crear alternativas en la comunicación de los resultados estadísticos se pueden hacer diversas representaciones gráficas. En el ambiente de Cabri se le ofrece al usuario también la posibilidad de construir dispositivos de funcionalidad similar a la de los termómetros, tacómetros, voltímetros, globos de presión (ver Figura 16), entre otros, que permiten una visualización de la metrología de distintos estadísticos en *tiempo real* con Cabri, reaccionando a la variación de la nube de datos.

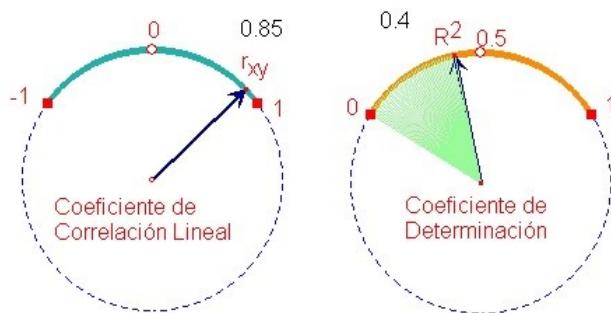


Figura 16: Representación de los coeficientes de correlación y de determinación a manera de agujas en velocímetros. (*Fuente: creación propia, captura de pantalla de la interface de Cabri*).

La exploración de los modelos lineales y cuadráticos cuentan entonces con, al menos, dos formas de valorar su ajuste al cúmulo de datos: las circunferencias que visualizan la dispersión y los deslizadores en que se representan los coeficientes de correlación y determinación. Con ello, existen dos alternativas en el aula para verificar la bondad del ajuste de los modelos.

6. Resultado: Un ambiente estadístico de Enseñanza, Aprendizaje y Evaluación.

Se recopilan aquí algunas formas en las que el profesor puede usar el recurso construido (ver Figura 17) para el trabajo en el aula de estadística. Es muy conveniente almacenar una copia de la construcción e iniciar desde alguna forma específica de nube de datos, realizando las exploraciones de los resultados estadísticos en el aula. La siguiente lista de tareas no es exhaustiva.

- Variar la graduación del eje y. Llamar la atención al efecto visual de la nube de puntos.
- Trasladar el origen de coordenadas. Rotar los ejes alrededor del origen. Observar que la nube de datos se mantiene sin cambio.

- Cambiar la forma de la nube de datos (puntos separados). Analizar los efectos en los ajustes de los modelos.
- Desplazar los puntos de la nube provocando superposición entre algunos de ellos. Reflexionar sobre datos con frecuencias.
- Variar sólo un punto en la nube de datos hacia arriba y hacia abajo. Ver el efecto en las dispersiones de los modelos.
- En el modelo cuadrático, hacer $A = 0$ (o “cercano” a ese valor). Los modelos construidos deben ofrecer conclusiones idénticas.
- Cambiar la forma algebraica del modelo cuadrático por otra con 3 parámetros. Impulsar la exploración de otros modelos. Un ejemplo linealizable: un modelo de la forma $z = ke^{Au}$ se puede trabajar con el modelo $y = Ax + B$ reemplazando directamente $y = \ln z$, $B = \ln k$, $x = u$, $A = A$. También el modelo $y = A \ln(x) + B$ se transforma en el modelo lineal $y = Az + B$ con la colección de datos transformada $(z_i, y_i) = (\ln x_i, y_i)$.

Para desarrollar las destrezas numéricas en el modelo lineal, usando los botones adecuados de “Ocultar/Mostrar” el profesor puede sugerir las siguientes prácticas a sus alumnos, cambiando cada ocasión la forma de la nube de datos:

- Predecir la pendiente de la recta de regresión.
- Predecir la ordenada al origen de la recta de regresión.
- Desplazar un punto en el intervalo $[-1, 1]$ para predecir el coeficiente de correlación.
- Predecir el radio de la circunferencia de dispersión del modelo lineal.

Similarmente cambiando la estructura de la nube de datos del modelo cuadrático, el docente puede proponer a los alumnos las siguientes tareas de práctica:

- Predecir los valores numéricos de los parámetros en el ajuste.
- Predecir el radio de la circunferencia de dispersión del modelo cuadrático.
- Desplazar un punto en el intervalo $[0, 1]$ para predecir el coeficiente de determinación.

