

CÓRDOBA, SUÁREZ Y ORTEGA. 2026. Transformada de Fourier y espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$,
.Revista Sigma, 23 (2). Páginas 1–19.

REVISTA SIGMA

Departamento de Matemáticas y Estadística

Volumen XXIII N^o 2 (2026), páginas 1–19

Universidad de Nariño

Transformada de Fourier y espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$

Ricardo Córdoba¹
Dayan R. Suárez²
Alexander Ortega³

Abstract: In this paper, we present an introduction to Sobolev spaces $H^s(\mathbb{R})$, where $s \in \mathbb{R}$, and we will analyze some of their fundamental properties. In addition, we will provide a characterization of the space $H^s(\mathbb{R})$, using the Fourier transform.

Keywords. Fourier transform, Sobolev spaces.

Resumen: En este trabajo presentamos una introducción a los espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$, con $s \in \mathbb{R}$, y analizaremos algunas de sus propiedades fundamentales. Además, proporcionaremos una caracterización del espacio $H^s(\mathbb{R})$ mediante la transformada de Fourier.

Palabras Clave. Transformada de Fourier, Espacios de Sobolev.

1. Introducción

El estudio realizado por Lebesgue y Borel trajo consigo una clase de espacios de funciones muy importantes en áreas como el análisis funcional y las ecuaciones diferenciales parciales (EDPs), llamada espacios de Lebesgue L^p . La gran variedad de propiedades de estos espacios ha permitido a muchos matemáticos idear nuevas estructuras de espacios de funciones útiles en el estudio de las EDPs.

Uno de los operadores más importante en el análisis de Fourier, recibe el nombre de transformación integral, denominada así en honor al matemático y físico francés Joseph Fourier.

¹Departamento de matemáticas y estadística, Universidad de Nariño, Colombia. Correo electrónico: rcordoba@udenar.edu.co,

²Universidad Bío-Bío, Concepción, Chile. Correo electrónico: smdayan@unicauca.edu.co,

³Universidad del Cauca, Colombia. Correo electrónico: aortegam@unicauca.edu.co,

La transformada de Fourier aparece en diversas aplicaciones, como las ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales, la probabilidad, mecánica cuántica, procesamiento de señales e imágenes y teoría de control, por mencionar solo algunas. Esta herramienta no solo es importante en diversas áreas de las matemáticas y sus aplicaciones, sino que, al combinar sus propiedades fundamentales con los espacios L^p , se llega a la definición del espacio de Sobolev H^s . Estos espacios fueron introducidos por el matemático ruso Sergéi Lvóvich Sóbolev en 1930 y desde entonces han sido objeto de intensa investigación, ya que con el paso del tiempo estos espacios han mostrado ser unos de los que reúnen las condiciones necesarias para determinar soluciones de EDPs no lineales.

De esta forma, en este trabajo realizaremos un estudio de la transformada de Fourier y de algunas de sus propiedades. Seguidamente, usando la transformada de Fourier definiremos los espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$, y mostraremos algunas de sus propiedades más importantes.

Este trabajo está organizado de la siguiente forma: en la Sección 2 estudiaremos algunas propiedades relacionadas con la transformada de Fourier tanto en el espacio $L^1(\mathbb{R})$ como en el espacio $L^2(\mathbb{R})$. En la Sección 3, estudiaremos algunas propiedades relacionadas con los espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$.

2. Transformada de Fourier

En esta sección estudiaremos algunas propiedades fundamentales de la transformada de Fourier. Presentaremos la definición de la transformada de Fourier en el espacio $L^1(\mathbb{R})$ y posteriormente en $L^2(\mathbb{R})$. En particular, destacaremos dos resultados muy conocidos en la literatura como lo es el teorema de Plancherel y la fórmula de inversión de Fourier. Asumiremos conocida la teoría básica de los espacios $L^p(\mathbb{R})$, con $1 \leq p \leq \infty$.

2.1. Transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R})$

Definición 1. *La transformada de Fourier de una función $f \in L^1(\mathbb{R})$, denotada por \widehat{f} , es la función definida por*

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i x \xi} dx, \quad \text{para todo } \xi \in \mathbb{R}.$$

El siguiente teorema resume algunas propiedades básicas de la transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R})$.

Teorema 1. *Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. Entonces:*

1. *La aplicación $f \mapsto \widehat{f}$ define una transformación lineal de $L^1(\mathbb{R})$ en $L^\infty(\mathbb{R})$ y además*

$$\|\widehat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

2. *\widehat{f} es uniformemente continua en \mathbb{R} .*
3. *Si $\tau_h f(x) := f(x - h)$ denota la translación por $h \in \mathbb{R}$, entonces*

$$\widehat{(\tau_h f)}(\xi) = e^{-2\pi i h \xi} \widehat{f}(\xi), \tag{1.1}$$

y

$$(e^{-2\pi i x h} f)(\xi) = (\tau_{-h} \widehat{f})(\xi). \quad (1.2)$$

4. Si $\delta_a f(x) := f(ax)$ denota una dilatación para $a > 0$, entonces

$$(\widehat{\delta_a f})(\xi) = a^{-1} \widehat{f}(a^{-1} \xi).$$

5. Sea $g \in L^1(\mathbb{R})$. Entonces si definimos la convolución de f y g mediante

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy,$$

tenemos que

$$(\widehat{f * g})(\xi) := \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi).$$

6. Si $g \in L^1(\mathbb{R})$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x)g(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\widehat{g}(x) dx.$$

Demostración. 1. Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Probemos que la transformada de Fourier es una aplicación lineal. En efecto,

$$\begin{aligned} (\widehat{\alpha f + \beta g})(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} (\alpha f + \beta g)(x) e^{-2\pi i x \xi} dx \\ &= \alpha \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx + \beta \int_{\mathbb{R}} g(x) e^{-2\pi i x \xi} dx = \alpha \widehat{f}(\xi) + \beta \widehat{g}(\xi). \end{aligned}$$

Ahora, notemos que

$$|\widehat{f}(\xi)| = \left| \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx = \|f\|_{L^1(\mathbb{R})},$$

luego,

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}, \quad \text{para todo } \xi \in \mathbb{R}. \quad (1.3)$$

Por tanto, obtenemos que

$$\|\widehat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} := \text{esssup}_{\xi \in \mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)| \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}^4.$$

2. Sea $\varepsilon > 0$. Como $f \in L^1(\mathbb{R})$, entonces existe $R > 0$ tal que

$$2 \int_{\mathbb{R} \setminus (-R, R)} |f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Elijamos $\eta > 0$, de tal manera que

$$2\pi R \eta \int_{-R}^R |f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

⁴esssup_E φ denota el supremo esencial de φ en E .

Ahora, sea $|h| < \eta$. Entonces para cualquier $y \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(y+h) - \widehat{f}(y)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x y} (e^{-2\pi i x h} - 1) dx \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)| |e^{-2\pi i x h} - 1| dx = 2 \int_{\mathbb{R}} |f(x)| |\sin(\pi x h)| dx \\ &\leq 2 \int_{\mathbb{R} \setminus (-R, R)} |f(x)| dx + 2\pi \int_{-R}^R |f(x)| |x h| dx \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + 2\pi R \eta \int_{-R}^R |f(x)| dx < \varepsilon. \end{aligned}$$

Por tanto \widehat{f} es uniformemente continua en \mathbb{R} .

