

## REVISTA SIGMA

Departamento de Matemáticas y Estadística

Volumen XXII N<sup>o</sup> 3 (2026), páginas 1–12

*Universidad de Nariño*

# Problema de Cauchy para la ecuación Rosenau

Ricardo Córdoba<sup>1</sup>  
Dayan R. Suárez<sup>2</sup>  
Alexander Ortega<sup>3</sup>

**Abstract:** This research studies the Cauchy problem associated with the Rosenau equation, which models the evolution of water waves with large elongation and small amplitude. For this purpose, a contractive argument based on the well-known Banach fixed-point theorem is used, combined with appropriate linear and nonlinear estimates.

*Keywords.* Rosenau Equation, Sobolev Spaces, Cauchy Problem, Fixed-Point Theorem

**Resumen:** En esta investigación se estudia el problema de Cauchy asociado con la ecuación Rosenau que modela la evolución de ondas de agua de gran elongación y pequeña amplitud. Para tal propósito se usa un argumento contractivo basado en el conocido teorema de punto fijo de Banach, combinado con estimativos lineales y no lineales apropiados.

*Palabras Clave.* Ecuación Rosenau, Espacios de Sobolev, Problema de Cauchy, Teorema de punto fijo

## 1. Introducción

Las ecuaciones diferenciales parciales de evolución surgen no sólo de las matemáticas, sino también de otras ramas de la ciencia como la física, la mecánica y la ciencia de los materiales. Por ejemplo, las ecuaciones de Navier-Stokes y de Euler surgen de la mecánica de fluidos; las ecuaciones de reacción-difusión no lineales surgen de las ciencias biológicas y del estudio del fenómeno de la conducción de calor. Las ecuaciones no lineales de Klein-Gordon

---

<sup>1</sup>Departamento de matemáticas y estadística, Universidad de Nariño, Colombia. Correo electrónico: [rcordoba@udenar.edu.co](mailto:rcordoba@udenar.edu.co),

<sup>2</sup>Universidad Bío-Bío, Concepción, Chile. Correo electrónico: [smdayan@unicauca.edu.co](mailto:smdayan@unicauca.edu.co),

<sup>3</sup>Universidad del Cauca, Colombia. Correo electrónico: [aortegam@unicauca.edu.co](mailto:aortegam@unicauca.edu.co),

y las ecuaciones no lineales de Schrödinger nacen de la mecánica cuántica, y son ecuaciones especiales de este tipo. En particular, algunas ecuaciones diferenciales parciales no lineales son usadas para modelar la evolución de ondas de agua largas con pequeña amplitud. Es conocido que estas ecuaciones son deducidas del “problema completo de ondas de agua” (full problem of water waves) mediante un proceso de aproximación y bajo la imposición de algunas restricciones para los parámetros que afectan la propagación de las ondas.

Hoy en día se conocen muchos modelos unidimensionales de ecuaciones diferenciales que describen la evolución de ondas en un fluido en términos de la elevación superficial de la onda bajo diferentes consideraciones, entre los cuales destacamos la ecuación Korteweg-de Vries (KdV):

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0,$$

y la ecuación Benjamin-Bona-Mahony (ver [1]):

$$u_t - u_{xxt} + u_x + uu_x = 0;$$

además, la ecuación Camassa-Holm (ver [2]):

$$u_t - u_{xxt} + u_x + 3uu_x = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx},$$

y la ecuación Boussinesq (ver [5]):

$$u_{tt} - u_{xx} + (u^2 + u_{xx})_{xx} = 0,$$

donde  $u = u(t, x)$ , con  $t > 0$  y  $x \in \mathbb{R}$  son las variables temporal y espacial respectivamente.

En el trabajo [7], P. Rosenau mostró que el fenómeno de la evolución de ondas de agua de gran elongación y pequeña amplitud, puede modelarse mediante la siguiente ecuación

$$u_t + \alpha u_x + \beta uu_x + \lambda u_{xxxxt} = 0, \tag{1}$$

donde  $\lambda > 0$  y  $\alpha, \beta$  son parámetros arbitrarios. M.A. Park en [6] demostró teóricamente la existencia y unicidad de la solución de la ecuación Rosenau (1) cuando  $\alpha = \beta = \lambda = 1$ . Además del análisis teórico, también existen estudios numéricos relacionados con el modelo (1), (ver por ejemplo [3], [4]). En este trabajo probaremos la existencia y unicidad de la solución local del problema de valor inicial asociado a la ecuación (1) con la condición inicial

$$u(0, x) = u_0(x), \tag{2}$$

en los espacios de Sobolev  $H^s(\mathbb{R})$  para  $s > 1/2$ .