A otro nivel de comprensión se sitúan las tareas de comparación entre dos modelos de regresión que el docente puede proponer a sus estudiantes abordar variando la nube de datos, tareas como las siguientes:

- Decidir cuál modelo (lineal o cuadrático) ajustará mejor la forma de la nube de datos.
- Decidir qué modelo genera una dispersión más grande o más pequeña.
- Decidir qué coeficiente (r_{xy}^2 ó R^2) está más cerca de 1.

Desde luego, el ambiente construido permite al docente ajustar las actividades de exploración y práctica mencionadas como actividades de evaluación y evidencias de la destreza que los estudiantes alcanzan. Otras actividades de evaluación posibles de incorporar en este entorno son, por ejemplo:

- Creación de macros numéricas de cada modelo.
- Creación de macros geométricas relativas a las circunferencias de dispersión.
- Creación de macros numéricas y geométricas referentes a los coeficientes de correlación y determinación, así como para los dispositivos asociados a su metrología estadística.

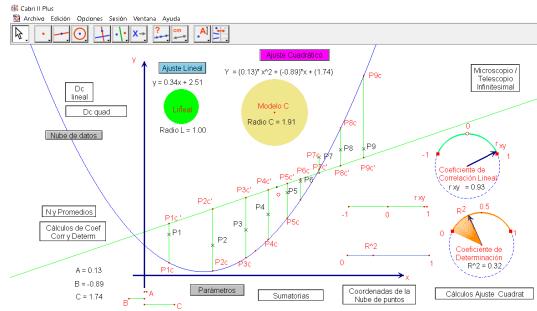


Figura 17: Modelo de Regresión Lineal y Cuadrático en Cabri. Un Ambiente Educativo de Enseñanza, Aprendizaje y Evaluación adaptable con exploración estadística dinámica.
(Fuente: creación propia, captura de pantalla de la interfaz de Cabri).

La Geometría Interactiva de Cabri permite impulsar la reflexión en el aprendizaje de la Estadística: colocando de forma libre los puntos experimentales, al deslizar los datos, pero debe insistirse que se tiene un nuevo ensayo experimental; en su caso, al superponer datos el usuario quiere ponderar los pesos de estos por algún factor en el experimento; al variar la nube de datos hay que explicar lo que sucede a la luz de una réplica experimental posible.

7. Comparación con otros recursos del aula de Estadística.

En esta sección, se reflexiona sobre otros recursos posibles para el aula de estadística como son las calculadoras gráficas con manipulación simbólica y las hojas de cálculo tipo Excel.

Sobre las primeras, se observa que cuentan con herramientas para realizar un stock de modelos de regresión. En la práctica, sin embargo, su desventaja para el aprendizaje es que funcionan como “cajas negras” pues, aunque tienen potentes recursos de graficación, no hay uso explícito de una visualización de la distancia entre datos experimentales y valores estimados por el modelo, no hay circunferencias que acumulen la dispersión de datos (ver Figuras 18 y 19).

Respecto a las hojas electrónicas de cálculo tipo Excel, para los cálculos numéricos entre columnas de datos el proceso es ágil por medio del arrastre de celdas. Pero la introducción manual de datos, junto con la graficación fija, sin Geometría Interactiva, coloca a las hojas de cálculo mejor ante el tratamiento de grandes volúmenes de datos: es tedioso el cambio de la nube de puntos (ver Figura 20).

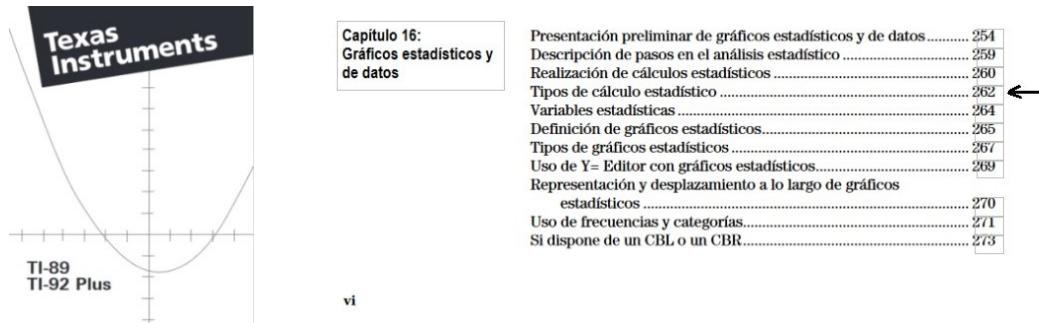


Figura 18: Manual de TI-89, TI-92 plus. Ejemplo del manejo estadístico en las calculadoras.