3. Por la definición de transformada de Fourier y de τ_h tenemos,

$$(\widehat{\tau_h f})(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \tau_h f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x-h) e^{-2\pi i x \xi} dx.$$

Ahora si $z = x - h$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}} f(x-h) e^{-2\pi i x \xi} dx = \int_{\mathbb{R}} f(z) e^{-2\pi i \xi(z+h)} dz = e^{-2\pi i \xi h} \widehat{f}(\xi).$$

Así hemos demostrado (1.1).

Por otro lado,

$$(e^{-2\pi i x h} f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x h} e^{-2\pi i x \xi} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x(\xi+h)} dx = (\tau_{-h} \widehat{f})(\xi).$$

En consecuencia obtenemos (1.2).

4. Notemos que

$$(\widehat{\delta_a f})(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(ax) e^{-2\pi i x \xi} dx.$$

Así, usando el cambio $z = ax$, con $a > 0$, tenemos que

$$(\widehat{\delta_a f})(\xi) = a^{-1} \int_{\mathbb{R}} f(z) e^{-2\pi i (a^{-1}\xi)z} dz = a^{-1} \widehat{f}(a^{-1}\xi).$$

5. Usando la definición de transformada de Fourier y de convolución en $L^1(\mathbb{R})$ obtenemos:

$$\begin{aligned} (\widehat{f * g})(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} (f * g)(x) e^{-2\pi i x \xi} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x \xi} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y) dy \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y) e^{-2\pi i \xi(x-y)} e^{-2\pi i \xi y} dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(y) e^{-2\pi i \xi y} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-y) e^{-2\pi i \xi(x-y)} dx \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(y) e^{-2\pi i \xi y} \left(\int_{\mathbb{R}} f(z) e^{-2\pi i \xi z} dz \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(y) e^{-2\pi i \xi y} \widehat{f}(\xi) dy \\ &= \widehat{f}(\xi) \int_{\mathbb{R}} g(y) e^{-2\pi i \xi y} dy = \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi). \end{aligned}$$

6. Observemos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(y)g(y) dy &= \int_{\mathbb{R}} g(y) \left(\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi ixy} dx \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x) \int_{\mathbb{R}} g(y)e^{-2\pi ixy} dy dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\widehat{g}(x) dx. \end{aligned}$$

✓

Observación 1. La propiedad 1 del teorema anterior garantiza que la definición de la transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R})$ es correcta.

Observación 2. Notemos que de las propiedades 1 y 2 del teorema 1 podemos concluir que la aplicación $f \mapsto \widehat{f}$ es una transformación lineal continua de $L^1(\mathbb{R})$ en $L^\infty(\mathbb{R})$.

Ejemplo 1. Sea $f(x) = \chi_{(a,b)}(x)$ la función característica del intervalo (a, b) , definida por

$$\chi_{(a,b)}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in (a, b) \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus (a, b). \end{cases}$$

Calculemos su transformada de Fourier.

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \chi_{(a,b)}(x)e^{-2\pi i x \xi} dx = \int_a^b e^{-2\pi i x \xi} dx = -\frac{e^{-2\pi i b \xi} - e^{-2\pi i a \xi}}{2\pi i \xi} \\ &= -\frac{e^{-(\pi i a \xi + \pi i b \xi) + (\pi i a \xi - \pi i b \xi)} - e^{-(\pi i a \xi + \pi i b \xi) + (\pi i b \xi - \pi i a \xi)}}{2\pi i \xi} \\ &= -e^{-\pi i \xi(a+b)} \left[\frac{e^{\pi i \xi(a-b)} - e^{-\pi i \xi(a-b)}}{2\pi i \xi} \right] \\ &= -e^{-\pi i(a+b)\xi} \left[\frac{\sin(\pi(a-b)\xi)}{\pi \xi} \right]. \end{aligned}$$

Observación 3. Del ejemplo anterior tenemos que $\widehat{f} \notin L^1(\mathbb{R})$, puesto que

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \left| e^{-\pi i(a+b)\xi} \left[\frac{\sin(\pi(a-b)\xi)}{\xi} \right] \right| d\xi = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\sin(\pi(a-b)\xi)}{\xi} \right| d\xi$$

y la última integral es divergente (ver por ejemplo [3], p. 36).

El siguiente ejemplo será de gran utilidad para demostrar algunos resultados relacionados con la transformada de Fourier y en particular, el teorema de la fórmula de inversión de Fourier.

Ejemplo 2. Calculemos la transformada de Fourier para la función $\phi(x) = e^{-4\pi^2 t x^2}$ para $t > 0$.

Sea $\varphi(x) = e^{-4\pi^2 x^2}$,

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-4\pi^2 x^2} e^{-2\pi i x \xi} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-(2\pi x + \frac{i\xi}{2})^2} e^{-\frac{\xi^2}{4}} dx.$$

Luego, si sustituimos $z = 2\pi x + \frac{i\xi}{2}$, se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-(2\pi x + \frac{i\xi}{2})^2} e^{-\frac{\xi^2}{4}} dx = \frac{e^{-\frac{\xi^2}{4}}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-z^2} dz = \frac{e^{-\frac{\xi^2}{4}}}{\sqrt{\pi}}.$$

En consecuencia,

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \frac{e^{-\frac{\xi^2}{4}}}{2\sqrt{\pi}}$$

Observemos que $\delta_{\sqrt{t}}\varphi(x) = \phi(x)$; luego por la propiedad 4 del teorema 1 tenemos:

$$\widehat{\phi}(\xi) = \widehat{(\delta_{\sqrt{t}}\varphi)}(\xi) = \frac{\widehat{\varphi}((\sqrt{t})^{-1}\xi)}{\sqrt{t}} = \frac{e^{-\frac{\xi^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}}. \quad (1.4)$$

Adicionalmente, usando un argumento similar al anterior, es posible ver que $\widehat{\phi} \in L^1(\mathbb{R})$.

El corolario del siguiente teorema será utilizado en la demostración de la proposición 1, así como en el teorema de Plancherel y en el teorema de la fórmula de inversión de Fourier, los cuales son resultados muy conocidos del análisis matemático (ver [4], Riesz Fischer theorem and corollary (of the proof), pp. 232, 234 respectivamente). Además, para la prueba de la proposición 1 usaremos el teorema 3 cuya demostración puede ser consultada en ([3], theorem 2.1.15).

Teorema 2. (Riesz-Fischer) Para $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(\mathbb{R})$ es un espacio de Banach.

Corolario 1. Si una sucesión $f_k \rightarrow f$ en $L^p(\mathbb{R})$, entonces existe una subsucesión $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ tal que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x) = f(x), \text{ para c.t.p } x \in \mathbb{R}.$$

Teorema 3. Sea $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ con $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx = 1$ y $\varphi_\varepsilon = \varepsilon^{-1}\varphi(x/\varepsilon)$ para $\varepsilon > 0$. Si $f \in L^p(\mathbb{R})$ con $1 \leq p \leq \infty$, o $f \in C_0(\mathbb{R})^5 \subset L^\infty(\mathbb{R})$, entonces

$$\|f * \varphi_\varepsilon - f\|_{L^p(\mathbb{R})} \rightarrow 0, \text{ cuando } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (1.5)$$

Proposición 1. Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. Entonces

$$f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x \xi} e^{-4\pi^2 t \xi^2} \widehat{f}(\xi) d\xi,$$

donde el límite se toma en la norma $L^1(\mathbb{R})$.

