

DELGADO Y JÁCOME. 2026. Localización de puntos correspondientes a algunos números reales de la recta. Revista Sigma, 23 (2). Páginas 20–49.

REVISTA SIGMA

Departamento de Matemáticas y Estadística

Volumen XXIII N^o 2 (2026), páginas 20–49

Universidad de Nariño

Localización de puntos correspondientes a algunos números reales en la recta

Leonel Delgado¹

Libardo Jácome²

Abstract: The Elementary Geometry course covers the Cantor-Dedekind axiom, which states that “there is a one-to-one correspondence between the real numbers and the points on a line.” The axiom became a theorem after Emil Artin proved it. This article presents some methods for finding the points on a line corresponding to certain real numbers. An unorthodox method is proposed for finding points corresponding to rational and irrational numbers, such as square roots of natural numbers. The points are found using a Euclidean ruler and compass in a finite number of steps. To demonstrate the validity of the procedure, the following theorems, among others, are applied: Fundamental Theorem of Parallelism. If three or more parallel lines determine congruent segments on a secant, then they determine congruent segments on any secant. Pythagorean Theorem. (Algebraic version). The square of the length of the hypotenuse of a right triangle is equal to the sum of the squares of the lengths of the legs. Theorem of the angle inscribed in a circle. The measure of an inscribed angle is equal to half the measure of the intercepted arc. Theorems of Similarity AA. If two angles of one triangle are congruent to two angles of another triangle, then the triangles are similar. Lagrange’s Four-Square Theorem. Every positive integer can be expressed as the sum of four squares of integers. The height of a right triangle relative to the hypotenuse is the mean proportional of the segments it divides on the hypotenuse.

Keywords. Correspondence, buildable number, geometric construction.

Resumen: En el curso de Geometría Elemental se estudia el axioma de Cantor-Dedekind que es una proposición que dice “existe una correspondencia biunívoca entre los números reales y los puntos de una recta”. El axioma pasó a ser teorema ya que Emil Artin lo demostró. En el presente artículo se exponen algunos métodos para encontrar los puntos correspondientes en una recta de algunos números reales. Se propone un método no ortodoxo para hallar puntos correspondientes a números racionales e irracionales como raíces cuadradas de números naturales. Los puntos se encuentran usando regla y compás euclidianos en un número finito de pasos. Para demostrar la validez del procedimiento se aplican entre otros los teoremas: Teorema fundamental del paralelismo. Si tres o más rectas paralelas determinan segmentos congruentes en una secante, entonces determinan

¹Departamento de Matemáticas, Universidad de Nariño, San Juan de Pasto, Colombia. Correo electrónico: lederudenar@gmail.com,

²Departamento de Matemáticas, Universidad de Nariño, San Juan de Pasto, Colombia. Correo electrónico: elo@udenar.edu.co,

segmentos congruentes sobre cualquier secante. Teorema de Pitágoras. (Versión algebraica). El cuadrado de la medida de la hipotenusa, de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos. Teorema del ángulo inscrito en una circunferencia. La medida de un ángulo inscrito es igual a la mitad de la medida del arco interceptado. Teoremas de semejanza AA. Si dos ángulos de un triángulo son congruentes a dos ángulos de otro triángulo, entonces los triángulos son semejantes. Teorema de los cuatro cuadrados de Lagrange. Todo entero positivo puede expresarse como la suma de cuatro cuadrados de números enteros. La altura de un triángulo rectángulo relativa al hipotenusa es media proporcional entre los segmentos que determina en ella.

Palabras Clave. Correspondencia, número construible, construcción geométrica.

1. Introducción

Cuando se trabaja con regla y compás se trazan rectas y circunferencias y en esta actividad se pueden presentar intersecciones entre rectas, entre circunferencias, entre una circunferencia y una recta.

La experiencia con la geometría analítica indica que el trabajo de intersecciones con rectas conduce a resolver ecuaciones de primer grado $ax + b = 0$, $a \neq 0$ y los otros dos casos de intersecciones generalmente conducen a ecuaciones de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$.

Las soluciones son:

$$x = -\frac{b}{a}, \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Para que estos números se puedan construir es fácil ver que a, b se puedan construir en el primer caso y que a, b, c se puedan construir en el segundo caso.

2. Puntos correspondientes a números naturales

El conjunto de los números naturales se denota por: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Sirven para contar y para estudiar sus propiedades.

Para hallar los puntos correspondientes a un número natural dado se usa una recta metrizada que consiste en una recta donde se da un punto arbitrario O que le corresponde el 0 y otro punto cualquiera A a la derecha de O que le corresponde al 1.

Ver figura 1.



Figura 1

Se dan los pasos para hallar el punto que corresponde al número n .

1. Se da la recta metrizada.

Localización de puntos correspondientes a algunos números reales en la recta

2. Con centro $A = A_1$ y radio \overline{AO} se traza la circunferencia c_1 que corta a la recta l en A_2 . A_2 es el punto que le corresponde a 2.
3. Con centro en A_2 y radio $\overline{A_2A_1}$ se traza una circunferencia c_2 que corta a la recta l en A_3 . A_3 es el punto que le corresponde a 3.
4. Con centro en A_3 y radio $\overline{A_3A_2}$ se traza una circunferencia c_3 que corta a la recta l en A_4 . A_4 es el punto que le corresponde a 4.

Se continúa este proceso

- n) Con centro en A_{n-1} y radio $\overline{A_{n-1}A_{n-2}}$ se traza una circunferencia c_{n-1} que corta la recta l en A_n . A_n es el punto correspondiente a n

En la figura 2 se encuentra el punto que corresponde al número 5.

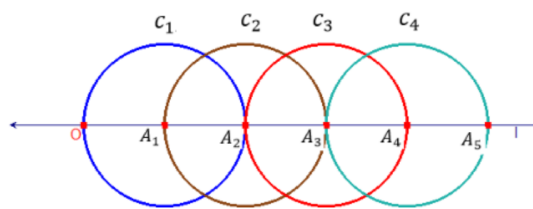


Figura 2

Para hallar el punto correspondiente a un número natural no necesariamente se debe seguir este camino. Si el número se considera grande se puede hasta cierto punto realizar el método anterior y luego trazar circunferencias de radio mayor para alcanzar en un número menor de pasos el punto deseado.

En la figura 3 se halla el punto correspondiente al número 8.

Los pasos que se realizan son:

1. Se da la recta metrizada.
2. Con centro A y radio \overline{AO} se traza la circunferencia c que corta a la recta l en B .
3. Con centro en B y radio \overline{BO} se traza una circunferencia d que corta a la recta l en C .
4. Con centro en C y radio \overline{CO} se traza una circunferencia e que corta a la recta l en D .

D es el punto que le corresponde a 8.

