

OSSA. 2026. Análisis empírico de los retornos extremos del S&P 500 mediante leyes de potencia Revista Sigma, 22 (3). Páginas 13–23.

REVISTA SIGMA

Departamento de Matemáticas y Estadística

Volumen XXII N° 3 (2026), páginas 13–23

Universidad de Nariño

Análisis empírico de los retornos extremos del S&P 500 mediante leyes de potencia

Genjis A. Ossa González¹

Abstract: This study analyzes the behavior of extreme events in a financial market using daily absolute returns. Since financial returns often deviate from the assumptions of normality, a power-law-based approach is employed to characterize the behavior of extreme values. Extreme events are identified using the 95th percentile of the absolute return distribution, whose value was 0.00018, from which the tail of the distribution is constructed. Based on this subset of observations, the empirical exceedance probability is estimated and a power-law relationship is fitted using a log-log representation. The results exhibit an approximately linear relationship with an estimated slope of -3.66 , suggesting behavior consistent with moderately heavy tails in financial returns.

Keywords. Power laws, heavy tails, financial returns, extreme events, financial risk.

Resumen: Este estudio analiza el comportamiento de los eventos extremos en un mercado financiero mediante el uso de retornos absolutos diarios. Dado que los retornos financieros suelen apartarse de los supuestos de normalidad, se emplea un enfoque basado en leyes de potencia para caracterizar el comportamiento de los valores extremos. Los eventos extremos se identifican a partir del percentil 95 de la distribución de los retornos absolutos, cuyo valor fue 0,00018, a partir del cual se construye la cola de la distribución. Sobre este subconjunto de observaciones se estima la probabilidad empírica y se ajusta una ley de potencia mediante una representación log-log. Los resultados muestran una relación aproximadamente lineal, con una pendiente estimada de $-3,66$, lo que sugiere un comportamiento compatible con colas pesadas moderadas en los retornos financieros.

Palabras Clave. Leyes de potencia, colas pesadas, retornos financieros, eventos extremos, riesgo financiero

1. Introducción

Tradicionalmente, el estudio de los retornos financieros ha estado basado en supuestos de normalidad y en medidas promedio como la rentabilidad esperada y la varianza. Sin embar-

¹Universidad Popular Del Cesar, Valledupar, Colombia. Correo electrónico: gossa@unicesar.edu.co

go, la evidencia empírica como Mandelbrot (1963) y Cont (2001) ha mostrado de manera consistente que las series financieras no siguen una distribución normal, sino que presentan colas pesadas, en las cuales los eventos extremos ocurren con mayor frecuencia de la que predicen los modelos clásicos. Esta característica implica que los enfoques tradicionales tienden a subestimar el riesgo asociado a movimientos de gran magnitud.

El presente artículo tiene como objetivo analizar el comportamiento de los retornos extremos del mercado financiero mediante la estimación de una ley de potencia aplicada a los retornos absolutos. Para ello, se identifican los eventos extremos a partir de un umbral definido por el percentil 95 de la distribución de los retornos y se estudia la probabilidad empírica de excedencia asociada a dichos eventos.

El artículo se organiza de la siguiente manera: en primer lugar, se presenta una introducción al problema de estudio; posteriormente, se desarrolla una breve revisión de la literatura relacionada con las leyes de potencia, los hechos estilizados y la teoría de valores extremos; a continuación, se describe la metodología empleada; seguidamente, se presentan los resultados obtenidos; y finalmente concluye.

2. Revisión de literatura

La distribución de Pareto, la cual exhibe un comportamiento consistente con una ley de potencia, tiene su raíz en las observaciones del economista Vilfredo Pareto en su libro *Course d'Économie Politique* (1896). Pareto destacó un patrón empírico en Italia: aproximadamente el 80 % de la tierra era propiedad de un 20 % de la población (Bergareche, 2021). Este hallazgo dio lugar a la noción de que una minoría de causas suele generar la mayoría de los resultados, comportamiento que puede ser descrito matemáticamente mediante leyes de potencias.

Tradicionalmente, las grandes fluctuaciones del mercado se consideraban eventos aislados, atípicos o “outliers”. Sin embargo, la evidencia empírica demuestra que los movimientos extremos de los precios, el volumen de negociación y el número de transacciones siguen leyes de potencia consistentes. Estas leyes son notablemente universales (Gabaix et al., 2003) manteniéndose constantes a través de diferentes tamaños de mercado, tendencias económicas e incluso distintos países.