Además, si f es una función continua en un punto x_0 , entonces se cumple la siguiente igualdad

$$f(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x_0 \xi} e^{-4\pi^2 t \xi^2} \widehat{f}(\xi) d\xi.$$

Sean $f, \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Entonces

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x \xi} \widehat{f}(\xi) d\xi, \text{ en c.t.p } x \in \mathbb{R}.$$

Demostración. Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$, y consideremos la función $\varphi_t(x) = \frac{e^{-x^2/4t}}{2\sqrt{\pi t}}$ para $t > 0$. Del ejemplo 2 se tiene que $\varphi_t \in L^1(\mathbb{R})$. Además, haciendo el cambio de variable $u = \frac{x}{2\sqrt{t}}$ obtenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_t(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} dx = 1.$$

⁵ $C_0(\mathbb{R})$ es el espacio de todas las funciones continuas definidas en \mathbb{R} que se anulan en el infinito, es decir, $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

Por lo tanto, usando (1.5), la definición de convolución para funciones, la definición de translación de una función, la fórmula (1.4) del ejemplo 2, la igualdad (1.2) y la propiedad 6 del teorema 1, se sigue que:

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}} * f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}} f(y) dy = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \tau_x \frac{e^{-\frac{y^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}} f(y) dy \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x y} \widehat{e^{-4\pi^2 t x^2}}(y) f(y) dy = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x \xi} e^{-4\pi t \xi^2} \widehat{f}(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

donde el límite se toma en la norma $L^1(\mathbb{R})$.

Además si f es una función continua en un punto x_0 , entonces obtenemos que

$$f(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{x_0^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}} * f(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x_0 \xi} e^{-4\pi t \xi^2} \widehat{f}(\xi) d\xi.$$

Adicionalmente, si $f, \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, entonces, considerando $h_t(\xi) = e^{2\pi i x \xi - 4\pi^2 t \xi^2} \widehat{f}(\xi)$ se tiene que $|h_t(\xi)| \leq C|\widehat{f}(\xi)|$. Así, $\int_{\mathbb{R}} |h_t(\xi)| d\xi \leq C \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)| dy < \infty$. Luego, $h_t(\xi)$ es integrable. Notemos que $h_t(\xi) \rightarrow e^{2\pi i x \xi} \widehat{f}(\xi)$ cuando $t \rightarrow 0$. Entonces, por el corolario 1 del teorema de Riesz-Fischer, existe una sucesión $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$, con $t_n \rightarrow 0$, cuando $n \rightarrow \infty$, tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} h_{t_n}(\xi) = e^{2\pi i x \xi} \widehat{f}(\xi)$ en c.t.p $\xi \in \mathbb{R}$. Por tanto, usando el teorema de convergencia dominada obtenemos que

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x \xi - 4\pi^2 t_n \xi^2} \widehat{f}(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow \infty} e^{2\pi i x \xi - 4\pi^2 t_n \xi^2} \widehat{f}(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x \xi} \widehat{f}(\xi) d\xi.$$

□

De los resultados anteriores podemos concluir que la función

$$\wedge : L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow C_0(\mathbb{R})$$

es lineal, uno a uno y acotada; sin embargo no es sobreyectiva (ver por ejemplo [2], pp. 7-8).

2.2. Transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R})$

En esta sección, nuestro objetivo principal es definir la transformada de Fourier para una función de $L^2(\mathbb{R})$. Demostraremos algunos resultados importantes para el desarrollo de este trabajo.

El próximo teorema nos permite extender la definición de la transformada de Fourier a una función en $L^2(\mathbb{R})$; además esta extensión nos garantiza que la transformada de Fourier define un operador lineal acotado de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ en $L^2(\mathbb{R})$. Este teorema es muy importante en la teoría del análisis de Fourier y es conocido como teorema de Plancherel.

Teorema 4. (Plancherel) Sea $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Entonces $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ y

$$\|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{1.6}$$

Demostración. Sean $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $g(x) := \bar{f}(-x)$, donde \bar{f} denota el conjugado complejo de la función f . Puesto que $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ se tiene que $f * g \in C_0(\mathbb{R})$ ⁶. Por otro lado, como $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, usando la desigualdad de Young para convoluciones⁷ tenemos que $f * g \in L^1(\mathbb{R})$. Así $f * g \in L^1(\mathbb{R}) \cap C_0(\mathbb{R})$. Además por la propiedad 5 del teorema 1,

$$(\widehat{f * g})(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi).$$

Luego,

$$\widehat{f * g} = |\widehat{f}|^2 \geq 0, \text{ donde } \widehat{g} = \overline{(\widehat{f})}. \quad (1.7)$$

Ahora, haciendo $h = f * g$, tenemos que:

$$\begin{aligned} |h(k) - h(0)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} f(k-y)g(y) dy - \int_{\mathbb{R}} f(-y)g(y) dy \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |f(k-y) - f(-y)| |g(y)| dy \\ &\leq \|f(k-\cdot) - f(-\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})} \|g\|_{L^2(\mathbb{R})} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Así, h es una función continua en el punto cero.

Puesto que $h \in L^1(\mathbb{R})$ y es continua en el punto cero, usando la proposición 1, obtenemos:

$$h(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} e^{-4\pi^2 t \xi^2} \widehat{h}(\xi) d\xi.$$

Notemos que si hacemos $g_t(\xi) = e^{-4\pi^2 t \xi^2} \widehat{h}(\xi)$, entonces $g_t(\xi) \rightarrow \widehat{h}(\xi)$ cuando $t \rightarrow 0$. Por tanto de (1.7) se cumple que $\widehat{h} \geq 0$. Además, según el corolario ??, existe una sucesión $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$, con $t_n \rightarrow 0$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} g_{t_n}(\xi) = \widehat{h}(\xi)$ en c.t.p $\xi \in \mathbb{R}$. Adicionalmente, se tiene que $g_{t_n}(\xi) = e^{-4\pi^2 t_n \xi^2} \widehat{h}(\xi) \geq 0$. Así, usando el lema de Fatou⁸,

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{h}(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}} \liminf_{n \rightarrow \infty} g_{t_n}(\xi) d\xi \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} e^{-4\pi^2 t_n \xi^2} \widehat{h}(\xi) d\xi = h(0).$$

Luego $\widehat{h} \in L^1(\mathbb{R})$. Ahora probemos que $\|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$. En efecto, como $h, \widehat{h} \in L^1(\mathbb{R})$ usando la proposición 1 tenemos que

$$\begin{aligned} \|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &= \int_{\mathbb{R}} (\widehat{f * g})(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}} \widehat{h}(\xi) d\xi = h(0) = f * g(0) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x)g(0-x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\bar{f}(x) dx = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2. \end{aligned}$$

□

⁶Si $f \in L^p(\mathbb{R})$, $g \in L^{p'}(\mathbb{R})$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $1 < p < \infty$. Entonces $f * g \in C_0(\mathbb{R})$.

⁷Sean $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$, y $g \in L^1(\mathbb{R})$. Entonces, $f * g \in L^p(\mathbb{R})$ con

$$\|f * g\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R})} \|g\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

⁸Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en L^1 que satisfacen:

(a) Para todo n , $f_n(x) \geq 0$ en c.t.p $x \in \mathbb{R}$.