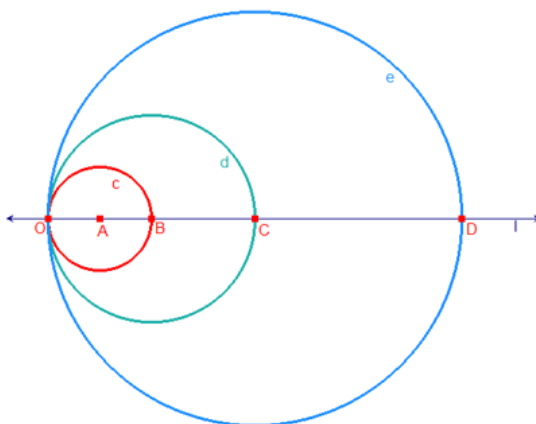


Figura 3

3. Puntos correspondientes a números enteros

El conjunto de los números enteros se denota por: $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Se pueden considerar como una ampliación de los números naturales para interpretar el mundo que rodea al ser humano a medida que surgen necesidades.

Temperaturas bajo cero, tiempos anteriores a un evento, deudas se pueden interpretar como cantidades negativas.

Cuando se traza una recta metrizada al punto arbitrario O se le asigna el cero y para encontrar el punto correspondiente a un número entero negativo se procede de manera similar al método de encontrar el punto correspondiente a un número natural solo que ahora a la izquierda de O .

Se halla en la recta metrizada el punto que corresponde al número -2 . Ver figura 4.

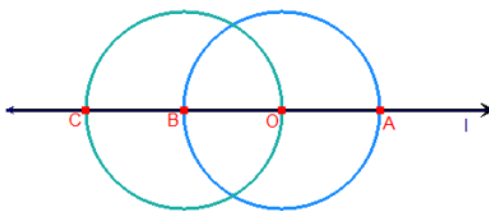


Figura 4

1. Se da la recta metrizada.
2. Con centro O y radio \overline{OA} se traza la circunferencia c que corta a la recta l en B .
3. Con centro B y radio \overline{BO} se traza la circunferencia d que corta a la recta l en C .

El punto C corresponde al número -2 .

4. Puntos correspondientes a números racionales

El conjunto de los números racionales se denota por $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$. Su expansión decimal es periódica. Se presentan algunos ejemplos de números racionales:

$$a = \frac{2}{5} = 0.4000, \quad b = 5.232323 \dots = 5.\overline{23}, \quad c = 9.27624624 \dots = 9.27624\overline{624}$$

Se halla el punto que corresponde a $\frac{2}{3}$ usando el teorema fundamental del paralelismo.

1. Se da la recta metrizada.
2. Se traza el rayo \overrightarrow{OB} que no coincida con l .
3. Con centro B y radio \overline{BO} se traza la circunferencia c que corta a \overrightarrow{OB} en C .
4. Por C se traza una recta paralela a l . Con centro C y radio \overline{CB} se traza la circunferencia d que corta a \overrightarrow{OB} en D .
5. Se traza \overline{AD} .
6. Se traza una recta paralela a \overline{AD} que corta a l en E .

El punto E corresponde al número $\frac{2}{3}$.

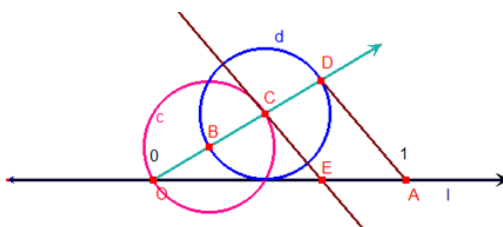


Figura 5

4.1. Construcción de puntos correspondientes a números de la forma $\frac{1}{2^n}$

4.1.1 Construcción del punto medio de un segmento

1. Trazar \overline{AB} .
2. Con centro A y radio \overline{AB} se traza una $\odot c$.
3. Con centro B y radio \overline{BA} se traza una $\odot d$ que corta a c en P, Q .
4. Se traza \overleftrightarrow{PQ} que corta a \overline{AB} en M .

M es el punto medio del segmento \overline{AB} . Ver figura 6.

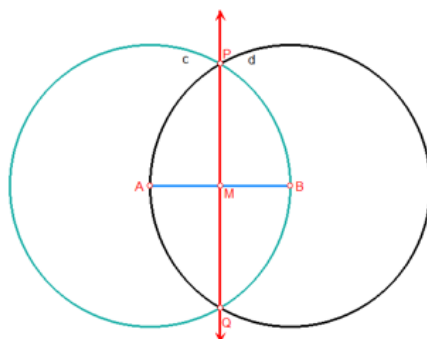


Figura 6

En la recta metrizada r usando la construcción del punto medio se puede hallar reiteradamente los puntos:

B punto medio de \overline{OA} que corresponde al número racional $\frac{1}{2}$

C punto medio de \overline{OB} que corresponde al número racional $\frac{1}{4}$

D punto medio de \overline{BA} que corresponde al número racional $\frac{3}{4}$

E punto medio de \overline{OC} que corresponde al número racional $\frac{1}{8}$

Ver figura 7



Figura 7

4.2. Generación de puntos correspondientes a los números de la sucesión armónica

La sucesión armónica está dada por el conjunto $\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$.

1. Se trazan las rectas metrizadas m, n perpendiculares entre sí.
2. Se construye el cuadrado $OABC$ de lado de longitud 1.
3. Se construye el punto X correspondiente al número $\frac{1}{s}$, s es número natural.
4. Se traza la circunferencia de centro O y radio \overline{OX} que corta a n en Y .
5. Se traza \overline{YB} que corta a m en Z .

Se tiene que $OZ = \frac{1}{s+1}$

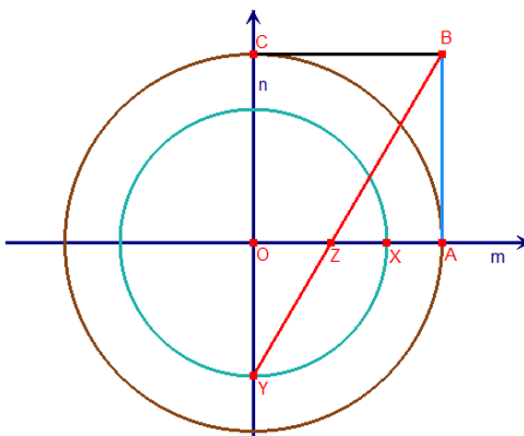


Figura 8

Demostración. Sean $OZ = z$, $OY = OX = \frac{1}{s}$, $OA = 1$

$\triangle OZY \sim \triangle AZB$ Por tener respectivamente ángulos rectos y ángulos opuestos por el vértice. Por ello se puede establecer la proporción:

$$\frac{OZ}{AZ} = \frac{OY}{AB}$$

Reemplazando se tiene:

$$\frac{z}{1-z} = \frac{\frac{1}{s}}{1} = \frac{1}{s}$$

Se procede a despejar z .

$$zs = 1 - z, zs + z = 1, z = \frac{1}{s+1}$$

Aplicando el método anterior, la figura 9 muestra los puntos A, B, C, D, E correspondientes a los números racionales $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$.