La ley de potencia es un tipo de distribución de probabilidad que describe fenómenos donde los eventos grandes pero raros tienen una probabilidad significativamente mayor de ocurrir que en las distribuciones “normales” o acampanadas y el comportamiento de esta ley comienza solo a partir de un valor mínimo específico denominado $x_{\min}$. Matemáticamente, una cantidad x obedece a una ley de potencia si se extrae de una distribución de probabilidad que sigue la forma básica de proporcionalidad $p(x) \propto x^{-\alpha}$.

De acuerdo con Clauset et al. (2009), α es una constante conocida como el exponente o parámetro de escala normalmente situado en el rango $2 < \alpha < 3$, por otro lado x es el valor de la cantidad observada y $\propto$ es una constante de escala. En el contexto de los mercados financieros, esta formulación se utiliza para modelar la probabilidad de observar retornos extremos, entendidos como movimientos de gran magnitud que ocurren con baja frecuencia.

A diferencia de las distribuciones normales, las leyes de potencia asignan una probabilidad relativamente mayor a eventos extremos, lo que da lugar a las denominadas colas pesadas. En el contexto de los mercados financieros, esta formulación se utiliza para modelar la probabilidad de observar retornos extremos, entendidos como movimientos de gran magnitud que ocurren con baja frecuencia. A diferencia de las distribuciones normales, las leyes de

potencia según lo expuesto en Cont (2001) asignan una probabilidad relativamente mayor a eventos extremos, lo que da lugar a las denominadas colas pesadas.

Así pues, entre los hechos más relevantes para esta investigación se destaca por ejemplo la característica de agrupamiento de la volatilidad, esto se describe como la tendencia de los periodos de alta volatilidad a concentrarse en el tiempo. En otras palabras, grandes variaciones en los retornos suelen ser seguidas por otras variaciones grandes, mientras que periodos de baja volatilidad tienden a persistir (Jacobsen y Dannenburg, 2003).

Por otro lado, la Teoría de los Valores Extremos (EVT) se conceptualiza como un enfoque que se concentra exclusivamente en el comportamiento de las colas de una distribución (Alaswed, 2024). En este contexto, las leyes de potencia pertenecen a la clase de Fréchet, la cual describe distribuciones con colas pesadas de tipo Pareto (Cont, 2001). De acuerdo con este marco, es posible analizar los límites de las fluctuaciones máximas y mínimas de los retornos financieros sin necesidad de especificar o conocer completamente la distribución subyacente de los datos (Alaswed, 2024).

A partir de esta revisión de literatura, el presente estudio se orienta a evaluar empíricamente el comportamiento de los retornos extremos y su consistencia con este tipo de distribuciones, aportando evidencia sobre la estructura del riesgo extremo en el mercado financiero considerado.

3. Metodología

En relación al procesamiento de los datos se desarrolla el modelo con la data de cierre del S&P 500 con una periodicidad diaria que abarca desde el 31 de diciembre del 2014 hasta 31 de noviembre del 2019. Por lo anterior, el primer paso es convertir datos a una serie estacionaria, por ello se desarrolla es el cambio logarítmico porcentual r absoluto que hay en el día actual P_t con respecto al día inmediatamente anterior P_{t-1} .

$$|r_t| = \left| \ln \left(\frac{P_t}{P_{t-1}} \right) \right| \quad (1)$$

Es importante mencionar que el calculó el valor absoluto de los retornos con el fin de analizar la magnitud de los movimientos extremos, independientemente de su signo. Dado que los retornos absolutos se encontraban expresados en porcentaje, estos se transformaron a escala decimal dividiendo cada observación entre 100, con el fin de garantizar consistencia matemática en la estimación logarítmica.