(b) $\sup_n \int f_n(x) dx < \infty$.

Si $f(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \leq +\infty$, en c.t.p $x \in \mathbb{R}$. Entonces $f \in L^1(\mathbb{R})$ y

$$\int f(x) dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) dx.$$

A continuación veremos que es posible definir la transformada de Fourier para una función $f \in L^2(\mathbb{R})$. En efecto, puesto que

$$L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}), \quad (1.8)$$

y $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ es denso en $L^2(\mathbb{R})$ (recordemos que $C_0^\infty(\mathbb{R})$ es denso en $L^2(\mathbb{R})$, ver [4], p. 245), entonces existe una sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ tal que $f_n \rightarrow f$ en $L^2(\mathbb{R})$. Por lo tanto $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en $L^2(\mathbb{R})$. Luego $(\widehat{f_n})_{n \in \mathbb{N}} \subset L^2(\mathbb{R})$ es también de Cauchy ya que si $m, n \rightarrow \infty$,

$$\|\widehat{f_n} - \widehat{f_m}\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\widehat{f_n - f_m}\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f_n - f_m\|_{L^2(\mathbb{R})} \rightarrow 0.$$

Teniendo en cuenta en la última igualdad el teorema de Plancherel. Ahora como $L^2(\mathbb{R})$ es completo, la sucesión $(\widehat{f_n})_{n \in \mathbb{N}}$ tiene límite en $L^2(\mathbb{R})$ y lo denominaremos la transformada de Fourier de \widehat{f} . Esto es,

$$\widehat{f} := \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{f_n}, \quad \text{en } L^2(\mathbb{R}).$$

Observación 4. Se puede ver que la definición de \widehat{f} no depende de la elección de la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. En efecto, supongamos que existe otra sucesión $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que converge a f en $L^2(\mathbb{R})$. Entonces usando (1.6) tenemos que:

$$\begin{aligned} \|\widehat{f_n} - \widehat{g_n}\|_{L^2(\mathbb{R})} &= \|\widehat{f_n - g_n}\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f_n - g_n\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= \|f_n - f + f - g_n\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\leq \|f_n - f\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|g_n - f\|_{L^2(\mathbb{R})} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{g_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{f_n} = \widehat{f}, \quad \text{en } L^2(\mathbb{R}).$$

Antes de estudiar el teorema de la fórmula de inversión de Fourier, presentaremos un resultado auxiliar cuya demostración puede ser consultada en ([4], pp. 310-311).

Teorema 5. (Teorema de sumabilidad en $L^1(\mathbb{R})$) Supongamos que existe una función $\phi \in L^1(\mathbb{R})$ que es continua y acotada, tal que $\phi(0) = 1$ y $\widehat{\phi} \in L^1(\mathbb{R})$. Supongamos además que $f \in L^1(\mathbb{R})$. Entonces, cuando $a \rightarrow 0$ el siguiente límite existe en el sentido de la convergencia en $L^1(\mathbb{R})$:

$$f(x) = \lim_{a \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} \phi(-a\xi) d\xi, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}. \quad (1.9)$$

Observación 5. Podemos notar que la función ϕ del teorema anterior existe, para ello basta considerarla como en el ejemplo 2.

Observación 6. Notemos que de las propiedades 3, 4 y 6 del teorema 1, y de la definición de convolución se puede deducir:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} \phi(-a\xi) d\xi &= \int_{\mathbb{R}} f(\xi) a^{-1} \widehat{\phi}\left(\frac{x-y}{a}\right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y) (\widehat{\phi})_a(x-y) dy = f * (\widehat{\phi})_a(x), \end{aligned}$$

donde $(\widehat{\phi})_a(y) = a^{-1} \widehat{\phi}\left(\frac{y}{a}\right)$. Por tanto, el límite (1.9) se puede reescribir de la siguiente manera

$$\lim_{a \rightarrow 0} f * (\widehat{\phi})_a(x) = f(x), \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

El siguiente teorema garantiza la existencia de una fórmula de inversión para la transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R})$.

Teorema 6. (Fórmula de inversión de Fourier) Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$. Entonces

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi.$$

Demostración. Sean $z \in \mathbb{R}$, $t > 0$ y consideremos $\phi_t(y) = e^{-4\pi^2 t y^2}$. Por la propiedad 6 del teorema 1.1, la igualdad (1.2), y usando la fórmula (1.4) para $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(y) e^{2\pi i y z} \phi_t(y) dy &= \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{2\pi i y z - 4\pi^2 t y^2} dy = \int_{\mathbb{R}} f(y) (\tau_z \widehat{\phi}_t)(y) dy \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-\frac{(y-z)^2}{4t}} dy = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{z^2}{4t}} * f(z). \end{aligned}$$

Ahora, por el ejemplo 2 y usando la observación 6 del teorema de sumabilidad 5 se tiene

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(y) e^{2\pi i y z} \phi_t(y) dy = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{z^2}{4t}} * f(z) = f(z).$$

Dado que el límite anterior converge a $f(z)$ en el sentido de la convergencia en $L^1(\mathbb{R})$, por el corolario ??, existe una sucesión $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$, con $t_n \rightarrow 0$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t_n}} e^{-\frac{z^2}{4t_n}} * f(z) = f(z)$ en c.t.p $z \in \mathbb{R}$, así

$$f(z) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(y) e^{2\pi i y z} dy.$$

□

Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ entonces definimos la transformada inversa de Fourier por

$$\check{f}(x) := \int_{\mathbb{R}} f(\xi) e^{2i\pi x \xi} d\xi, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Observación 7. Notemos que si $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ entonces teniendo en cuenta el teorema anterior tenemos que:

$$\begin{aligned} \widehat{f g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} f(x) g(x) e^{-2\pi i x \xi} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \xi} \left(\int_{\mathbb{R}} \widehat{g}(y) e^{2\pi i x y} dy \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \xi} \widehat{g}(y) e^{2\pi i x y} dx dy = \int_{\mathbb{R}} \widehat{g}(y) \left(\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x (\xi - y)} dx \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi - y) \widehat{g}(y) dy = \widehat{f} * \widehat{g}(\xi). \end{aligned}$$

Una propiedad importante de la transformada de Fourier es su relación con la diferenciación. Tenemos los siguientes resultados:

Teorema 7. Sea $x^n f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ para cualquier $n \in \mathbb{N}_0$. Entonces

$$\frac{d^n \widehat{f}}{d\xi^n}(\xi) = (-2\pi i)^n \widehat{(x^n f(x))}(\xi).$$

Demostración. Procedamos por inducción. Aplicando el teorema de convergencia dominada podemos diferenciar bajo el signo de la integral. Así, se tiene que

$$\frac{d\widehat{f}}{d\xi}(\xi) = \frac{d}{d\xi} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i x \xi} dx \right) = -2\pi i \int_{\mathbb{R}} x f(x)e^{-2\pi i x \xi} dx. \quad (1.10)$$

Supongamos que para $n = k - 1$, se cumple que

$$\frac{d^{k-1}\widehat{f}}{d\xi^{k-1}}(\xi) = (-2\pi i)^{k-1} (\widehat{x^{k-1}f(x)})(\xi). \quad (1.11)$$

Ahora usando (1.11),

$$\frac{d^k \widehat{f}}{d\xi^k}(\xi) = \frac{d}{d\xi} \left[\frac{d^{k-1}\widehat{f}}{d\xi^{k-1}}(\xi) \right] = (-2\pi i)^{k-1} \frac{d}{d\xi} \left[\widehat{x^{k-1}f(x)}(\xi) \right].$$

Luego de (1.10) tenemos que

$$\frac{d^k \widehat{f}}{d\xi^k}(\xi) = (-2\pi i)^k (\widehat{x^k f(x)})(\xi).$$

En consecuencia por el principio de inducción matemática,

$$\frac{d^n \widehat{f}}{d\xi^n}(\xi) = (-2\pi i)^n (\widehat{x^n f(x)})(\xi).$$

✓

Para la demostración del teorema de la transformada de Fourier de la derivada, haremos uso del siguiente resultado, cuya demostración puede ser consultada en ([1] pp. 94-95).