Calc Type	Descripción
OneVar	Estadísticas de una sola variable — Calcula las variables estadísticas descritas en la página 264.
TwoVar	Estadísticas de dos variables — Calcula las variables estadísticas descritas en la página 264.
CubicReg	Regresión cúbica — Ajusta los datos a un polinomio de tercer grado $y=ax^3+bx^2+cx+d$. Para ello, es preciso contar como mínimo con cuatro puntos. <ul style="list-style-type: none"> • Con cuatro puntos, la ecuación es un ajuste polinómico. • Con cinco o más puntos, es una regresión polinómica.
ExpReg	Regresión exponencial — Ajusta los datos a una ecuación del tipo $y=ab^x$ (donde a es la ordenada en el origen) utilizando el ajuste de mínimos cuadrados y los valores transformados x e $y(x)$.
LinReg	Regresión lineal — Ajusta los datos a una ecuación del tipo $y=ax+b$ (donde a es la pendiente y b la ordenada en el origen) utilizando el ajuste mínimo cuadrático, y e x .
LnReg	Regresión logarítmica — Ajusta los datos a una ecuación del tipo $y=a+b \ln(x)$ utilizando el ajuste de mínimos cuadrados y los valores transformados $\ln(x)$ e y .
Logistic	Regresión logística — Ajusta los datos al modelo $y=a/(1+b \cdot e^{cx})+d$ y actualiza todas las variables estadísticas del sistema.

262 Capítulo 16: Gráficos estadísticos y de datos

Figura 19: Stock de modelos de regresión en las calculadoras TI-89 y TI-92 plus.

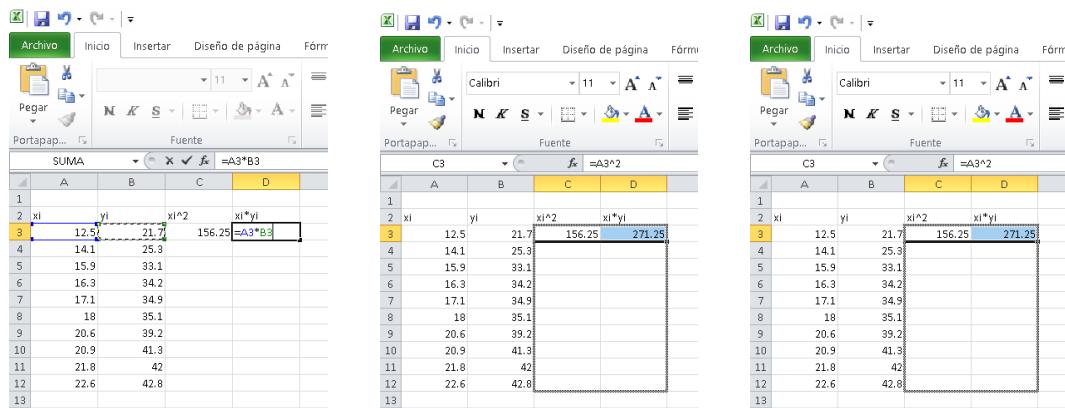


Figura 20: Hoja electrónica Excel. Arrastre de celdas para realizar algunos cálculos estadísticos. (Fuente: creación propia, captura de pantalla de la interfase de Excel).

Desde luego, existen las funciones estadísticas precargadas dentro de la hoja de cálculo, lo que facilita su cómputo, pero se corre el riesgo en el aula de utilizarlas como “cajas negras” si no se han clarificado sus definiciones. Su uso es deseable una vez que se alcanza una comprensión de las funciones, se identifican las abreviaturas usadas por la hoja y cada uno de los cálculos que se realizan con ellas (ver Figura 21).