Notemos que la ecuación (1) se puede escribir en la forma equivalente

$$(I + \lambda \partial_x^4) \partial_t u + \alpha \partial_x u + \frac{\beta}{2} \partial_x (u^2) = 0,$$

es decir,

$$\partial_t u + \alpha (I + \lambda \partial_x^4)^{-1} \partial_x u + \frac{\beta}{2} (I + \lambda \partial_x^4)^{-1} \partial_x (u^2) = 0,$$

donde al operador  $(I + \lambda \partial_x^4)^{-1}$  se le puede dar sentido vía transformada de Fourier. Entonces la ecuación en consideración se puede escribir en la forma:

$$\partial_t u = M(u) - F(u), \tag{3}$$

donde  $M$  es el operador lineal definido por

$$M(u) := -\alpha A^{-1} \partial_x u, \quad A(u) = (I + \lambda \partial_x^4)u,$$

y  $F$  corresponde a la parte no lineal,

$$F(u) = \frac{\beta}{2} A^{-1} \partial_x (u^2).$$

Ahora, vemos que el problema de Cauchy (1) - (2) es equivalente al siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \partial_t u = -\alpha A^{-1} \partial_x u \\ u(0, x) = u_0(x). \end{cases} \quad (4)$$

Es conocido del Principio de Duhamel que si  $S(t)(u_0)$  es la solución del problema lineal asociado con (3),

$$\partial_t u + M(u) = 0, \quad u(0, x) = u_0(x),$$

entonces el problema de Cauchy (1) - (2) puede reformularse por medio de la ecuación integral

$$u(t) = S(t)(u_0) - \int_0^t S(t - \tau) F(u(\tau)) d\tau, \quad (5)$$

donde  $S(t)$  es el semigrupo asociado con el problema lineal (4).

Ahora, supongamos que existen dos espacios de Banach  $X, Y$  tales que  $Y \hookrightarrow X^4$ , donde la inclusión es continua, tales que  $M$  y  $F$  son funciones continuas. Supongamos además que para cada  $u_0 \in Y$  existe un número real  $T > 0$  y una única función

$$u \in C([0, T], Y)^5,$$

que satisface la ecuación integral (5). Además, supongamos que la aplicación dato solución  $u_0 \rightarrow u$  es continua de  $Y$  en  $C([0, T], Y)$ . En este caso diremos que el problema de Cauchy posee *solución local* en  $Y$ . Si  $T$  puede elegirse arbitrariamente grande, se dice que el problema de Cauchy posee *solución global* en  $Y$ .

## 2. El problema de Cauchy

En esta sección, usando la caracterización de los espacios de Sóbolev vía la transformada de Fourier, estudiaremos el problema de Cauchy asociado con la ecuación Rosenau. Mostraremos que este modelo posee soluciones locales en el espacio  $H^s(\mathbb{R})$ , para algún  $s > 1/2$ . Para ello utilizaremos algunos estimativos lineales y no lineales, así como el teorema del punto fijo de Banach que enunciaremos y demostraremos a continuación.

Sea  $X$  un espacio normado. Un operador  $\Phi : X \rightarrow X$ , se dice una *contracción* si existe  $k$ ,  $0 < k < 1$ , tal que

$$\|\Phi u - \Phi v\| \leq k \|u - v\|, \quad \text{para todo } u, v \in X.$$

---

<sup>4</sup> $X \hookrightarrow Y$  denota que  $X$  está continuamente incluido en  $Y$ , con  $X, Y$  espacios normados. Es decir, si  $X \subset Y$  y existe una constante  $c > 0$  tal que para todo  $f \in X$  se cumple que:

$$\|f\|_Y \leq c \|f\|_X.$$

<sup>5</sup>Recordemos que si  $E$  es un espacio de Banach entonces  $C([0, T], E)$  denota el espacio de funciones continuas definidas en  $[0, T]$  con valores en  $E$ .

**Teorema 1.** Si  $X$  un espacio de Banach y  $\Phi : X \rightarrow X$  una contracción, entonces  $\Phi$  tiene un único punto fijo, es decir, existe un único  $u \in X$ , tal que

$$\Phi u = u.$$

*Demostración.* Sea  $u_0 \in X$  un punto arbitrario. Defina  $u_n$  por

$$u_{n+1} = \Phi u_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

y pruebe que  $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$  es una sucesión de Cauchy en  $X$ . En efecto, como  $\Phi$  es una contracción, existe  $0 < k < 1$ , tal que

$$\begin{aligned} \|u_{n+1} - u_n\| &= \|\Phi(u_n) - \Phi(u_{n-1})\| \leq k \|u_n - u_{n-1}\| \\ &= k \|\Phi(u_{n-1}) - \Phi(u_{n-2})\| \leq k^2 \|u_{n-1} - u_{n-2}\| \\ &\leq \dots \leq k^n \|u_1 - u_0\|. \end{aligned}$$