Teorema 8. Sean $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $L^p(\mathbb{R})$ y $f \in L^p(\mathbb{R})$, con $1 \leq p \leq \infty$, tal que $\|f_n - f\|_{L^p(\mathbb{R})} \rightarrow 0$. Entonces, existe una subsucesión $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ y una función $h \in L^p(\mathbb{R})$ tales que:

1. $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$ en c.t.p $x \in \mathbb{R}$.
2. $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, en c.t.p $x \in \mathbb{R}$.

Teorema 9. (Transformada de Fourier de la derivada) Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$. Entonces

$$\widehat{f^{(n)}}(\xi) = (2\pi i \xi)^n \widehat{f}(\xi), \text{ con } n \in \mathbb{N}_0^9.$$

Demostración. Sea $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ ¹⁰. Entonces usando integración por partes tenemos

$$\widehat{f^{(n)}}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f^{(n)}(x)e^{-2\pi i x \xi} dx = 2\pi i \xi \int_{\mathbb{R}} f^{(n-1)}(x)e^{-2\pi i x \xi} dx = 2\pi i \xi \widehat{f^{(n-1)}}(\xi).$$

Por inducción es posible obtener

$$\widehat{f^{(n)}}(\xi) = (2\pi i \xi)^n \widehat{f}(\xi).$$

Ahora, teniendo en cuenta (1.8) y puesto que $C_0^\infty(\mathbb{R})$ es denso en $L^2(\mathbb{R})$, entonces existe una sucesión $(f_m)_{m \in \mathbb{N}} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tal que

⁹ $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

¹⁰ $C_0^\infty(\mathbb{R})$ es el espacio de las funciones en $C^\infty(\mathbb{R})$ con soporte compacto en \mathbb{R} .

$$f_m \rightarrow f, \quad f_m^{(n)} \rightarrow f^{(n)} \quad \text{en } L^2(\mathbb{R}), \quad m \rightarrow \infty.$$

Además por el teorema de Plancherel tenemos que

$$\widehat{f}_m \rightarrow \widehat{f}, \quad \widehat{f}_m^{(n)} \rightarrow \widehat{f}^{(n)} \quad \text{en } L^2(\mathbb{R}), \quad m \rightarrow \infty.$$

Sea $g(f)$ definida por

$$g(f) := (2\pi i \xi)^n \widehat{f}(\xi).$$

Demostremos que $\widehat{f}^{(n)} = g(f)$. En efecto,

$$\|\widehat{f}^{(n)} - g(f)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|\widehat{f}^{(n)} - g(f_m)\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|g(f_m) - g(f)\|_{L^2(\mathbb{R})}. \quad (1.12)$$

Pero como $\widehat{f}_m^{(n)}(\xi) = (2\pi i \xi)^n \widehat{f}_m(\xi) = g(f_m)$, entonces

$$\|\widehat{f}^{(n)} - g(f_m)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\widehat{f}^{(n)} - \widehat{f}_m^{(n)}\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f^{(n)} - f_m^{(n)}\|_{L^2(\mathbb{R})} \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty.$$

De otro lado, puesto que $\widehat{f}_m \rightarrow \widehat{f}$ en $L^2(\mathbb{R})$,

$$|\widehat{f}_m(\xi)|^2 \rightarrow |\widehat{f}(\xi)|^2, \quad |g(f_m)(\xi)|^2 \rightarrow |g(f)(\xi)|^2 \quad \text{en c.t.p } \xi \in \mathbb{R}, \quad m \rightarrow \infty.$$

Además,

$$\|g(f_m)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\widehat{f}_m^{(n)}\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f_m^{(n)}\|_{L^2(\mathbb{R})} \rightarrow \|f^{(n)}\|_{L^2(\mathbb{R})}, \quad m \rightarrow \infty.$$

Entonces, por el teorema 8 existe una subsucesión (que denotaremos de la misma forma) y una función $h(x) \in L^2(\mathbb{R})$ tal que

$$|g(f_m)(\xi)| \leq h(\xi).$$

Por lo tanto, usando el teorema de la convergencia dominada,

$$\|g(f_m) - g(f)\|_{L^2(\mathbb{R})} \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty.$$

De donde, usando (1.12),

$$\|\widehat{f}^{(n)} - g(f)\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0.$$

Así $\widehat{f}^{(n)}(\xi) = (2\pi i \xi)^n \widehat{f}(\xi)$, en c.t.p $\xi \in \mathbb{R}$. □

3. Espacios de Sóbolev $H^s(\mathbb{R})$

En esta sección realizaremos un breve estudio de los espacios de Sóbolev $H^s(\mathbb{R})$, con $s \in \mathbb{R}$. Estos espacios constituyen una herramienta fundamental en el estudio de ecuaciones diferenciales parciales no lineales.

Definición 2. Sea $s \in \mathbb{R}$. Definimos el espacio de Sóbolev de orden s , denotado por $H^s(\mathbb{R})$, como

$$H^s(\mathbb{R}) := \{f \in L^2(\mathbb{R}) : (1 + |\xi|^2)^{s/2} \widehat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R})\},$$

con la norma definida por

$$\|f\|_{s,2} := \|\Lambda^s f\|_{L^2(\mathbb{R})}, \quad \text{donde } \Lambda^s f(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{s/2} \widehat{f}(\xi).$$

Vemos que $H^s(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial. Notemos que $H^s(\mathbb{R}) \subseteq L^2(\mathbb{R})$, para $s \in \mathbb{R}$. Además, la función nula $f(x) = 0$ pertenece a H^s , así $H^s \neq \emptyset$. Adicionalmente, para $\lambda \in \mathbb{R}$ y para todo $f, g \in H^s(\mathbb{R})$ tenemos que:

$$\|\lambda f\|_{H^s(\mathbb{R})} = \|\lambda \Lambda^s f\|_{L^2(\mathbb{R})} = |\lambda| \|\Lambda^s f\|_{L^2(\mathbb{R})} = |\lambda| \|f\|_{H^s(\mathbb{R})}.$$

Por otro lado, por la desigualdad de Minkowsky¹¹ se tiene que:

$$\begin{aligned} \|f + g\|_{H^s(\mathbb{R})} &= \left(\int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{(f+g)}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{f}(\xi) + \widehat{g}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} |(1 + |\xi|^2)^{s/2} \widehat{f}(\xi) + (1 + |\xi|^2)^{s/2} \widehat{g}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} + \left(\int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{g}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \\ &= \|f\|_{H^s(\mathbb{R})} + \|g\|_{H^s(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Así,

$$\|f + g\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{H^s(\mathbb{R})} + \|g\|_{H^s(\mathbb{R})}.$$

Por lo tanto, H^s es un espacio vectorial.