$$|r_t|_d = \frac{|r_t|}{100} \quad (2)$$

Sea la muestra de retornos absolutos en escala decimal $|r_t|_d$ y el umbral de cola $x_{\min}$ se define como el percentil 95 Q_{95} , siendo este último el parámetro a partir del cual los retornos se consideran extremos, permitiendo estimar la ley de potencia únicamente sobre la cola de la distribución. Por lo anterior sea:

$$x_{\min} = Q_{95}(|r_t|_d) \quad (3)$$

Con el fin de aislar los eventos extremos, se construyó la cola de la distribución seleccionando los retornos absolutos que superan el umbral $x_{\min}$, definido como Q_{95} . Y la cola se definió como el conjunto C sobre el cual se estimó la ley de potencia, siendo la cola:

$$C = \{|r_t|_d : |r_t|_d \geq x_{\min}\} \quad (4)$$

Es imperante resaltar que la ley de potencia no se cumple en todo el rango de datos, pues el cuerpo central tentativamente tiende a tener comportamiento casi normal mientras que en las colas el comportamiento es no gaussiano (potencia). Definida una vez C se ordenan de menor a mayor los datos de dicha variable, es decir que si x_i es cada dato observado dentro de C y que cumple la condición de que sea $\geq x_{\min}$ por lo que los eventos más grandes queden al final:

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \quad (5)$$

Una vez filtrada la cola de la distribución, los valores extremos fueron ordenados de manera creciente y se les asignó un ranking inverso θ , el cual representa el número de observaciones n cuya magnitud es igual o superior a cada valor i .

$$\theta = n - i + 1 \quad (6)$$

A partir de este ranking θ se construyó la función de supervivencia empírica o excedencia P que es igual al cociente de cada dato individual de θ_i con respecto al número de observaciones n de la cola C . Y se define como la proporción de observaciones cuyo valor excede un umbral determinado y constituye una aproximación no paramétrica de la probabilidad de excedencia teórica.

$$\hat{P} = \frac{\theta_i}{n_C} \quad (7)$$

Para ir finalizando, se logaritmicó tanto $\ln(C)$ como también $\ln(P)$ en función de que se pueda convertir en una relación lineal, de modo que el exponente α pueda estimarse como una pendiente.

Para hallar la pendiente o el parámetro α que es el parámetro central de la ley de potencia, y que mide qué tan rápido disminuye la probabilidad de eventos extremos cuando aumenta su magnitud, se inicia calculando la sumatoria de cada dato individual de $\ln(C)$ como de $\ln(P)$, de la forma:

$$A = \sum_{i=1}^n \ln(C) \quad (8)$$

$$B = \sum_{i=1}^n \ln(\hat{P}) \quad (9)$$

Posteriormente se halla el producto entre el logaritmo de la cola como de la función de supervivencia de la forma:

$$D = \ln(\hat{P})[\ln C] \quad (10)$$

Y luego se obtiene la sumatoria E de cada dato individual de ese producto D_i de la forma:

$$E = \sum_{i=1}^n D \quad (11)$$

Luego se eleva al cuadrado cada dato de $\ln(C)^2$ y como los pasos previos se obtiene la sumatoria de cada dato de esa variable:

$$A_2 = \sum_{i=1}^n \ln(C)^2 \quad (12)$$

Una vez obtenidos los parámetros anteriores (8, 9, 10, 11 y 12) se procede a calcular el cociente entre el producto de $A \cdot B$ entre el número de datos dando como resultado a Z_1 y luego la sumatoria de A elevado al cuadrado A_2 entre el número de datos, dando como resultado a Z_2 :

$$Z_1 = \frac{A[B]}{n} \quad (13)$$

$$Z_2 = \frac{A_2}{n} \quad (14)$$

Posteriormente se hallan las diferencias d entre Z_1 con respecto a E y la otra diferencia es entre Z_2 con respecto a A_2 , y los resultados de esas dos operaciones serán el cociente que arroja como resultado el parámetro α .

$$d_1 = Z_1 - E \quad (15)$$

$$d_2 = Z_2 - A_2 \quad (16)$$

Y finalmente:

$$\alpha = \frac{d_1}{d_2} \quad (17)$$

4. Resultados

En esta sección se presentan y analizan los principales resultados obtenidos a partir de la aplicación de la metodología descrita. Se exponen las estadísticas descriptivas relevantes, la construcción de la cola de la distribución y el ajuste empírico de la ley de potencia sobre los retornos extremos. Con el fin de mantener la claridad y concisión del texto principal, la información detallada sobre los valores se encuentra disponible en el anexo correspondiente.