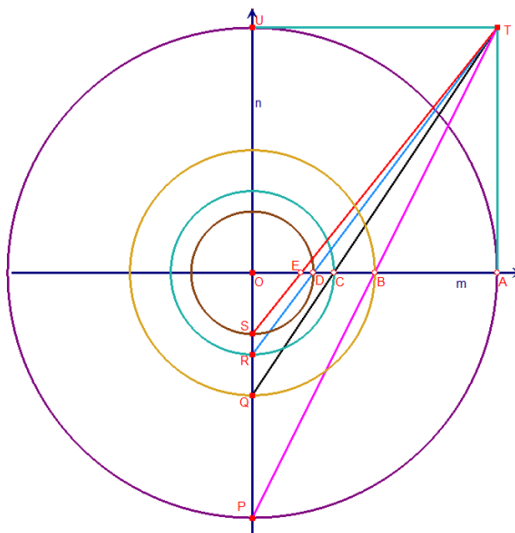


Figura 9

5. Puntos correspondientes de algunos números irracionales

Números reales. $\mathbb{R} = \{x \mid x = E.d_1d_2d_3 \dots \text{ donde } E \in \mathbb{Z}, d_i \in D\}$

E es la parte entera, $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Números irracionales. Son números de expansión decimal no periódica.

Se halla el punto que corresponde a $\sqrt{3}$.

1. Se dan las rectas perpendiculares metrizadas m, n .
2. Con centro O y radio \overline{OA} se traza la circunferencia c .
3. Con centro A y radio \overline{AO} se traza la circunferencia d que corta a c en P, Q .
4. Se traza \overline{PQ} .
5. Se traza \overline{OP} .
6. Por Q se traza la recta t paralela a \overline{OP} , que corta a n en R .

El punto R corresponde al número $\sqrt{3}$.

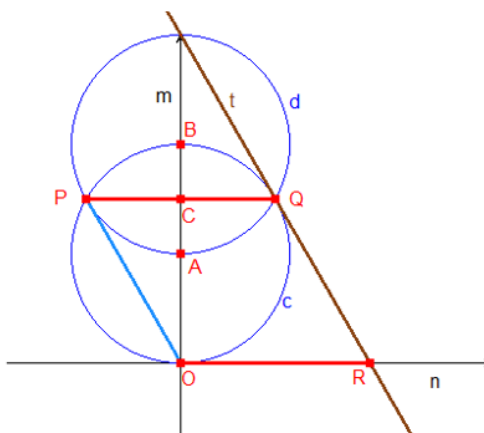


Figura 10

Demostración. La altura del triángulo equilátero ABP es

$$PC = \frac{\sqrt{3}}{2}OA = \frac{\sqrt{3}}{2}(1) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$PQ = 2PC = \sqrt{3}$$

El cuadrilátero $ORQP$ es un paralelogramo de modo que $OR = PQ = \sqrt{3}$.

5.1. Generación de raíces cuadradas de números naturales

5.1.1 Método 1 Se traza una recta metrizada m

Se construyen los triángulos rectángulos $ABC, ACD, ADE, AEF, AFG, AGH$ donde $AB = BC = CD = DE = EF = FG = GH = 1$.

Ver figura 11.

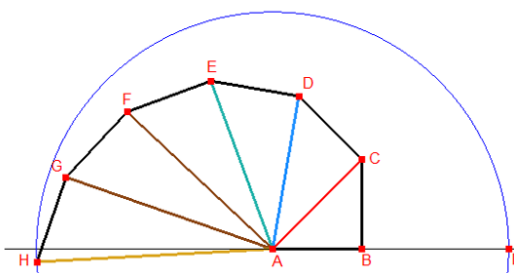


Figura 11

De esta manera, aplicando el Teorema de Pitágoras en versión algebraica se tiene:

$$AC = \sqrt{2}$$

$$AD = \sqrt{3}$$

$$AE = \sqrt{4}$$

$$AF = \sqrt{5}$$

$$AG = \sqrt{6}$$

$$AH = \sqrt{7}$$

...

Se traza la circunferencia de centro A y radio AH que corta la recta metrizada en I . En este caso I corresponde a $\sqrt{7}$.

5.1.2 Método 2.

1. Se construye la recta metrizada m .
2. Se construye el $\triangle OAB$ rectángulo en A , $OA = AB = 1$ y así $OB = \sqrt{2}$.
3. Se construye el $\triangle OCD$ rectángulo en C , $OC = OB = \sqrt{2}$, $CD = 1$, y por tanto, $OE = OD = \sqrt{3}$.

Continuando el proceso se obtiene:

$$OG = OF = \sqrt{4}$$

$$OI = OH = \sqrt{5}$$

Ver figura 12.

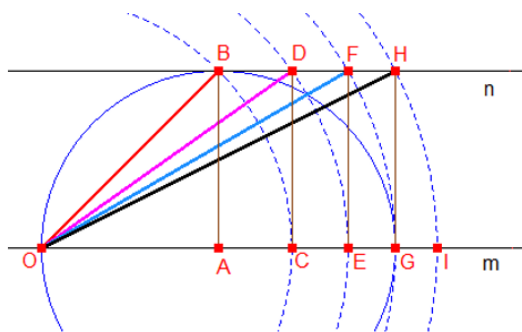


Figura 12

5.1.3 Método 3. Con la altura relativa a la hipotenusa de un triángulo rectángulo.

En la figura 13 se tiene que $OA = AC = CE = EG = GI = 1$.

M punto medio de OE .

N punto medio de OI .

c) Circunferencia con centro A y radio AO

d) Circunferencia con centro M y radio MO

e) Circunferencia con centro C y radio CO

f) Circunferencia con centro N y radio NO

Según el teorema 6

$$AB = \sqrt{AO \cdot AC} = \sqrt{1 \cdot 1} = 1 = OX$$

$$CD = \sqrt{CE \cdot CO} = \sqrt{1 \cdot 2} = \sqrt{2} = OY$$

$$EF = \sqrt{EG \cdot EO} = \sqrt{1 \cdot 3} = \sqrt{3} = OZ$$

$$GH = \sqrt{GI \cdot GO} = \sqrt{1 \cdot 4} = \sqrt{4} = 2 = OU$$

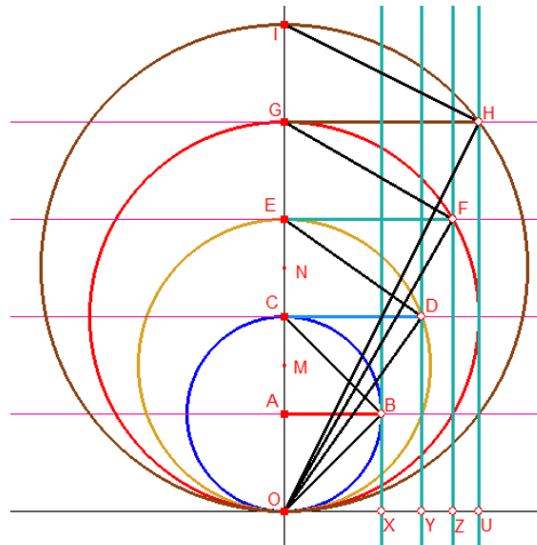


Figura 13

5.1.4 Método 4. Usando el teorema de los cuatro cuadrados de Lagrange, también conocido como la conjetura de Bachet se demostró en 1770 por Joseph Louis Lagrange.