Observación 8. En algunas ocasiones escribiremos $\|\cdot\|_{H^s(\mathbb{R})}$ para denotar la norma $\|\cdot\|_{s,2}$ definida anteriormente.

Observación 9. Es posible ver que $\|\cdot\|_{H^s(\mathbb{R})}$ es una norma, es decir para todo $f, g \in H^s(\mathbb{R})$ y para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$ se cumplen las siguientes condiciones:

1. $\|f\|_{H^s(\mathbb{R})} \geq 0$.
2. Si $\|f\|_{H^s(\mathbb{R})} = 0$, entonces $f = 0$.
3. $\|\lambda f\|_{H^s(\mathbb{R})} = |\lambda| \|f\|_{H^s(\mathbb{R})}$.
4. $\|f + g\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{H^s(\mathbb{R})} + \|g\|_{H^s(\mathbb{R})}$.

Ahora veamos un ejemplo de una función que pertenece al espacio de Sóbolev H^s .

Ejemplo 3. Sea $f(x) = \chi_{(-1,1)}(x)$, determinemos para qué valores de s la función $f \in H^s(\mathbb{R})$. Del ejemplo 1 tenemos que

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{\sin(2\pi\xi)}{\pi\xi}.$$

Ahora,

$$\begin{aligned} \|f\|_{s,2}^2 &= \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi = \frac{1}{\pi^2} \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2)^s \left| \frac{\sin(2\pi\xi)}{\xi} \right|^2 d\xi \\ &\leq \frac{1}{\pi^2} \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2)^s \frac{1}{|\xi|^2} d\xi = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{+\infty} (1 + |\xi|^2)^s \frac{1}{|\xi|^2} d\xi. \end{aligned}$$

¹¹ Sean $f, g \in L^p(\mathbb{R})$, con $1 \leq p \leq \infty$. Entonces $f + g \in L^p(\mathbb{R})$ y además:

$$\|f + g\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|g\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

Dado que $(1 + |\xi|^2)^s$ es equivalente con $|\xi|^{2s}$ cuando $|\xi| \rightarrow +\infty$, entonces

$$\|f\|_{s,2}^2 \leq \frac{2}{\pi^2} \int_0^{+\infty} |\xi|^{2(s-1)} d\xi, \text{ con } \xi \in \mathbb{R}.$$

De modo que la integral del lado derecho de la desigualdad anterior converge para $2(s-1) < -1$, es decir, para $s < 1/2$. Por tanto $f \in H^s(\mathbb{R})$ si $s < 1/2$.

En el siguiente resultado establecemos algunas propiedades relacionadas con el espacio de Sobolev H^s ; en particular, mostramos que es un espacio de Hilbert.

Proposición 2. Sean $s, r \in \mathbb{R}$.

1. Si $r > s \geq 0$, entonces $H^r(\mathbb{R}) \subset H^s(\mathbb{R})$.
2. $H^s(\mathbb{R})$ es un espacio de Hilbert con respecto al producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_s$ definido como:

$$\text{Si } f, g \in H^s(\mathbb{R}), \text{ entonces } \langle f, g \rangle_s = \int_{\mathbb{R}} \Lambda^s f(\xi) \overline{\Lambda^s g(\xi)} d\xi.$$

3. Si $s_1 \leq s \leq s_2$, con $s = \theta s_1 + (1 - \theta)s_2$, $0 \leq \theta \leq 1$, entonces

$$\|f\|_{s,2} \leq \|f\|_{s_1,2}^\theta \|f\|_{s_2,2}^{1-\theta}.$$

Demostración. 1. Sea $f \in H^r(\mathbb{R})$. Si $0 \leq s < r$, entonces $(1 + |\xi|^2)^s \leq (1 + |\xi|^2)^r$ para todo $\xi \in \mathbb{R}$. Puesto que $|\widehat{f}(\xi)|^2 \geq 0$, tenemos,

$$\int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \leq \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2)^r |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

Esto implica que $\|f\|_{H^s(\mathbb{R})} = \|\Lambda^s f\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|\Lambda^r f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f\|_{H^r(\mathbb{R})} < \infty$. Por lo que $f \in H^s(\mathbb{R})$. Así, $H^r(\mathbb{R}) \subset H^s(\mathbb{R})$.

2. Primero demostramos que $\langle f, g \rangle_s = \int_{\mathbb{R}} \Lambda^s f(\xi) \overline{\Lambda^s g(\xi)} d\xi$ define un producto interno sobre $H^s(\mathbb{R})$. En efecto,

a) Por la linealidad de la integral obtenemos directamente que

$$\langle af + bh, g \rangle_s = a \langle f, g \rangle_s + b \langle h, g \rangle_s, \text{ para todo } a, b \in \mathbb{C}.$$

b) Notemos que

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle_s &= \int_{\mathbb{R}} \Lambda^s f(\xi) \overline{\Lambda^s g(\xi)} d\xi = \int_{\mathbb{R}} \overline{\Lambda^s f(\xi)} \Lambda^s g(\xi) d\xi \\ &= \overline{\int_{\mathbb{R}} \Lambda^s f(\xi) \overline{\Lambda^s g(\xi)} d\xi} = \overline{\langle g, f \rangle_s}. \end{aligned}$$

c)

$$\langle f, f \rangle_s = \int_{\mathbb{R}} \Lambda^s f(\xi) \overline{\Lambda^s f(\xi)} d\xi = \int_{\mathbb{R}} |\Lambda^s f(\xi)|^2 d\xi = \|\Lambda^s f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \geq 0.$$

Si $\langle f, f \rangle_s = 0$, entonces $\|\Lambda^s f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = 0$. Luego se tiene que $\Lambda^s f(\xi) = 0$ en c.t.p $\xi \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, $(1 + |\xi|^2)^{s/2} \widehat{f}(\xi) = 0$. Entonces, $\widehat{f}(\xi) = 0$ en c.t.p $\xi \in \mathbb{R}$ y así concluimos que $f(x) = 0$ en c.t.p $x \in \mathbb{R}$. Por otro lado, si $f = 0$ con

$f \in H^s(\mathbb{R})$ entonces, $\langle f, f \rangle_s = 0$. En consecuencia, $\langle f, g \rangle_s$ define un producto interno en $H^s(\mathbb{R})$.

Veamos ahora que $H^s(\mathbb{R})$ es un espacio de Banach. En efecto, sea $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $H^s(\mathbb{R})$. Entonces $(\Lambda^s f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(\mathbb{R})$ ya que para $l, m > N$ se tiene

$$\|\Lambda^s f_l - \Lambda^s f_m\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\Lambda^s(f_l - f_m)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f_l - f_m\|_{H^s(\mathbb{R})} < \epsilon.$$

Como $L^2(\mathbb{R})$ es completo, existe $h \in L^2(\mathbb{R})$ tal que

$$\Lambda^s f_k \rightarrow h \text{ en } L^2(\mathbb{R}), \text{ cuando } k \rightarrow \infty.$$

Definiendo $g := (1 + |\xi|^2)^{-s/2} h(\xi)$ con $s \in \mathbb{R}$, notamos que $g \in H^s(\mathbb{R})$ pues $\|g\|_{H^s(\mathbb{R})} = \|\Lambda^s(1 + |\xi|^2)^{-s/2} h\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|h\|_{L^2(\mathbb{R})} < \infty$. Además,

$$\|f_k - g\|_{H^s(\mathbb{R})} = \|\Lambda^s(f_k - g)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\Lambda^s f_k - h\|_{L^2(\mathbb{R})} \rightarrow 0, \text{ cuando } k \rightarrow \infty.$$

Así, $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión convergente en $H^s(\mathbb{R})$. Por lo tanto, $H^s(\mathbb{R})$ es un espacio de Hilbert.