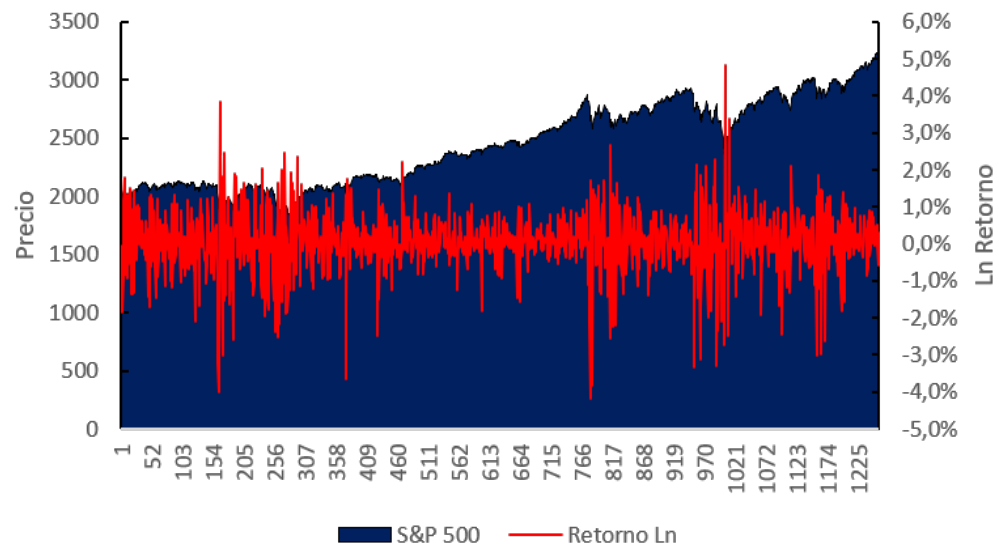
Tabla 1: Resumen de datos financieros.

Concepto	Precio	Retornos logarítmicos	
		Diario	Anual
Promedio	2452,64	0,04 %	9,03 %
Desviación	357,45	0,85 %	13,46 %

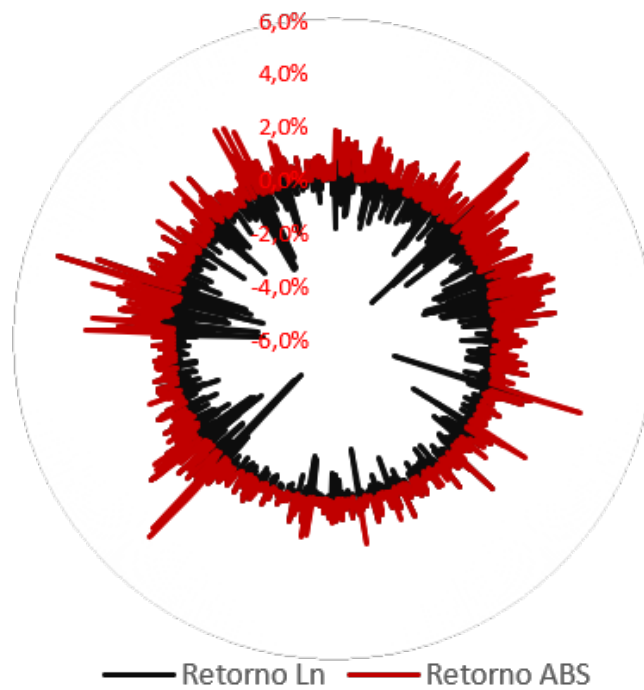
Note: Elaboración propia (2025)

En promedio, el nivel del índice S&P 500 fue de 2452,6 durante el período analizado, con una desviación estándar de 357,45. En términos de retornos, el retorno logarítmico diario promedio fue de 0,04 %, mientras que la desviación estándar diaria alcanzó 0,85 %, exponiendo que la volatilidad diaria supera ampliamente a la rentabilidad esperada. Al anualizar estas magnitudes, la rentabilidad promedio anual se situó en 9,03 %, acompañada de una volatilidad anual de 13,46 %,

Gráfico 1. Histórico de precios y de retornos.