Entonces, utilizando la desigualdad triangular y la fórmula de la suma para la serie geométrica, se tiene que

$$\begin{aligned} \|u_n - u_{n+m}\| &= \|(u_n - u_{n+1}) + (u_{n+1} - u_{n+2}) + \dots + (u_{n+m-1} - u_{n+m})\| \\ &\leq \|u_n - u_{n+1}\| + \|u_{n+1} - u_{n+2}\| + \dots + \|u_{n+m-1} - u_{n+m}\| \\ &\leq (k^n + k^{n+1} + \dots + k^{n+m-1}) \|u_1 - u_0\| \\ &\leq k^n (1 + k + k^2 + \dots + k^{m-1} + \dots) \|u_1 - u_0\| \\ &= k^n (1 - k)^{-1} \|u_1 - u_0\|, \end{aligned}$$

de donde,

$$\|u_n - u_{n+m}\| \rightarrow 0, \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Por tanto,  $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$  es una sucesión de Cauchy en  $X$ ; además, como  $X$  es un espacio de Banach, existe  $u \in X$ , tal que

$$u_n \rightarrow u, \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Ahora se debe probar que  $u$  es un punto fijo de  $\Phi$ . Como

$$\|\Phi u_n - \Phi u\| \leq k \|u_n - u\| \rightarrow 0, \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty,$$

entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi u_n = \Phi u.$$

Luego,

$$\Phi u = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} = u.$$

Por otra parte, si  $u$  y  $u'$  son puntos fijos de  $\Phi$ , entonces

$$\|u - u'\| = \|\Phi u - \Phi u'\| \leq k \|u - u'\|,$$

y como  $0 < k < 1$ , se concluye que  $\|u - u'\| = 0$ , de donde  $u = u'$ . Por tanto, se ha demostrado que  $\Phi$  tiene un único punto fijo en  $X$ .  $\square$

Las constantes que usaremos en esta sección son constantes genéricas, es decir, ellas pueden variar de una línea a otra.

## 2.1. El problema de Cauchy para la ecuación Rosenau

En esta sección estudiamos el problema de Cauchy asociado con la ecuación Rosenau

$$u_t + \alpha u_x + \beta u u_x + \lambda u_{xxxxt} = 0, \quad (3.1)$$

con la condición inicial

$$u(0, x) = u_0(x), \quad (3.2)$$

donde  $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ ,  $u = u(t, x)$ ,  $t > 0$  y  $x \in \mathbb{R}$ . Además,  $\lambda > 0$  y  $\alpha, \beta$  son parámetros arbitrarios. Notemos que la ecuación (3.1) se puede escribir en la forma equivalente

$$(I + \lambda \partial_x^4) \partial_t u + \alpha \partial_x u + \frac{\beta}{2} \partial_x(u^2) = 0,$$

es decir,

$$\partial_t u + \alpha(I + \lambda \partial_x^4)^{-1} \partial_x u + \frac{\beta}{2}(I + \lambda \partial_x^4)^{-1} \partial_x(u^2) = 0. \quad (3.3)$$

Ahora definamos el operador  $A : H^s(\mathbb{R}) \rightarrow H^{s-4}(\mathbb{R})$  con  $s \in \mathbb{R}$ , dado por

$$Au = (I + \lambda \partial_x^4)u.$$

Luego, aplicando la transformada de Fourier,

$$\widehat{Au}(\xi) = (1 + 16\pi^4 \lambda \xi^4) \widehat{u}(\xi).$$

Ahora, usando la transformada inversa de Fourier se tiene que

$$Au = \int_{\mathbb{R}} \widehat{Au}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi = \int_{\mathbb{R}} (1 + 16\pi^4 \lambda \xi^4) \widehat{u}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi.$$

Veamos que el operador  $A$  está bien definido. En efecto,

$$\begin{aligned} \|Au\|_{H^{s-4}(\mathbb{R})}^2 &= \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2)^{s-4} |\widehat{Au}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{(1 + 16\pi^4 \lambda \xi^4)^2}{(1 + |\xi|^2)^4} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq K \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi = K \|u\|_{H^s(\mathbb{R})}^2. \end{aligned}$$

Definamos ahora el operador  $A^{-1} : H^s(\mathbb{R}) \rightarrow H^{s+4}(\mathbb{R})$  con  $s \in \mathbb{R}$ , por medio de la fórmula

$$A^{-1}u = \int_{\mathbb{R}} \frac{\widehat{u}(\xi)}{1 + 16\pi^4 \lambda \xi^4} e^{2\pi i x \xi} d\xi,$$

de ahí que

$$\widehat{A^{-1}u} = \frac{\widehat{u}(\xi)}{1 + 16\pi^4 \lambda \xi^4}.$$

Veamos que el operador  $A^{-1}$  está bien definido. En efecto,

$$\begin{aligned} \|A^{-1}u\|_{H^{s+4}(\mathbb{R})}^2 &= \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2)^{s+4} |\widehat{A^{-1}u}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{(1 + |\xi|^2)^4}{(1 + 16\pi^4 \lambda \xi^4)^2} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq K \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi = K \|u\|_{H^s(\mathbb{R})}^2. \end{aligned}$$

La ecuación (3.3) puede escribirse en la forma equivalente

$$\partial_t u = M(u) - F(u),$$

donde  $M$  es el operador lineal definido por

$$M(u) = -\alpha A^{-1} \partial_x u,$$

y  $F$  corresponde a la parte no lineal,

$$F(u) = \frac{\beta}{2} A^{-1} \partial_x (u^2).$$

Tiene lugar el siguiente resultado.