3. Sea $s_1 \leq s \leq s_2$, donde $s = \theta s_1 + (1 - \theta)s_2$, $0 \leq \theta \leq 1$.

$$\begin{aligned} \|f\|_{s,2}^2 &= \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2)^{\theta s_1} (1 + |\xi|^2)^{(1-\theta)s_2} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} [(1 + |\xi|^2)^{s_1}]^\theta [(1 + |\xi|^2)^{s_2}]^{(1-\theta)} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} [(1 + |\xi|^2)^{s_1} |\widehat{f}(\xi)|^2]^\theta [(1 + |\xi|^2)^{s_2} |\widehat{f}(\xi)|^2]^{(1-\theta)} d\xi. \end{aligned}$$

Si $f \in H^{s_1}(\mathbb{R})$, entonces $[(1 + |\xi|^2)^{s_1} |\widehat{f}(\xi)|^2]^\theta \in L^{1/\theta}(\mathbb{R})$. Similarmente, si $f \in H^{s_2}(\mathbb{R})$, se tiene que $[(1 + |\xi|^2)^{s_2} |\widehat{f}(\xi)|^2]^{(1-\theta)} \in L^{1/(1-\theta)}(\mathbb{R})$. De este modo, usando la desigualdad de Hölder para $p = 1/\theta$ y $p' = 1/(1 - \theta)$ tenemos que:

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}} [(1 + |\xi|^2)^{s_1} |\widehat{f}(\xi)|^2]^\theta [(1 + |\xi|^2)^{s_2} |\widehat{f}(\xi)|^2]^{(1-\theta)} d\xi \\ &\leq \left[\int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2)^{s_1} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \right]^\theta \left[\int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2)^{s_2} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \right]^{(1-\theta)} \\ &= \|f\|_{s_1,2}^{2\theta} \|f\|_{s_2,2}^{2(1-\theta)}. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\|f\|_{s,2} \leq \|f\|_{s_1,2}^\theta \|f\|_{s_2,2}^{1-\theta}.$$

□

Usando argumentos similares a los de la demostración del teorema 9, se puede probar el siguiente resultado.

Teorema 10. Si $f \in H^s(\mathbb{R})$ entonces $(\widehat{f^{(n)}})(\xi) = (2\pi i \xi)^n \widehat{f}(\xi)$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Demostración. Sea $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Entonces usando integración por partes tenemos

$$\widehat{f^{(n)}}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f^{(n)}(x) e^{-2\pi i x \xi} dx = 2\pi i \xi \int_{\mathbb{R}} f^{(n-1)}(x) e^{-2\pi i x \xi} dx = 2\pi i \xi \widehat{f^{(n-1)}}(\xi).$$

Por inducción es posible obtener

$$\widehat{f^{(n)}}(\xi) = (2\pi i\xi)^n \widehat{f}(\xi).$$

Ahora, dado que $C_0^\infty(\mathbb{R})$ es denso en $H^s(\mathbb{R})$, entonces existe una sucesión $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ en $C_0^\infty(\mathbb{R})$ tal que

$$f_m \rightarrow f, \quad f_m^{(n)} \rightarrow f^{(n)} \quad \text{en } L^2(\mathbb{R}), \quad m \rightarrow \infty.$$

Además por el teorema 4 tenemos que

$$\widehat{f}_m \rightarrow \widehat{f}, \quad \widehat{f}_m^{(n)} \rightarrow \widehat{f}^{(n)} \quad \text{en } L^2(\mathbb{R}), \quad m \rightarrow \infty.$$

Sea $g(f)$ definida por

$$g(f) := (2\pi i\xi)^n \widehat{f}(\xi).$$

Veamos que $\widehat{f}^{(n)} = g(f)$. En efecto,

$$\|\widehat{f}^{(n)} - g(f)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|\widehat{f}^{(n)} - g(f_m)\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|g(f_m) - g(f)\|_{L^2(\mathbb{R})}. \quad (2.1)$$

Pero como $\widehat{f}_m^{(n)}(\xi) = (2\pi i\xi)^n \widehat{f}_m(\xi) = g(f_m)$, entonces

$$\|\widehat{f}^{(n)} - g(f_m)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\widehat{f}^{(n)} - \widehat{f}_m^{(n)}\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f^{(n)} - f_m^{(n)}\|_{L^2(\mathbb{R})} \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty.$$

De otro lado, puesto que $\widehat{f}_m \rightarrow \widehat{f}$ en $L^2(\mathbb{R})$,

$$|\widehat{f}_m(\xi)|^2 \rightarrow |\widehat{f}(\xi)|^2, \quad |g(f_m)(\xi)|^2 \rightarrow |g(f)(\xi)|^2 \quad \text{en c.t.p } \xi \in \mathbb{R}, \quad m \rightarrow \infty.$$

Además,

$$\|g(f_m)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\widehat{f}_m^{(n)}\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f_m^{(n)}\|_{L^2(\mathbb{R})} \rightarrow \|f^{(n)}\|_{L^2(\mathbb{R})}, \quad m \rightarrow \infty.$$

Entonces, por el teorema 8 existe una subsucesión (que denotaremos de la misma forma) y una función $h(x) \in L^2(\mathbb{R})$ tal que

$$|g(f_m)(\xi)| \leq h(\xi).$$

Por lo tanto, usando el teorema de la convergencia dominada,

$$\|g(f_m) - g(f)\|_{L^2(\mathbb{R})} \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty.$$

De donde, usando (2.1),

$$\|\widehat{f}^{(n)} - g(f)\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0.$$

Así $\widehat{f}^{(n)}(\xi) = (2\pi i\xi)^n \widehat{f}(\xi)$, en c.t.p $\xi \in \mathbb{R}$.

□

En el siguiente teorema establecemos un resultado de inclusión entre el espacio de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$ y $C_0^k(\mathbb{R})$, que denota el espacio de las funciones de soporte compacto en \mathbb{R} con k derivadas continuas.

Teorema 11. (Inclusión). Si $s > 1/2 + k$, $k \in \mathbb{N}_0$, entonces $H^s(\mathbb{R})$ está incluido continuamente en $C_0^k(\mathbb{R})$, y además existe una constante positiva C_s que depende de s tal que

$$\|f\|_{C^k} \leq C_s \|f\|_{s,2}.$$

En otras palabras, si $f \in H^s(\mathbb{R})$, $s > 1/2 + k$, entonces $f \in C_0^k(\mathbb{R})$.