El teorema afirma que:

$$n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \quad \text{donde } n, a, b, c, d \in \mathbb{N}.$$

Se dan los ejemplos:

$$30 = 16 + 9 + 4 + 1 = 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2$$

$$26 = 9 + 9 + 4 + 4 = 3^2 + 3^2 + 2^2 + 2^2$$

Nótese que en este caso se puede reducir el proceso a un número inferior de sumandos.

$$26 = 16 + 9 + 1 = 4^2 + 3^2 + 1^2$$

$$26 = 25 + 1 = 5^2 + 1^2$$

Si se quiere hallar el punto correspondiente al número \sqrt{n} donde n es número natural que no es cuadrado perfecto, se traza una recta metrizada m . Se halla el punto correspondiente al número a que en este caso es A . Se construye el triángulo rectángulo OAB donde $AB = b$. Se construye el triángulo rectángulo OBC donde $BC = c$. Se construye el triángulo rectángulo OCD donde $CD = d$.

Finalmente se traza una circunferencia de centro en O y radio OD que corta a m en E .

En la figura 14 el punto E corresponde al número \sqrt{n} .

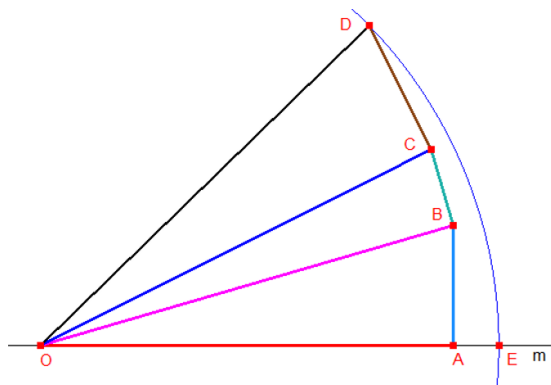


Figura 14

Ejemplo. Calcular $\sqrt{21}$ usando el teorema de Lagrange.

Se descompone 21 como:

$$21 = 2^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2$$

- 1) Se construye el triángulo rectángulo de catetos $OA = 2$, $AB = 2$ y de esta manera la hipotenusa tendrá como valor $OB = \sqrt{8}$
- 2) Se construye el triángulo rectángulo de catetos $OB = \sqrt{8}$, $BC = 2$ y de esta manera la hipotenusa tendrá como valor $OC = \sqrt{12}$
- 3) Se construye el triángulo rectángulo OCD donde $OC = \sqrt{12}$, $CD = 3$
De modo que $OD = \sqrt{21}$

Se traza una circunferencia c de centro O y radio OD que corta a m en E .
 E es el punto correspondiente a $\sqrt{21}$. Ver figura 15

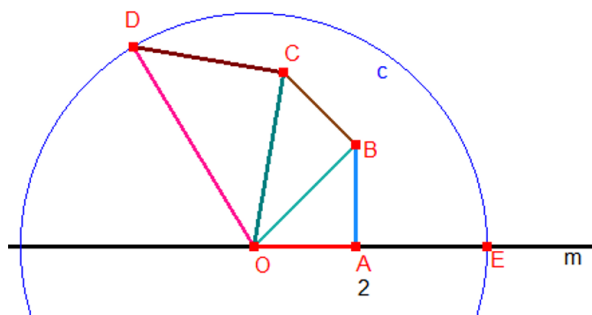


Figura 15

6. Puntos correspondientes a raíces de índice potencia de dos de números naturales

Para sacar raíz de índice una potencia de 2 de un número construible a que se puede construir con regla y compás se usan los pasos siguientes:

1. Sea la recta metrizada m .
2. Se halla B, A en m que corresponde a $-a, 1$ respectivamente.
3. Por O se traza $n \perp m$, n recta metrizada con la misma unidad de medida de m .
4. Sea M punto medio de \overline{OU} .
5. Se traza la circunferencia c con centro M y radio \overline{MA} que corta a n en C .
 C es el punto que corresponde a \sqrt{a} en la recta metrizada n .
6. Se halla en m el punto D correspondiente a $-\sqrt{a}$.
7. Se halla el punto medio N de \overline{DA} .
8. Se traza la circunferencia d con centro N y radio \overline{NA} que corta a n en E .
 E es el punto que corresponde a $\sqrt{\sqrt{a}} = \sqrt[4]{a}$.
9. Se halla en m el punto H correspondiente a $-\sqrt[4]{a}$.
10. Se halla el punto medio P de \overline{HA} .
11. Se traza la circunferencia e con centro P y radio \overline{PA} que corta a n en F .
 F es el punto que corresponde a $\sqrt{\sqrt[4]{a}} = \sqrt[8]{a}$.

Se repite el proceso para hallar $\sqrt{\sqrt[8]{a}}$ hasta la potencia requerida.

Ver figura 16.

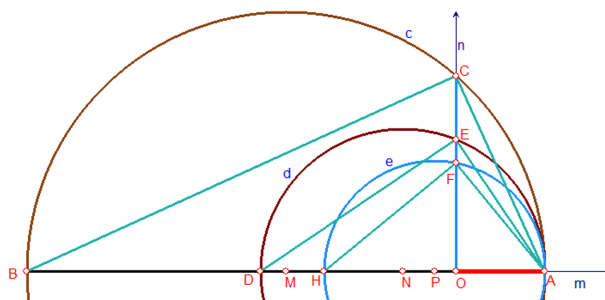


Figura 16

Demostración.

El $\triangle ACB$ es rectángulo en C ya que este ángulo está inscrito en una semicircunferencia y OC es media proporcional entre OB , OA por ello

$$OC^2 = OB \cdot OA = a \cdot 1 = a, \quad OC = \sqrt{a}.$$

Lo mismo se aplica para calcular OE , OF .