**Teorema 2.**  $M : H^s(\mathbb{R}) \rightarrow H^s(\mathbb{R})$  es un operador lineal acotado para  $s \in \mathbb{R}$ .

*Demostración.* Para  $u \in H^s(\mathbb{R})$  tenemos:

$$\begin{aligned} \|\alpha A^{-1} \partial_x u\|_{H^s(\mathbb{R})}^2 &= \alpha^2 \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{A^{-1} \partial_x u}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \alpha^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{(1 + |\xi|^2)^s}{(1 + 16\pi^4 \lambda \xi^4)^2} |\widehat{\partial_x u}(\xi)|^2 d\xi \\ &= 4\pi^2 \alpha^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{\xi^2}{(1 + 16\pi^4 \lambda \xi^4)^2} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq K \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi = K \|u\|_{H^s(\mathbb{R})}^2, \end{aligned}$$

donde  $K > 0$ . Así se ha demostrado que  $M$  es un operador lineal acotado.  $\square$

A continuación hallaremos la solución  $u$  del siguiente sistema lineal:

$$\begin{cases} \partial_t u = -\alpha A^{-1} \partial_x u \\ u(0, x) = u_0(x). \end{cases} \quad (3.4)$$

Aplicando la transformada de Fourier en la primera ecuación de (3.4) con respecto a la variable espacial  $x$ , tenemos que

$$\partial_t \widehat{u}(\xi) = \frac{-2\alpha\pi i \xi}{1 + 16\pi^4 \lambda \xi^4} \widehat{u}(\xi), \quad \widehat{u}(0, \xi) = \widehat{u}_0(\xi).$$

La anterior es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden del tipo  $z' + cz = 0$ , cuya solución general está dada por

$$\widehat{u}(t, \xi) = \widehat{u}_0(\xi) e^{\frac{-2\alpha\pi i \xi}{1 + 16\pi^4 \lambda \xi^4} t}. \quad (3.5)$$

Ahora aplicando la transformada de Fourier inversa,

$$u(t, x) = S(t)(u_0), \quad (3.6)$$

donde

$$(S(t)u)(t, x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{u}(\xi) e^{\frac{-2\alpha\pi i \xi}{1 + 16\pi^4 \lambda \xi^4} t} e^{2\pi i x \xi} d\xi.$$

Por tanto, si  $u$  es solución del sistema (3.4) entonces  $u(t) = S(t)(u_0)$ .

Ahora veamos que si  $u(t) = S(t)(u_0)$ , entonces  $u$  es solución del sistema (3.4). En efecto, primero veamos que satisface las condiciones iniciales. Usando la ecuación (3.6) y por la Fórmula de inversión de Fourier tenemos que:

$$u(0) = S(t)(u_0) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{u}_0(\xi) e^0 e^{2\pi i x \xi} d\xi = u_0(x).$$

Ahora, por (3.6) y usando la regla de Leibniz<sup>6</sup> (ver [8], p. 9), vemos que

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, x) &= \partial_t \left( \int_{\mathbb{R}} \widehat{u}_0(\xi) e^{\frac{-2\alpha\pi i \xi}{1+16\pi^4\lambda\xi^4}t} e^{2\pi i x \xi} d\xi \right) \\ &= -2\alpha\pi i \int_{\mathbb{R}} \frac{\xi \widehat{u}_0(\xi)}{1+16\pi^4\lambda\xi^4} e^{\frac{-2\alpha\pi i \xi}{1+16\pi^4\lambda\xi^4}t} e^{2\pi i x \xi} d\xi. \end{aligned}$$

Por otra parte, usando (3.5) y el teorema de inversión de Fourier, tenemos que:

$$\begin{aligned} -\alpha A^{-1} \partial_x u &= -\alpha \int_{\mathbb{R}} \widehat{A^{-1} \partial_x u}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi \\ &= -2\alpha\pi i \int_{\mathbb{R}} \frac{\xi}{1+16\pi^4\lambda\xi^4} \widehat{u}(t, \xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi \\ &= -2\alpha\pi i \int_{\mathbb{R}} \frac{\xi \widehat{u}_0(\xi)}{1+16\pi^4\lambda\xi^4} e^{\frac{-2\alpha\pi i \xi}{1+16\pi^4\lambda\xi^4}t} e^{2\pi i x \xi} d\xi. \end{aligned}$$

Por lo tanto hemos demostrado que  $\partial_t u(t, x) = -\alpha A^{-1} \partial_x u$ .