Nota: Elaboración propia (2025)



Nota: Elaboración propia (2025)

Como parte del proceso expuesto en la ecuación 2, la anterior ilustración expone a través de un gráfico tipo coordenadas el comportamiento a lo largo del tiempo. Se observa que ambos tipos de retorno fluctúan alrededor de cero que es la naturaleza inherentemente volátil del mercado. El objetivo de trabajar con valores absolutos radica en que en el análisis de leyes de potencia interesa la magnitud del evento extremo, no su dirección.

$$x_{\min} = Q_{95}(|r_t|^d) = 0,018\% = 0,00018 \quad (1)$$

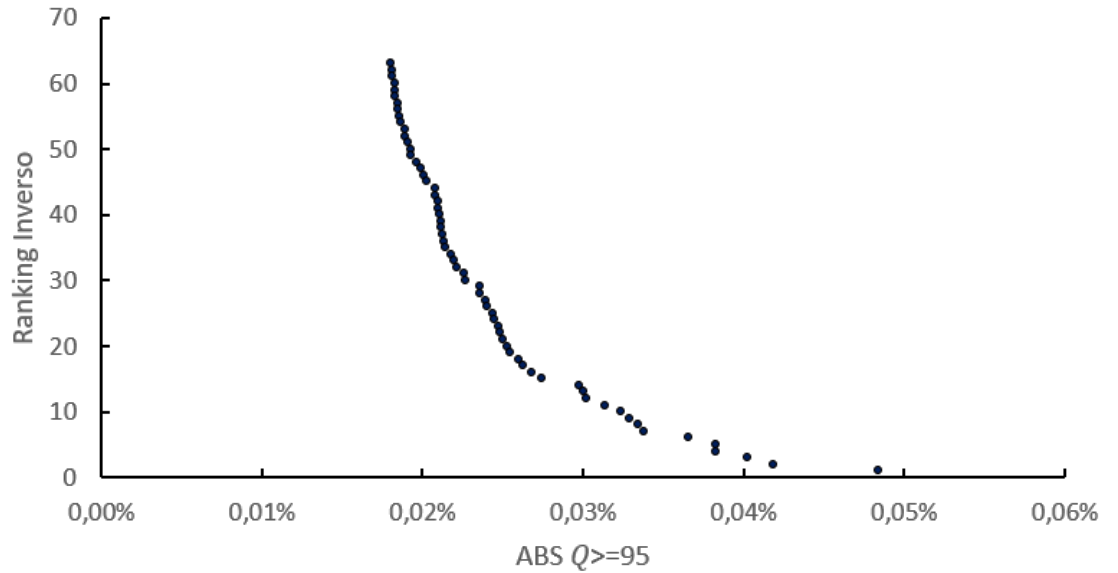
El percentil 95 de la ecuación previa se utiliza como un punto de corte para separar los movimientos normales del mercado de los movimientos extremos. Para ello, se ordenan los retornos absolutos diarios como magnitud del cambio diario, sin importar si fue subida o bajada (por eso son absolutos). El valor del percentil 95 es el punto que deja por debajo al 95 % de los cambios diarios y deja por encima al 5 % restante.

En este caso, el percentil 95 fue 0,00018 lo que implica que el 95 % de los días el mercado tuvo movimientos iguales o menores a ese valor, mientras que solo el 5 % (que es el campo que realmente importa) de los días presentó movimientos mayores (magnitudes).

Ese 5 % corresponde a los eventos extremos y constituye la “cola” de la distribución, que es la parte que concentra los cambios más raros, pero más relevantes. A partir de estos valores extremos se inicia la estimación de la ley de potencia, ya que este tipo de modelo busca describir precisamente el comportamiento de los eventos grandes y poco frecuentes, es decir esos valores del 5 %.

Una vez llevado a cabo los procesos de las ecuaciones 4, 5 y 6 se seleccionan únicamente los días en los que el movimiento del mercado fue igual o superior al umbral definido por el percentil 95. Es decir, que se conservan solo los cambios más grandes observados, que representan aproximadamente el 5 % de los días con mayor variación.

Gráfico 3. Valores conforman la cola de la distribución.



Nota: Elaboración propia (2025)

Antes de iniciar el análisis, es indispensable recordar que estas estadísticas no describen al mercado en su conjunto, como sí lo hace la Tabla 1. La Tabla 2 como la gráfica 3 caracteriza exclusivamente el 5 % de los días más extremos, los cuales resultan ser 63 datos definidos a partir del valor absoluto de los retornos y son los que conforman la cola de la distribución.