7. Método alternativo para encontrar raíces cuadradas de números naturales

Los procesos geométricos que se están aplicando surgen de conceptos básicos de geometría y el apoyo esencial de GeoGebra. En algunos procesos se tiene un objetivo específico como es el de la trisección de un ángulo, el cuál es “imposible” realizarlo geoméricamente con regla y compás. Con este objetivo se han creado diversas construcciones en el software que en todas ellas no se ha alcanzado el objetivo y que “de ninguna manera se va a lograr”. En estas construcciones se han encontrado segmentos que de manera diferente a la teoría del paralelismo quedan divididos en tres partes iguales y como se encontró otra manera de trisecar un segmento se ha creado teoría sobre este tema que se han plasmado en artículos y son parte de la introducción de un texto que se encuentra en revisión. Logrando trisecar un segmento de múltiples formas nos propusimos trisecar áreas de círculos, cuadrados, triángulos. Trisecado un segmento, se viene un nuevo reto en dividir un segmento en varias partes iguales y se logra con construcciones de círculos de radio dicho segmento y apoyados en el plano cartesiano que es proceso que nos impulsó a realizar un artículo sobres este tema. Al observar, que dividir un segmento en n partes iguales corresponde a ubicar los números racionales en la recta numérica, el reto es buscar un método geométrico diferente al que se aplica usando el Teorema de Pitágoras para ubicar las raíces cuadradas de los números naturales. Esto, ya se había trabajado mediante un proceso de dividir el área de un círculo en n franjas o “anillos” de igual área y una propiedad que el profesor Fernando Soto aplico al solicitarle asesoría sobre este tema, “Si se tiene un círculo de radio r , se puede encontrar la mitad, la tercera, la cuarta parte del área de dicho círculo, dividiendo el radio con puntos correspondientes a \sqrt{n} , donde n es la fracción del área del círculo que se quiere encontrar”. Con esta idea se genera y se logra la ubicación de \sqrt{n} , $n \in \mathbb{N}$ en la recta numérica.

7.1. Construcción del punto correspondiente a $\sqrt{2}$

Se expresa 2 como $2 = 1 + 1 = 1^2 + 1^2*$

1. Se dan las rectas perpendiculares m , n metrizadas con la misma unidad de medida que se cortan en O .
2. En m se halla el punto A correspondiente a $\frac{r}{1}$ donde $r = 2$ y 1 es el primer 1 en la expresión *. (en este caso se aplica la localización de puntos en la recta metrizada correspondientes a los números naturales)
3. En n se halla el punto B correspondiente a $\frac{r}{1}$ donde $r = 2$ y 1 es el segundo 1 en la expresión *. (Se puede trazar una circunferencia c con centro en O y radio \overline{OA} que corta a n en B)
4. Se traza \overline{AB} .
5. Por O se traza la recta p perpendicular a \overline{AB} con punto de corte C .
6. Se traza la circunferencia d con centro en O y radio \overline{OC} que corta a m en D .

El punto D corresponde a $\sqrt{2}$.

Ver figura 17

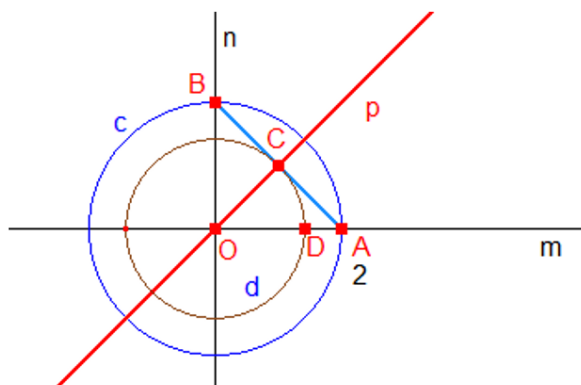


Figura 17

Demostración. En la figura se tiene que $\triangle ACO \sim \triangle AOB$ por tener 2 ángulos congruentes. Se puede establecer la proporción.

$$\frac{OC}{OA} = \frac{OA}{AB}, \quad OC = \frac{(OA)^2}{AB} = \frac{4}{\sqrt{8}} = \frac{4\sqrt{8}}{8} = \sqrt{2}$$

En la gráfica $OD = OC = \sqrt{2}$.

7.2. Construcción del punto correspondiente a $\sqrt{3}$

Se expresa 3 como $3 = 2 + 1 = (\sqrt{2})^2 + 1^2$ *

1. Se dan las rectas perpendiculares m , n metrizadas con la misma unidad de medida que se cortan en O .
2. En m se halla el punto T correspondiente a 3.
3. Se traza una circunferencia c con centro O y radio \overline{OT} que corta a n en B .
4. Se construye el cuadrado $OTCB$.
5. Se traza la circunferencia d de centro O y radio \overline{OC} que corta a m en A .
6. Se halla el punto medio M de \overline{OA} .
7. Se traza \overline{BM} .
8. Por O se traza la recta p perpendicular a \overline{BM} con punto de corte D .
9. Se traza la circunferencia e con centro en O y radio \overline{OD} que corta a m en E .

El punto E corresponde a $\sqrt{3}$.

Ver figura 18.

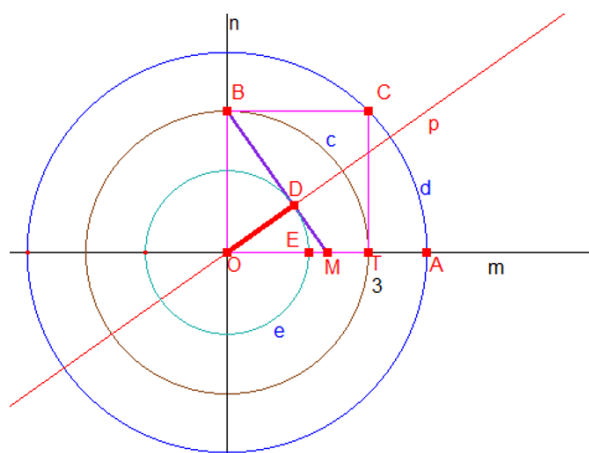


Figura 18

Demostración. En la figura se tiene que $\triangle MDO \sim \triangle MOB$ por tener 2 ángulos congruentes. Se puede establecer la proporción.

$$\frac{OD}{OB} = \frac{OM}{BM}, \quad OD = \frac{OB \cdot OM}{BM}$$

$$OB = 3, \quad OA = 3\sqrt{2}, \quad OM = \frac{3\sqrt{2}}{2}, \quad BM = \sqrt{OB^2 + OM^2} = \sqrt{3^2 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

De modo que:

$$OD = \frac{3 \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2}}{\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} = \sqrt{3}$$

Pero $OE = OD = \sqrt{3}$.

En la figura el punto M corresponde al número $\frac{r}{\sqrt{2}} = \frac{r\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ y el punto B corresponde al número $\frac{r}{1} = 3$.

Los números $\sqrt{2}$ y 1 son los números que aparecen en la descomposición * como bases.

7.3. Construcción del punto correspondiente a $\sqrt{4}$

Se expresa 4 como $4 = 2 + 2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2$ *

1. Se dan las rectas perpendiculares m , n metrizadas con la misma unidad de medida que se cortan en O .
2. En m se halla el punto T correspondiente a 4.
3. Se traza una circunferencia c con centro O y radio \overline{OT} que corta a n en B .
4. Se construye el cuadrado $OTCB$.
5. Se traza la circunferencia d de centro O y radio \overline{OC} que corta a m , n en A , D respectivamente.
6. Se hallan los puntos medios M , N de \overline{OA} y \overline{OD} respectivamente.
7. Se traza \overline{MN} .
8. Por O se traza la recta p perpendicular a \overline{MN} con punto de corte E .
9. Se traza la circunferencia e con centro en O y radio \overline{OE} que corta a m en F .