**Teorema 3.** *La única solución del sistema (3.4) está dada por*

$$u(t) = S(t)(u_0) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{u}_0(\xi) e^{\frac{-2\alpha\pi i \xi}{1+16\pi^4\lambda\xi^4}t} e^{-2\pi i x \xi} d\xi.$$

El operador  $S(t)$  cumple con la siguiente propiedad:

**Lemma 1.** *Sea  $s \in \mathbb{R}$ . Entonces para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,  $S(t)$  es un operador lineal acotado de  $H^s(\mathbb{R})$  en sí mismo. Más aún, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , tenemos que*

$$\|S(t)(u)\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq K \|u\|_{H^s(\mathbb{R})}.$$

*Demostración.* Notemos que

$$\begin{aligned} \|S(t)(u)\|_{H^s(\mathbb{R})}^2 &= \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{S(t)(u)}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{u}(\xi) e^{\frac{-2\alpha\pi i \xi}{1+16\pi^4\lambda\xi^4}t}|^2 d\xi \\ &\leq K \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Luego, existe una constante  $K > 0$  tal que

$$\|S(t)(u)\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq K \|u\|_{H^s(\mathbb{R})}.$$

✓

---

<sup>6</sup>Sea  $X$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}$ , y  $\Omega$  un conjunto medible. Supongamos que  $f$  es una función  $f : X \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  que satisface las siguientes condiciones:

- (1)  $f(x, \omega)$  es una función integrable de  $\omega$  para cada  $x \in X$ .
  - (2) En c.t.p  $\omega \in \Omega$ , la derivada  $\partial f(x, \omega)/\partial x$  existe para todo  $x \in X$ .
  - (3) Existe una función integrable  $\Theta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $|\partial f(x, \omega)/\partial x| \leq \Theta(\omega)$  para todo  $x \in X$ .
- Entonces para todo  $x \in X$ , se cumple que

$$\frac{d}{dx} \int_{\Omega} f(x, \omega) d\omega = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} f(x, \omega) d\omega.$$

El siguiente resultado es un estimativo para el operador  $F$ . En la demostración de este lema usaremos nuevamente el hecho de que  $H^s(\mathbb{R})$  es un álgebra para  $s > 1/2$ .

**Lemma 2.** *Sea  $s > 1/2$ . Entonces existen constantes  $K_1, K_2 > 0$  tales que*

1.  $\|F(u)\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq K_1 \|u\|_{H^s(\mathbb{R})}^2$ .
2.  $\|F(u) - F(v)\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq K_2 \|u - v\|_{H^s(\mathbb{R})} (\|u\|_{H^s(\mathbb{R})} + \|v\|_{H^s(\mathbb{R})})$ .

*Demostración.* De la definición del espacio  $H^s(\mathbb{R})$  vemos que

$$\begin{aligned} \|F(u)\|_{H^s(\mathbb{R})}^2 &= \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2)^s \left| \frac{\beta}{2} A^{-1} \widehat{\partial_x(u^2)}(\xi) \right|^2 d\xi \\ &= K \int_{\mathbb{R}} \frac{(1 + |\xi|^2)^s \xi^2}{(1 + 16\pi^4 \lambda \xi^4)^2} |\widehat{u^2}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq K \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{u^2}(\xi)|^2 d\xi = K \|u^2\|_{H^s(\mathbb{R})}^2. \end{aligned}$$

Entonces usando el hecho de que  $H^s(\mathbb{R})$  es una álgebra para  $s > 1/2$ ,

$$\|u^2\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq K_s \|u\|_{H^s(\mathbb{R})} \|u\|_{H^s(\mathbb{R})}.$$

Así,

$$\|F(u)\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq K \|u^2\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq K_1 \|u\|_{H^s(\mathbb{R})}^2.$$

Finalmente observemos que

$$F(u) - F(v) = \frac{\beta}{2} A^{-1} \partial_x(u^2) - \frac{\beta}{2} A^{-1} \partial_x(v^2) = \frac{\beta}{2} A^{-1} \partial_x(u^2 - v^2).$$

Por tanto, usando argumentos similares a los anteriores, tenemos que para  $s > 1/2$ ,

$$\begin{aligned} \|F(u) - F(v)\|_{H^s(\mathbb{R})} &= |\beta|/2 \|A^{-1}[\partial_x(u^2 - v^2)]\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq K_2 \|u^2 - v^2\|_{H^s(\mathbb{R})} \\ &= K_2 \|(u - v)(u + v)\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq K_2 \|u - v\|_{H^s(\mathbb{R})} \|u + v\|_{H^s(\mathbb{R})} \\ &\leq K_2 \|u - v\|_{H^s(\mathbb{R})} (\|u\|_{H^s(\mathbb{R})} + \|v\|_{H^s(\mathbb{R})}). \end{aligned}$$

Luego, existe una constante  $K_2 > 0$  tal que

$$\|F(u) - F(v)\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq K_2 \|u - v\|_{H^s(\mathbb{R})} (\|u\|_{H^s(\mathbb{R})} + \|v\|_{H^s(\mathbb{R})}).$$