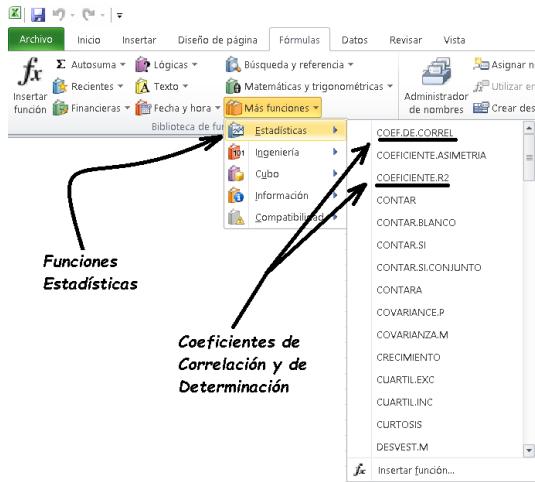


Figura 21: Funciones de cálculo de los coeficientes de correlación y de determinación precargadas en Excel. (*Fuente: creación propia, captura de pantalla de la interfase de Excel*).

8. Conclusiones

Las construcciones geométricas expuestas con Cabri tienen propósitos educativos para las aulas de Estadística. Con los recursos presentados, los modelos estadísticos de regresión lineal y cuadrática se enmarcan en un esquema que busca ofrecer una mejor explicación de un fenómeno a los estudiantes, apoyándonos en la bondad de ajuste. La visualización dato por dato de los segmentos $Y_{cal} - Y_{obs}$, así como una circunferencia cuyo radio varía de acuerdo con la bondad del ajuste es un recurso útil para indicar la sensibilidad del modelo. Para propósitos didácticos (así como de investigación), éste es un recurso educativo que puede ser construido paso a paso en el aula de clase, controlado por el docente directamente o en interacción con el estudiante. O bien puede aprovecharse como un todo ya estructurado por el profesor para fomentar la estimación de parámetros estadísticos. Dicho recurso se une a propuestas educativas que fomentan la visualización y que pueden desarrollarse en el aula de estadística (Lavalle et al., 2006; Martins et al., 2014).

La creación de macros estadísticas con Cabri es un signo tangible de que el usuario ha entendido que objetos son necesarios para mostrar qué tan bueno es el ajuste en un modelo propuesto. Al usar macros, se da de alta en el medio informático lo que el usuario comprende (Díaz Barriga, 2014). Ésta puede ser una tarea educativa concreta para tomar en cuenta al momento de evaluar el aprendizaje del modelaje estadístico.

Cabri contiene herramientas que apoyan una visualización tanto selectiva como global de los modelos de regresión lineal y cuadrática en la pantalla de la computadora. Cuenta con menús y comandos que no entorpecen la visualización de lo que hay en pantalla; con las herramientas de “Aspecto”, “Espesor”, “Color”, “Botón Ocultar/Mostar”, entre otras, se pueden agrupar

objetos, visualizarlos organizada y selectivamente. Así pues, en éste documento se expuso la forma en cómo agrupar las coordenadas del cúmulo de puntos experimentales, los cálculos numéricos para construir la suma de los cuadrados de las diferencias $Y_{ical} - Y_{iobs}$, la recta asociada al modelo lineal, la curva parabólica asociada al modelo cuadrático, los puntos calculados, las sumatorias auxiliares, las circunferencias de dispersión, los coeficientes de correlación y de determinación, entre otros objetos y cálculos.

Como hemos visto las herramientas de Cabri permiten también tomar convenciones pertinentes en el aula de Estadística. Por ello, su uso fomenta un mejor y más interactivo Ambiente de Enseñanza, Aprendizaje y Evaluación para la Estadística.

Anexo

Contribución de las personas autoras:

Conceptualización: JASVM, EDBA
Metodología: EDBA, JASVM
Investigación: JASVM, EDBA
Análisis formal: JASVM, EDBA
Software: EDBA, JASVM
Visualización: JASVM, EDBA
Escritura (borrador original): EDBA, JASVM
Escritura (revisión y edición): JASVM, EDBA

Accesibilidad de datos:

Ofrecemos una copia del archivo Cabri para descargar en el siguiente link: <https://drive.google.com/file/d/1wFIn09uZVMSgMpYU5tlbgCfCTjVvhHBm/view?usp=sharing>