El punto F corresponde a $\sqrt{4}$.

Ver figura 19.

3. Se traza una circunferencia c con centro O y radio \overline{OT} que corta a n en B .
4. Se halla el punto medio M de \overline{OT} .
5. Se traza \overline{MB} .
6. Por O se traza la recta p perpendicular a \overline{MB} con punto de corte D .
7. Se traza la circunferencia d con centro en O y radio \overline{OD} que corta a m en E .

El punto E corresponde a $\sqrt{5}$.

Ver figura 20.

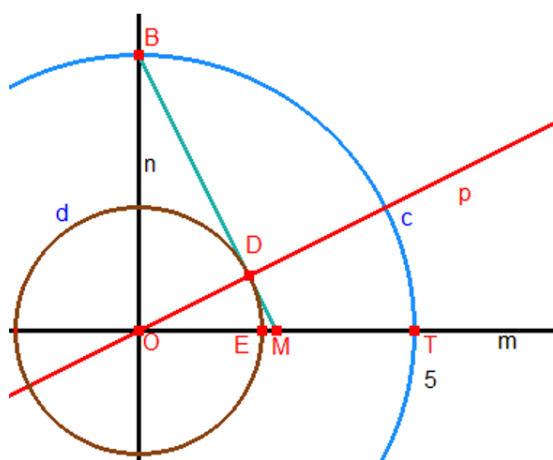


Figura 20

Demostración. En la figura se tiene que $\triangle MDO \sim \triangle MOB$ por tener 2 ángulos congruentes. Se puede establecer la proporción.

$$\frac{OD}{OB} = \frac{OM}{BM}, \quad OD = \frac{OB \cdot OM}{BM}$$

$$OM = \frac{5}{2}, \quad OB = 5, \quad BM = \sqrt{(OM)^2 + (OB)^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 5^2} = \frac{5\sqrt{5}}{2}$$

De modo que:

$$OD = \frac{5 \cdot \frac{5}{2}}{\frac{5\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{5}$$

Pero $OE = OD = \sqrt{5}$.

En la figura el punto M corresponde al número $\frac{r}{2} = \frac{5}{2}$ y el punto B corresponde al número $\frac{r}{1} = \frac{5}{1} = 5$.

Los números 2 y 1 son los números que aparecen en la descomposición * como bases.

7.5. Construcción del punto correspondiente a $\sqrt{6}$

Se expresa 6 como $6 = 2 + 4 = (\sqrt{2})^2 + 2^2$ *

1. Se dan las rectas perpendiculares m, n metrizadas con la misma unidad de medida que se cortan en O .
2. Se hallan en m, n los puntos correspondientes a $\frac{r}{\sqrt{2}} = \frac{r\sqrt{2}}{2} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$ y $\frac{r}{2} = \frac{6}{2} = 3$ respectivamente, denotados por M, N .
3. En m se halla el punto T correspondiente a 6.
4. Se traza una circunferencia c con centro O y radio \overline{OT} que corta a n en B .
5. Se construye el cuadrado $OTCB$.
6. Se traza la circunferencia d con centro O y radio \overline{OC} que corta a m en A .
7. Se halla el punto medio M de \overline{OA} y el punto medio N de \overline{OB} .
8. Se traza \overline{MN} .
9. Por O se traza la recta p perpendicular a \overline{MN} con punto de corte D .
10. Se traza la circunferencia e con centro en O y radio \overline{OD} que corta a m en E .

El punto E corresponde a $\sqrt{6}$.

Ver figura 21

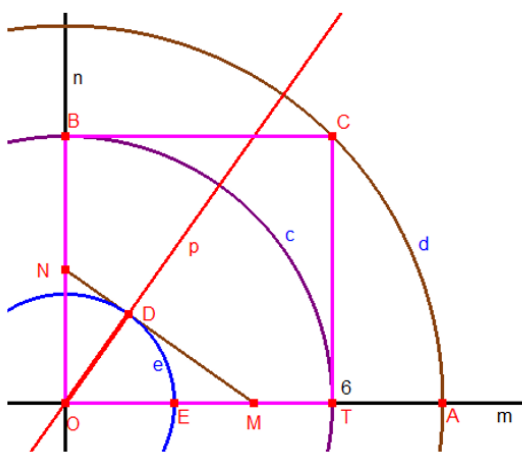


Figura 21

Demostración. En la figura se tiene que $\triangle MDO \sim \triangle MON$ por tener 2 ángulos congruentes. Se puede establecer la proporción.

$$\frac{OD}{ON} = \frac{OM}{MN}, \quad OD = \frac{ON \cdot OM}{MN}$$

$$OM = 3\sqrt{2}, \quad ON = 3, \quad MN = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + 3^2} = 3\sqrt{3}$$

De modo que:

$$OD = \frac{3 \cdot (3\sqrt{2})}{3\sqrt{3}} = \sqrt{6}$$

Pero $OE = OD = \sqrt{6}$.

En la figura el punto M corresponde al número $\frac{r}{2} = \frac{5}{2}$ y el punto B corresponde al número $\frac{r}{1} = \frac{5}{1} = 5$.

Los números 2 y 1 son los números que aparecen en la descomposición * como bases.

7.6. Construcción del punto correspondiente a $\sqrt{7}$

Se expresa 7 como $7 = (2 + 1) + 4 = ((\sqrt{2})^2 + 1^2) + 2^2*$

1. Se dan las rectas perpendiculares m , n metrizadas con la misma unidad de medida que se cortan en O .
2. En m se halla el punto T correspondiente a 7.
3. Se traza una circunferencia c con centro O y radio \overline{OT} que corta a n en B .
4. Se construye el cuadrado $OTCB$.
5. Se traza la circunferencia d con centro O y radio \overline{OC} que corta a m en A .
6. Se halla el punto medio M de \overline{OA} , y el punto medio N de \overline{OB} .
7. Se traza \overline{MB} .
8. Por O se traza la recta p perpendicular a \overline{MB} con punto de corte D .
9. Se traza la circunferencia e con centro en O y radio \overline{OD} que corta a m en E .
10. Se traza \overline{EN} .
11. Por O se traza la recta q perpendicular a \overline{EN} con punto de corte F .
12. Se traza la circunferencia f con centro en O y radio \overline{OF} que corta a m en G .

El punto G corresponde a $\sqrt{7}$.