✓

**Teorema 4.** *Supongamos que  $s > 1/2$ . Entonces para todo  $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$  existe  $T > 0$ , que depende solamente de  $\|u_0\|_{H^s(\mathbb{R})}$ , tal que el problema (3.1) - (3.2) tiene una única solución que satisface*

$$u \in C([0, T], H^s(\mathbb{R})).$$

*Además, para todo  $0 < T' < T$  existe una vecindad  $\mathbb{V}$  de  $u_0$  en  $H^s(\mathbb{R})$  tal que la correspondencia  $\tilde{u}_0 \rightarrow \tilde{u}(\cdot)$  que asocia a  $\tilde{u}_0$  la solución  $\tilde{u}(\cdot)$  de las ecuaciones (3.1) y (3.2) con la condición inicial  $\tilde{u}_0$ , es una función Lipschitz de  $\mathbb{V}$  en  $C([0, T'], H^s(\mathbb{R}))$ .*

*Demostración.* Dado  $T > 0$ , definamos el espacio

$$X^s(T) = C([0, T], H^s(\mathbb{R})),$$

equipado con la norma dada por

$$\|u\|_{X^s(T)} := \max_{t \in [0, T]} \|u(t, \cdot)\|_{H^s(\mathbb{R})}.$$

Ahora, sea  $\overline{B}_R(T)$  la bola cerrada de radio  $R$  centrada en el origen del espacio  $X^s(T)$ , esto es

$$\overline{B}_R(T) = \{u \in X^s(T) : \|u\|_{X^s(T)} \leq R\}.$$

Fijado  $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$  definimos el operador

$$\Psi(u(t)) = S(t)(u_0) - \int_0^t S(t-\tau)F(u(\tau)) d\tau, \text{ con } u \in X^s(T).$$

Mostremos que la correspondencia  $u(t) \rightarrow \Psi(u(t))$  envía a  $\overline{B}_R(T)$  en sí misma y es una contracción si  $R$  y  $T$  son escogidos adecuadamente. En efecto, si  $t \in [0, T]$  y  $u \in \overline{B}_R(T)$ , entonces usando los lemas 1 y 2 tenemos que

$$\begin{aligned} \|\Psi(u(t))\|_{H^s(\mathbb{R})} &\leq \|S(t)(u_0)\|_{H^s(\mathbb{R})} + \left\| \int_0^t S(t-\tau)(F(u(\tau))) d\tau \right\|_{H^s(\mathbb{R})} \\ &\leq K\|u_0\|_{H^s(\mathbb{R})} + \int_0^t \|S(t-\tau)F(u(\tau))\|_{H^s(\mathbb{R})} d\tau \\ &\leq K\|u_0\|_{H^s(\mathbb{R})} + K \int_0^t \|F(u(\tau))\|_{H^s(\mathbb{R})} d\tau \\ &\leq K\|u_0\|_{H^s(\mathbb{R})} + KK_1 \int_0^t \|u(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R})}^2 d\tau \\ &\leq K\|u_0\|_{H^s(\mathbb{R})} + KK_1T\|u(t)\|_{X^s(T)}^2 \leq K\|u_0\|_{H^s(\mathbb{R})} + KK_1TR^2. \end{aligned}$$

Escogiendo  $R = 2K\|u_0\|_{H^s(\mathbb{R})}$  y  $T > 0$  tal que

$$4K^2K_1T\|u_0\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq 1, \tag{3.7}$$

obtenemos que

$$\begin{aligned} \|\Psi(u(t))\|_{H^s(\mathbb{R})} &\leq K\|u_0\|_{H^s(\mathbb{R})}(1 + 4K^2K_1T\|u_0\|_{H^s(\mathbb{R})}) \\ &\leq 2K\|u_0\|_{H^s(\mathbb{R})} = R. \end{aligned}$$

De manera que  $\Psi$  aplica  $\overline{B}_R(T)$  en sí misma. Probemos ahora que  $\Psi$  es una contracción. Si  $u_1, u_2 \in \overline{B}_R(T)$ , entonces de la definición de  $\Psi$  tenemos que

$$\Psi(u_1(t)) - \Psi(u_2(t)) = - \int_0^t S(t-\tau)(F(u_1(\tau)) - F(u_2(\tau))) d\tau.$$

Entonces, usando el ítem 2 del lema 2 vemos que para todo  $t \in [0, T]$ ,

$$\begin{aligned}
 & \|\Psi(u_1(t)) - \Psi(u_2(t))\|_{H^s(\mathbb{R})} \\
 &= \left\| \int_0^t S(t-\tau)(F(u_1(\tau)) - F(u_2(\tau))) d\tau \right\|_{H^s(\mathbb{R})} \\
 &\leq K \int_0^t \|F(u_1(\tau)) - F(u_2(\tau))\|_{H^s(\mathbb{R})} d\tau \\
 &\leq KK_2 \int_0^t \|u_1(\tau) - u_2(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R})} (\|u_1(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R})} + \|u_2(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R})}) d\tau \\
 &\leq KK_2 \|u_1 - u_2\|_{X^s(T)} \int_0^t (\|u_1(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R})} + \|u_2(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R})}) d\tau \\
 &\leq KK_2 \|u_1 - u_2\|_{X^s(T)} \int_0^t (\|u_1\|_{X^s(T)} + \|u_2\|_{X^s(T)}) d\tau \\
 &\leq 2KK_2RT \|u_1 - u_2\|_{X^s(T)} = 4K^2K_2T \|u_0\|_{H^s(\mathbb{R})} \|u_1 - u_2\|_{X^s(T)}.
 \end{aligned}$$