Referencias

- [1] Binotto, R., Petry, V. & Gaio, S. (2022). Estudo de Possibilidades do Uso de Objetos Virtuais de Aprendizagem no Ensino de Cónicas por meio de um Exercício de Imaginação Pedagógica. *Ensino Da Matemática em Debate*, 9(2), 108–129. <https://doi.org/10.23925/2358-4122.2022v9i257628>
- [2] Cavalcante, L. H. V. (2017). *Uma Sequência Didática para o ensino do conceito de Parábola: a Engenharia Didática como apoio metodológico*. [Tesis de Master Profesional en Matemática, Universidad Federal do Amazonas]. Biblioteca Digital de Teses e Dissertações da UFAM. <https://tede.ufam.edu.br/handle/tede/5712>
- [3] Cervantes, A., López, N., Luque, R. & Prieto, J. (2012). Relaciones entre la variación de parámetros y los efectos geométricos en la función afín: una propuesta de análisis con Geogebra. *Actas de la Conferencia Latinoamericana de Geogebra Uruguay 2012* (pp. 511-519). <https://www.geogebra.org.uy/2012/actas/actas.pdf>.
- [4] Chavez, A. (2018). Errores en el aprendizaje de la función afín: un análisis ontosemiótico. *Revista Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 31(2), 1315-1323.
- [5] Díaz Barriga, E. (2014). Mecanismos y curvas mecánicas. En Zabala, L. & Rúa, J. (Eds), *CABRI World & Ibero CABRI*. Sello editorial Universidad de Medellín.
- [6] Lavalle, A. L., Micheli, E. B. & Rubio, N. (2006). Análisis didáctico de regresión y correlación para la enseñanza media. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9(3), pp. 383-406.
- [7] Martins, J. A., Estrada, A. & Nascimento, M. M. (2014). Do you need to see it to believe it? Let's see statistics and geometry dynamically together! *European Journal of Science and Mathematics Education*, 2(1), 39-52.
- [8] Mendes da Silva, C. A. (2020). *Comparação de Testes de Qualidade de Ajustamento para Controlo Estatístico do Processo numa Unidade Industrial da Indústria Automóvel*. [Tesis de Master en Engenharia e Gestão Industrial, Faculdade de Ciências e Tecnología, Universidade Nova de Lisboa]. Repositório da Universidade Nova. <http://hdl.handle.net/10362/110340>
- [9] Morales, L., Rodríguez, C., Mosquera, G. & Navarro, C. (2017). Lotería Gráfico-Algebraica de la Función Lineal y Afín. *Libro de Actas del VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (pp. 90-97). https://cibem.serm.com/images/site/LibroActasCIBEM/ComunicacionesLibroActas_FM.pdf

- [10] Peyrerol, M. & Alves, F. (2021). Cônica Parábola: dificuldades de ensino e aprendizagem. *Braziliam Journal of Development. Curitiva*, 7(7), 71616-71630.
- [11] Pino, J. & Estepa, A. (2019). Análisis de la enseñanza de las medidas de dispersión en libros de texto de educación secundaria. *AIEM - Avances de Investigación en Educación Matemática*, (16), 86–102. <https://doi.org/10.35763/aiem.v0i16.232>
- [12] Queiroz, M. (2020). *Correlação linear e regressão linear simples no conteúdo de Matemática no Ensino Médio*. [Tesis de Master profesional en Matemática, Universidade Federal de Campina Grande]. https://mat.ufcg.edu.br/profmat/wp-content/uploads/sites/5/2020/06/TCC-PROFMAT_MATHEUS_QUEIROZ.pdf
- [13] Ribeiro, H., Martins, M. & Santos, R. (2012). A Regressão Linear Simples no Ensino Secundário. *Gazeta de Matemática*, (168), 42-48.
- [14] Sant' Anna, A. A. C., Pereira, J. L., Abreu, M. L. C., Moura, A. M. A., Aniceto, E. S., Motta, J. H. & Glória, L. S. (2021). Techniques of quality of adjustment of statistical models with evaluation of probability distributions using production data of laying quails. *Research, Society and Development*, 10(11), e278101119317, 2021. <https://doi.org/10.33448/rsd-v10i11.19317>
- [15] Sousa, R., Alves, F., Aires, A. & Catarino, P. (2023). O ensino da cônica parábola: uma abordagem vía Categorías Intuitivas e Teoría das Situaciones Didácticas. *Indagatio Matemática*, 15(3), 207-234.