Ver figura [22](#).

$$OF = \frac{\frac{7}{2} \cdot \left(\frac{7\sqrt{3}}{3}\right)}{7\sqrt{\frac{7}{12}}} = \sqrt{7}$$

Pero $OG = OF = \sqrt{7}$

7.7. Construcción del punto correspondiente a $\sqrt{8}$

Se expresa 8 como $8 = 4 + 4 = 2^2 + 2^2$ *

1. Se dan las rectas perpendiculares m, n metrizadas con la misma unidad de medida que se cortan en O .
2. En m se halla el punto T correspondiente a 8.
3. Se traza una circunferencia c con centro O y radio \overline{OT} que corta a n en B .
4. Se hallan los puntos medios M, N de \overline{OA} y \overline{OB} respectivamente.
5. Se traza \overline{MN} .
6. Por O se traza la recta p perpendicular a \overline{MN} con punto de corte E .
7. Se traza la circunferencia d con centro en O y radio \overline{OE} que corta a m en F .

El punto F corresponde a $\sqrt{8}$.

Ver figura 23.

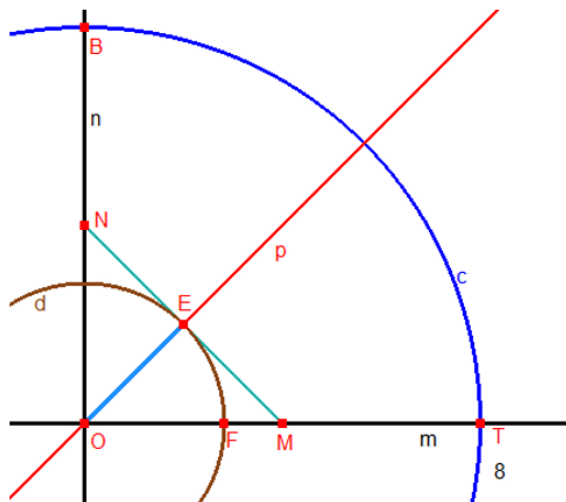


Figura 23

Demostración. En la figura se tiene que $\triangle MEO \sim \triangle MON$ por tener 2 ángulos congruentes. Se puede establecer la proporción.

$$\frac{OE}{OM} = \frac{OM}{MN}, \quad OE = \frac{OM \cdot OM}{MN}$$

$$OM = 4, \quad MN = \sqrt{OM^2 + ON^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$$

De modo que:

$$OE = \frac{4 \cdot 4}{4\sqrt{2}} = \sqrt{8}$$

Pero $OF = OE = \sqrt{8}$.

En la figura el punto M corresponde al número $\frac{r}{2} = \frac{8}{2} = 4$ y el punto N corresponde al número $\frac{r}{2} = \frac{8}{2} = 4$.

Los números 2 y 2 son los números que aparecen en la descomposición * como bases.

7.8. Construcción del punto correspondiente a $\sqrt{9}$

Se expresa 9 como $9 = 1 + 4 + 4 = 1^2 + 2^2 + 2^2 = (1^2 + 2^2) + 2^2*$

1. Se dan las rectas perpendiculares m , n metrizadas con la misma unidad de medida que se cortan en O .
2. En m se halla el punto A correspondiente a 9.
3. Se traza una circunferencia c con centro O y radio \overline{OA} que corta a n en B .
4. Se halla el punto medio N de \overline{OB} .
5. Se traza \overline{NA} .
6. Por O se traza la recta p perpendicular a \overline{NA} con punto de corte D .
7. Se traza la circunferencia d con centro en O y radio \overline{OD} que corta a m en E .
8. Se traza \overline{EN} .
9. Por O se traza la recta q perpendicular a \overline{EN} con punto de corte F .
10. Se traza la circunferencia e con centro en O y radio \overline{OF} que corta a m en G .

El punto G corresponde a $\sqrt{9}$.

Ver figura [24](#)

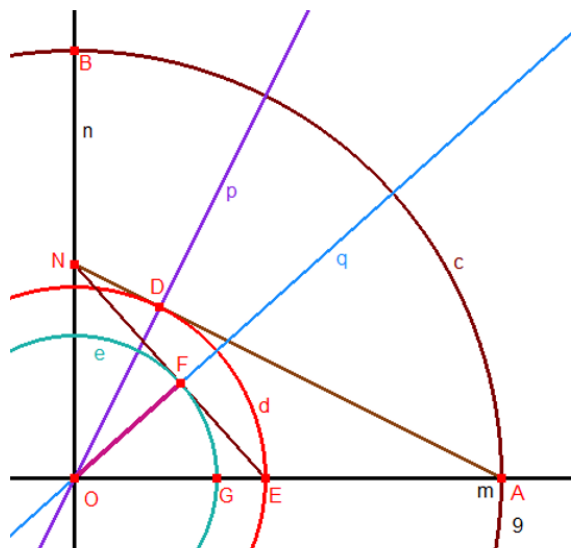


Figura 24

Demostración. En la figura se tiene que $\triangle ADO \sim \triangle AON$ por tener 2 ángulos congruentes. Se puede establecer la proporción.

$$\frac{OD}{ON} = \frac{OA}{AN}, OD = \frac{OA \cdot ON}{AN}$$

$$OA = 9, ON = \frac{9}{2}, AN = \sqrt{(OA)^2 + (ON)^2} = \sqrt{(9)^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2} = \frac{9}{2}\sqrt{5}$$

De modo que:

$$OD = \frac{OA \cdot ON}{AN} \quad OD = \frac{9 \cdot \left(\frac{9}{2}\right)}{\frac{9}{2}\sqrt{5}} = \frac{9\sqrt{5}}{5}$$

Pero $OE = OD = \frac{9\sqrt{5}}{5}$

En la figura se tiene que $\triangle EFO \sim \triangle EON$ por tener 2 ángulos congruentes. Se puede establecer la proporción.

$$\frac{OF}{ON} = \frac{OE}{NE}, \quad OF = \frac{ON \cdot OE}{NE}$$

$$ON = \frac{9}{2}, \quad OE = \frac{9\sqrt{5}}{5}, \quad NE = \sqrt{(ON)^2 + (OE)^2} = \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{9\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{27\sqrt{5}}{10}$$

De modo que:

$$OF = \frac{\frac{9}{2} \left(\frac{9\sqrt{5}}{5} \right)}{\frac{27\sqrt{5}}{10}} = 3$$

Pero $OG = OF = \sqrt{9}$.