Ahora, escojamos  $T$  lo suficientemente pequeño para que se cumpla (3.7) y además se cumpla que

$$4K^2K_2T \|u_0\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{2}. \quad (3.8)$$

De donde concluimos que

$$\|\Psi(u_1(t)) - \Psi(u_2(t))\|_{X^s(T)} \leq \frac{1}{2} \|u_1 - u_2\|_{X^s(T)}.$$

Así  $\Psi$  es una contracción y por tanto, usando el teorema de punto fijo de Banach tenemos que existe un único punto fijo  $u$  de  $\Psi$  en  $\overline{B}_R(T)$ , el cual es una solución de la ecuación integral

$$u(t) = \Psi(u(t)) = S(t)(u_0) - \int_0^t S(t-\tau)F(u(\tau)) d\tau. \quad (3.9)$$

Notemos que si  $u$  es solución de esta ecuación integral, entonces satisface el problema (3.1) - (3.2).

La unicidad de la solución es consecuencia del siguiente argumento. Sean  $U(t) = u(t)$ ,  $\tilde{U}(t) = \tilde{u}(t)$  dos soluciones de la ecuación (3.9) con condición inicial  $U_0 = u_0$  y  $\tilde{U}_0 = \tilde{u}_0$ , tales que

$$U, \tilde{U} \in C([0, T], H^s(\mathbb{R})).$$

Entonces, si  $t \in [0, T]$  tenemos que

$$\begin{aligned}
 \|U(t) - \tilde{U}(t)\|_{H^s(\mathbb{R})} &= \|u(t) - \tilde{u}(t)\|_{H^s(\mathbb{R})} \\
 &\leq K \|U_0 - \tilde{U}_0\|_{H^s(\mathbb{R})} \\
 &\quad + KK_2 \int_0^t \|u(\tau) - \tilde{u}(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R})} (\|u(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R})} + \|\tilde{u}(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R})}) d\tau \\
 &\leq K \|U_0 - \tilde{U}_0\|_{H^s(\mathbb{R})} + 2KK_2N \int_0^t \|U(\tau) - \tilde{U}(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R})} d\tau,
 \end{aligned}$$

donde asumimos que

$$\|U\|_{X^s(T)}, \|\tilde{U}\|_{X^s(T)} \leq N.$$

Entonces, tomando  $K_3 = 2KK_2$  y usando la desigualdad de Gronwall<sup>7</sup>, tenemos que para todo  $t \in [0, T']$  se satisface que

$$\|U(t) - \tilde{U}(t)\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq Ke^{K_3 NT} \|U_0 - \tilde{U}_0\|_{H^s(\mathbb{R})}. \quad (3.10)$$

Ahora si  $U_0 = \tilde{U}_0$  entonces concluimos que  $\|U - \tilde{U}\|_{X^s(T)} = 0$ ; así  $U = \tilde{U}$  lo cual implica la unicidad de la solución en el espacio  $X^s(T)$ . Por tanto, de la discusión de la existencia de soluciones para el problema (3.1) - (3.2), para  $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ , tenemos garantizada la existencia de un tiempo  $T$  para la solución asociada, caracterizada por las desigualdades (3.7)-(3.8).

Para  $0 < T' < T$  definamos

$$\mathbb{V} = \{\tilde{U}_0 \in H^s(\mathbb{R}) : \|\tilde{U}_0 - U_0\|_{H^s(\mathbb{R})} < \epsilon\},$$

con  $\epsilon = \left(\frac{1}{T'} - \frac{1}{T}\right)\epsilon'$  y  $0 < \epsilon' < \min\{\frac{1}{4K^2K_1}, \frac{1}{8K^2K_2}\}$ . Notemos que si  $\tilde{U}_0 \in \mathbb{V}$ ,

$$\|\tilde{U}_0\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq \|\tilde{U}_0 - U_0\|_{H^s(\mathbb{R})} + \|U_0\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq \epsilon + \|U_0\|_{H^s(\mathbb{R})}. \quad (3.11)$$

Por tanto tenemos que

$$4K^2K_1\|\tilde{U}_0\|_{H^s(\mathbb{R})}T' \leq 1, \quad 8K^2K_2\|\tilde{U}_0\|_{H^s(\mathbb{R})}T' \leq 1. \quad (3.12)$$

En efecto, usando (3.7) tenemos que

$$\begin{aligned} 4K^2K_1\|\tilde{U}_0\|_{H^s(\mathbb{R})} &\leq 4K^2K_1(\epsilon + \|U_0\|_{H^s(\mathbb{R})}) \\ &\leq 4K^2K_1\left(\frac{1}{T'} - \frac{1}{T}\right)\epsilon' + 4K^2K_1\|U_0\|_{H^s(\mathbb{R})} \\ &\leq \left[4K^2K_1\left(\frac{1}{T'} - \frac{1}{T}\right)\epsilon' + \frac{1}{T}\right] < \frac{1}{T'}. \end{aligned}$$