Demostración. Supongamos que $k = 0$. Demostraremos primero que si $f \in H^s(\mathbb{R})$ entonces $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ y además

$$\|\widehat{f}\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq C_s \|f\|_{s,2} \quad \text{si } s > 1/2.$$

En efecto, usando la desigualdad de Cauchy - Schwarz obtenemos para $s > 1/2$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)| d\xi &= \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)| (1 + |\xi|^2)^{s/2} \frac{d\xi}{(1 + |\xi|^2)^{s/2}} \\ &\leq \|\Lambda^s f\|_{L^2(\mathbb{R})} \left[\int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi}{(1 + |\xi|^2)^s} \right]^{1/2} \leq C_s \|f\|_{s,2}. \end{aligned}$$

Donde $\int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi}{(1 + |\xi|^2)^s} \leq C_s$, para $s > 1/2$. Así, $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.

Por tanto, combinando (2.2), la proposición 1 y el teorema ??, tenemos que

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \|(\check{\widehat{f}})\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|\widehat{f}\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq C_s \|f\|_{s,2}.$$

Ahora, si $k \geq 1$, entonces aplicando el mismo razonamiento, se sigue que si $f \in H^s(\mathbb{R})$ con $s > 1/2 + k$, para $n \in \mathbb{N}$, $n \leq k$, se tiene que $\widehat{f}^{(n)} \in L^1(\mathbb{R})$ y

$$\|f^{(n)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|\widehat{f}^{(n)}\|_{L^1(\mathbb{R})} = \|(2\pi i \xi)^n \widehat{f}\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq C_s \|f\|_{s,2}.$$

✓

Para la demostración del siguiente teorema del espacio de Sóbolev, demostraremos primero que se cumple la desigualdad

$$(a + b)^s \leq C_s (a^s + b^s),$$

donde $a, b, s \in \mathbb{R}^+$ y C_s es una constante positiva que depende de s . Sin pérdida de generalidad supongamos que $0 \leq a \leq b$. Entonces se cumple que:

$$(a + b)^s \leq (b + b)^s = 2^s b^s.$$

Por lo tanto obtenemos que $(a + b)^s \leq 2^s (a^s + b^s)$. En consecuencia, concluimos que

$$(a + b)^s \leq C_s (a^s + b^s), \quad \text{donde } C_s = 2^s. \quad (2.2)$$

Finalmente, demostremos que $H^s(\mathbb{R})$ es un álgebra de Banach para $s > 1/2$.

Definición 3. Un álgebra de Banach es un espacio de Banach X junto con un producto $(x, y) \in X \times X \mapsto xy \in X$ tal que, para todo $x, y, z \in X$ y para todos $z, r \in \mathbb{C}$

1. $(xy)z = x(yz)$.
2. $r(xy) = (rx)y = x(ry)$.
3. $(x + y)z = xz + yz$ y $x(y + z) = xy + xz$.

4. $\|xy\|_X \leq \|x\|_X \|y\|_X$.

Teorema 12. Si $s > 1/2$, entonces $H^s(\mathbb{R})$ es un álgebra con respecto al producto de funciones. Es decir, si $f, g \in H^s(\mathbb{R})$ entonces $fg \in H^s(\mathbb{R})$, y además existe una constante positiva C_s que depende de s tal que

$$\|fg\|_{s,2} \leq C_s \|f\|_{s,2} \|g\|_{s,2}.$$

Demostración. De la desigualdad triangular y (2.2) tenemos que para $\xi, \eta \in \mathbb{R}$,

$$(1 + |\xi|^2)^{s/2} \leq 2^s [(1 + |\xi - \eta|^2)^{s/2} + (1 + |\eta|^2)^{s/2}].$$

Luego, por la observación 7 obtenemos que

$$\begin{aligned} |\Lambda^s(fg)| &= |(1 + |\xi|^2)^{s/2} \widehat{(fg)}(\xi)| \\ &= (1 + |\xi|^2)^{s/2} \left| \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi - \eta) \widehat{g}(\eta) d\eta \right| \\ &\leq 2^s \int_{\mathbb{R}} [(1 + |\xi - \eta|^2)^{s/2} |\widehat{f}(\xi - \eta) \widehat{g}(\eta)| + (1 + |\eta|^2)^{s/2} |\widehat{f}(\xi - \eta) \widehat{g}(\eta)|] d\eta \\ &\leq 2^s (|\Lambda^s f| * |\widehat{g}| + |\widehat{f}| * |\Lambda^s g|). \end{aligned}$$

Así, usando la desigualdad de Young para convoluciones se tiene:

$$\|fg\|_{s,2} = \|\Lambda^s(fg)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C (\|\Lambda^s f\|_{L^2(\mathbb{R})} \|\widehat{g}\|_{L^1(\mathbb{R})} + \|\widehat{f}\|_{L^1(\mathbb{R})} \|\Lambda^s g\|_{L^2(\mathbb{R})}).$$

Ahora probemos que $\|\widehat{f}\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq C_s \|f\|_{s,2}$ si $s > 1/2$. En efecto, Usando la desigualdad de Cauchy - Schwarz obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)| d\xi &= \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)| (1 + |\xi|^2)^{s/2} \frac{d\xi}{(1 + |\xi|^2)^{s/2}} \\ &\leq \|\Lambda^s f\|_{L^2(\mathbb{R})} \left[\int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi}{(1 + |\xi|^2)^s} \right]^{1/2} \leq C_s \|f\|_{s,2}. \end{aligned}$$

Así, $\|\widehat{f}\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq C_s \|f\|_{s,2}$ si $s > 1/2$. En consecuencia, para $r > 1/2$,

$$\begin{aligned} \|fg\|_{s,2} &\leq C_s (\|f\|_{s,2} \|\widehat{g}\|_{L^1(\mathbb{R})} + \|\widehat{f}\|_{L^1(\mathbb{R})} \|g\|_{s,2}) \\ &\leq C_s (\|f\|_{s,2} \|g\|_{r,2} + \|f\|_{r,2} \|g\|_{s,2}). \end{aligned}$$

Por tanto, para $r = s$,

$$\|fg\|_{s,2} \leq C_s \|f\|_{s,2} \|g\|_{s,2}.$$

✓

Observación 10. Notemos que si $s \leq 1/2$, es posible que $f, g \in H^s(\mathbb{R})$ pero fg no necesariamente pertenece a $H^s(\mathbb{R})$. En particular, cuando $s = 0$, el espacio $H^0(\mathbb{R})$ coincide con el espacio $L^2(\mathbb{R})$, que en general no es cerrado bajo el producto de funciones, por ejemplo, consideremos las funciones

$$f(x) = g(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & \text{si } x \in (0, 1) \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus (0, 1). \end{cases}$$

Claramente $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Sin embargo,

$$\|fg\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)g(x)|^2 dx = \int_0^1 \frac{1}{x} dx,$$

y esta última integral es divergente. Por tanto, $fg \notin L^2(\mathbb{R})$.

Agradecimientos. R. Córdoba fue apoyado por la Universidad de Nariño (Colombia).

Referencias

- [1] H. Brezis, Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Universitext, (2011). [11](#)
- [2] K. Chandrasekharan, Classical Fourier Transforms. Springer–Verlag, (1989). [7](#)
- [3] C. Hao, Lecture Note on Harmonic Analysis, Institute of Mathematics, AMSS Chinese Academy of Sciences. (2020), 36-40. [5](#), [6](#)
- [4] F. Jones, Lebesgue Integration on Euclidean Space. Jones and Bartlett Publishers, United States of America, 2001. [6](#), [9](#)