Observación. Como se ve en la construcción alternativa los números naturales se descomponen de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} 2 &= 2 \\ 3 &= 2 + 1 \\ 4 &= 2^2 \\ 5 &= (2)^2 + 1 \\ 6 &= 2^2 + 2 \\ 7 &= 2^2 + 2 + 1 \\ 8 &= 2(2)^2 \\ 9 &= 2(2)^2 + 1 \\ 10 &= 4 + 4 + 2 = 2(2)^2 + 2 \\ 11 &= 4 + 4 + 2 + 1 = 2(2)^2 + 2 + 1 \\ 12 &= 4 + 4 + 4 = 3(2)^2 \\ 13 &= 4 + 4 + 4 + 1 = 3(2)^2 + 1 \\ 14 &= 4 + 4 + 4 + 2 = 3(2)^2 + 2 \\ 15 &= 4 + 4 + 4 + 2 + 1 = 3(2)^2 + 2 + 1 \\ 16 &= 4 + 4 + 4 + 4 = 4(2)^2 \\ 17 &= 4 + 4 + 4 + 4 + 1 = 4(2)^2 + 1 \\ 18 &= 4 + 4 + 4 + 4 + 2 = 4(2)^2 + 2 \\ 19 &= 4 + 4 + 4 + 4 + 3 = 4(2)^2 + 2 + 1 \\ 20 &= 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 5(2)^2 \\ &\dots \\ 100 &= 25(2)^2 \\ 2025 &= 506(2)^2 \end{aligned}$$

De los anteriores ejemplos se puede establecer el teorema siguiente:

Teorema. Todo número natural n se puede expresar en la forma:

$$n = \begin{cases} c(2^2) \\ c(2^2) + 1 \\ c(2^2) + 2 \\ c(2^2) + 2 + 1 \end{cases} \quad c \in \mathbb{N}$$

Demostración.

Realizando la división entera al dividir n entre 4 se tiene:

$$n = 4c + r, \quad r = 0, 1, 2, 3$$

Si $r = 0, n = 4c = c(2^2)$

si $r = 1, n = 4c + 1 = c(2^2) + 1$

si $r = 2, n = 4c + 2 = c(2^2) + 2$

si $r = 3, n = 4c + 3 = c(2^2) + 2 + 1$

Dado que se han encontrado los puntos correspondientes a a, b se pueden construir los puntos correspondientes a $a + b, a - b, ab, \frac{a}{b}, \sqrt{a}$, etc.

8. Suma de números construibles

Sean a, b números construibles y m, n , rectas metrizadas paralelas con la misma unidad de medida, P el punto en m que corresponde a a , R el punto en n correspondiente a b . Por R se traza la recta t paralela a \overline{PQ} que corta a m en S .

El punto S representa al número $a + b$.

Ver figura 25.

Ver figura 25.

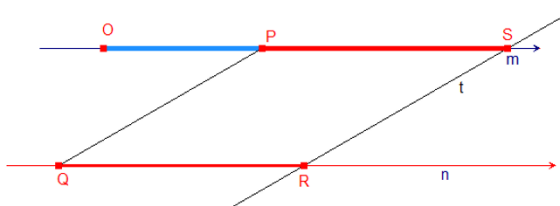


Figura 25

9. Resta de números construibles

Sean a, b números construibles y m, n rectas metrizadas paralelas con la misma unidad de medida, P el punto en m que corresponde a a , R el punto en n correspondiente a b . Se traza \overline{RP} . Por R se traza la recta t paralela a \overline{RP} que corta a m en S .

El punto S representa al número $a - b$.

Si S está a la izquierda de O , $a - b$ es negativo. Si $S = 0$, $a - b = 0$. Si S está a la derecha de O , $a - b$ es positivo.

Ver figura 26

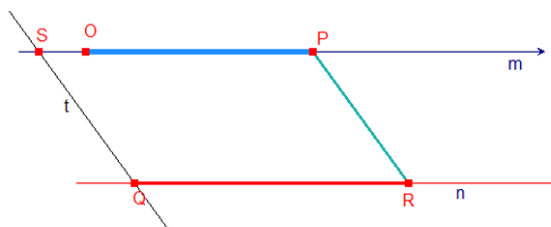


Figura 26

10. Producto de números construibles

Sean a, b números construibles y $\overline{OA}, \overline{OB}$ segmentos ubicados en rectas perpendiculares m, n tales que $OA = a, OB = b$. Se ubica en n un punto U tal que $OU = 1$. Se traza \overline{AU} .

Por B se traza una recta paralela a \overline{AU} que corta a m en C .

En la gráfica se tiene que $\triangle OAU \sim \triangle OCB$ por tener dos ángulos congruentes y por ello se puede establecer la proporción

$$\frac{OA}{OU} = \frac{OC}{OB}$$

Reemplazando se tiene:

$$\frac{a}{1} = \frac{x}{b}$$

Es decir $x = ab$. El punto C representa al número ab .

Ver figura 27

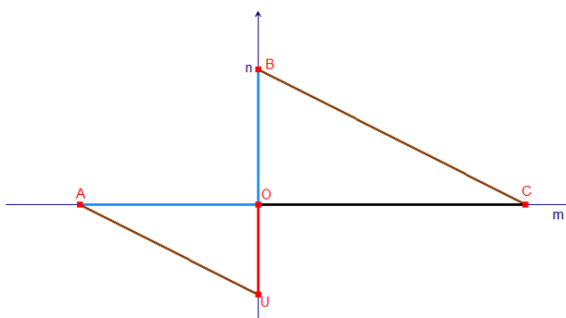


Figura 27

11. Cociente de números construibles

Sean a, b números construibles y $\overline{OA}, \overline{OB}$ segmentos ubicados en rectas perpendiculares m, n tales que $OA = a, OB = b$. Se traza \overline{AB} . Se ubica en n un punto U tal que $OU = 1$.

Localización de puntos correspondientes a algunos números reales en la recta

Por U se traza una recta paralela a \overline{AB} que corta a m en C .

En la gráfica se tiene que $\triangle OAB \sim \triangle OCU$ por tener dos ángulos congruentes y por ello se puede establecer la proporción:

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OU}$$

Reemplazando se tiene:

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{1}$$

Es decir $x = \frac{a}{b}$. El punto C representa al número $\frac{a}{b}$.

Ver figura 28

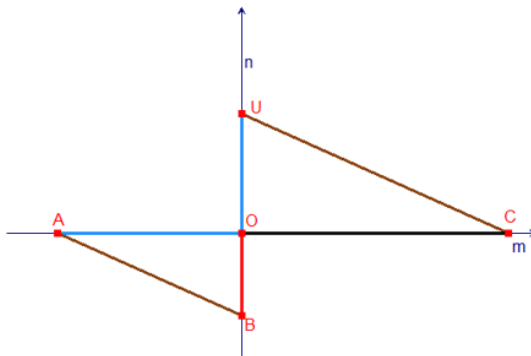


Figura 28

Nota: La raíz cuadrada de un número construible ya se analizó.

Referencias

- [1] Axioma de Cantor-Dedekind. https://es.wikipedia.org/wiki/Axioma_de_Cantor-Dedekind
- [2] Teorema de los cuatro cuadrados. https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_los_cuatro_cuadrados
- [3] Numero construible. https://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_construible
- [4] Hemmerling, E. Geometría Elemental. Limusa. México. 2005.
- [5] Landaverde, F. (s.f.) Curso de Geometría. Librería FTD. Bogotá.