Similarmente usando (3.8),

$$\begin{aligned} 8K^2K_2\|\tilde{U}_0\|_{H^s(\mathbb{R})} &\leq 8K^2K_2(\epsilon + \|U_0\|_{H^s(\mathbb{R})}) \\ &\leq 8K^2K_2\left(\frac{1}{T'} - \frac{1}{T}\right)\epsilon' + 8K^2K_2\|U_0\|_{H^s(\mathbb{R})} \\ &\leq \left[8K^2K_2\left(\frac{1}{T'} - \frac{1}{T}\right)\epsilon' + \frac{1}{T}\right] < \frac{1}{T'}. \end{aligned}$$

Entonces de (3.12) concluimos que para cualquier  $\tilde{U}_0 \in \mathbb{V}$  existe una única solución  $\tilde{U}(t) \in C([0, T'], H^s)$  de la ecuación (3.7) que satisface la condición inicial  $\tilde{U}_0$ . Además  $\tilde{U} \in \overline{B}_R(T')$  con  $R = 2K\|\tilde{U}_0\|_{H^s(\mathbb{R})}$ . Entonces usando (3.10) para  $\tilde{U}_0, \tilde{W}_0 \in \mathbb{V}$  con soluciones asociadas  $\tilde{U}$  y  $\tilde{W}$  respectivamente, tenemos que

$$\begin{aligned} \|\tilde{U}\|_{X^s(T)} + \|\tilde{W}\|_{X^s(T)} &\leq 2K(\|\tilde{U}_0\|_{H^s(\mathbb{R})} + \|\tilde{W}_0\|_{H^s(\mathbb{R})}) \\ &\leq 4K(\epsilon + \|U_0\|_{H^s(\mathbb{R})}) \\ &\leq 4K\left[\frac{1}{4K^2K_1}\left(\frac{1}{T'} - \frac{1}{T}\right) + \frac{1}{4K^2K_1T}\right] \leq \frac{1}{KK_1T'}. \end{aligned}$$

Entonces usando (3.9) con  $N = (KK_1T')^{-1}$  obtenemos que para todo  $t \in [0, T']$ ,

$$\|\tilde{U}(t) - \tilde{W}(t)\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq Ke^{NK_4T'} \|\tilde{U}_0 - \tilde{W}_0\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq C\|\tilde{U}_0 - \tilde{W}_0\|_{H^s(\mathbb{R})},$$

con  $C = Ke^{2K_2K_1^{-1}}$ . Así, la correspondencia  $\tilde{u}_0 \rightarrow \tilde{u}(\cdot)$ , que asocia a  $\tilde{u}_0$  la solución de (3.7) con la condición inicial (3.8) es una función Lipschitz de  $\mathbb{V}$  en  $C([0, T'], H^s(\mathbb{R}))$ , y esto completa la prueba.  $\square$

<sup>7</sup>Sean  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $x_0 \in I$  tales que,  $0 \leq f(x) \leq A + B \int_{x_0}^x f(s) ds$  para todo  $x \in I$ , con  $A, B \geq 0$ . Entonces  $f(x) \leq Ae^{B(x-x_0)}$ .

**Agradecimientos.** R. Córdoba fue apoyado por la Universidad de Nariño (Colombia).

## Referencias

- [1] T. Benjamin, J. Bona, J. Mahony. Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems, *Philos. Trans. R. Soc. Lond.* 272 (1972), 47-78. 2
- [2] J. Bona, N. Tzvetkov. Sharp well-posedness results for the BBM equations, *Discret. Contin. Dyn. Syst.* 23 (2009), 1241-1252. 2
- [3] S. M. Choo, S.K. Chung, K.I. Kimb, A discontinuous Galerkin method for the Rosenau equation, *Appl. Numer. Math.* 58 (6) (2008), 783-799. 2
- [4] S. K. Chung and S.N. Ha, Finite element Galerkin solutions for the Rosenau equation, *Appl. Anal.* 54 (2) (1994) 39-56. 2
- [5] R. Córdoba, Estabilidad de onda solitaria, buen planteamiento y controlabilidad para un sistema de ecuaciones tipo Boussinesq, Tesis Doctoral, Universidad del Cauca - Colombia, (2022). 2
- [6] M.A. Park, On the Rosenau equation, *Math. Aplicada a Comput.* 9 (2) (1990) 145-152. 2
- [7] P. Rosenau, Dynamics of dense discrete systems, *Prog. Theor. Phys.*, 79 (1988), 1028-1042. 2
- [8] J. Sánchez, P. Sempere, La técnica de Feynman de derivación bajo el signo integral, *Lecturas Matemáticas*, 43 (1) (2022), 5-22. 7