Tabla 2: Descripción de los datos extremos en ABS.

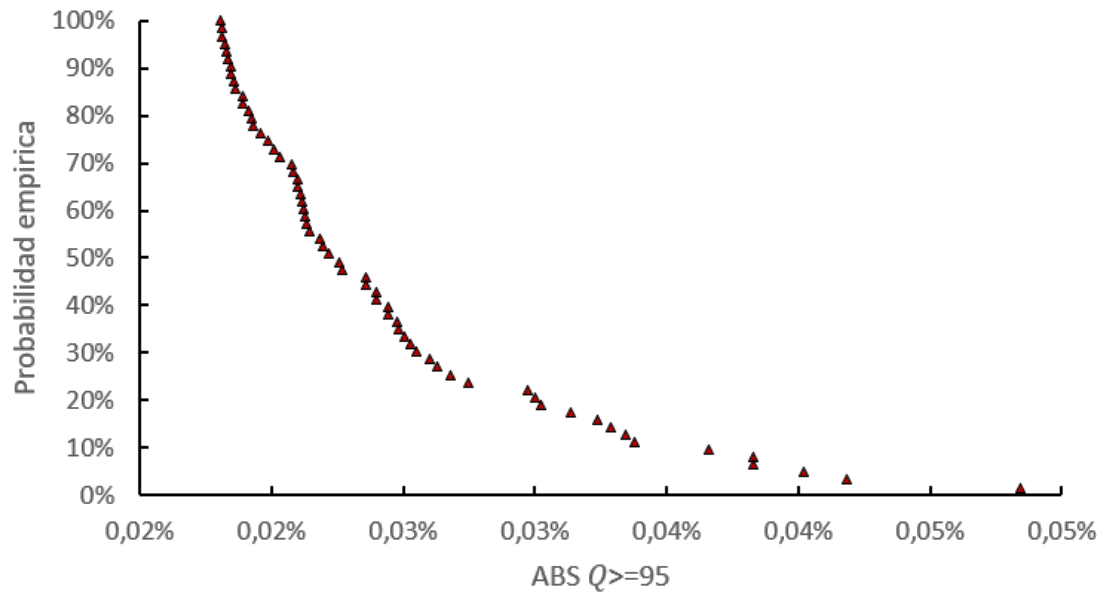
Concepto	ABS ≥ 95	
	Diario	Anual
Promedio	0,02 %	6,22 %
Desviación	0,01 %	0,11 %

Nota: Elaboración propia (2025)

En este sentido, se observa que el retorno absoluto promedio de los eventos extremos es de 0,02 %, un valor relativamente bajo en términos diarios. No obstante, al anualizar este comportamiento, la rentabilidad asociada a este subconjunto de observaciones alcanza el 6,22 %. Por su parte, la volatilidad diaria de estos eventos es de 0,01 %, inferior a la volatilidad diaria total del mercado (0,85 % de la Tabla 1), lo cual es coherente dado que los valores extremos seleccionados presentan magnitudes relativamente bajas.

A partir de los valores de la cola, se estimó la probabilidad empírica P de la ecuación 7 como la proporción de observaciones cuya magnitud es igual o superior a cada valor considerado.

Gráfico 4. Probabilidad empírica de los valores ABS.



Nota: Elaboración propia (2025)

Esta función de supervivencia empírica describe la frecuencia relativa de los eventos extremos y como se observa en el siguiente gráfico, a medida que el evento extremo es de mayor magnitud la probabilidad empírica disminuye, lo cual es la naturaleza común en tanto que los movimientos más grandes del mercado son cada vez menos frecuentes. Posteriormente,

tanto los valores de la cola como sus probabilidades empíricas fueron transformados mediante logaritmo natural. Esta transformación es necesaria en tanto que permite convertir la relación de ley de potencia en una relación lineal, de tal forma que el exponente de cola se obtiene como el valor absoluto de la pendiente α (ver anexo) en el gráfico log-log.

Método punto pendiente:

$$Z_1 = \frac{-525,3305407[-60,00817136]}{63} = 500,3829382 \quad (2)$$

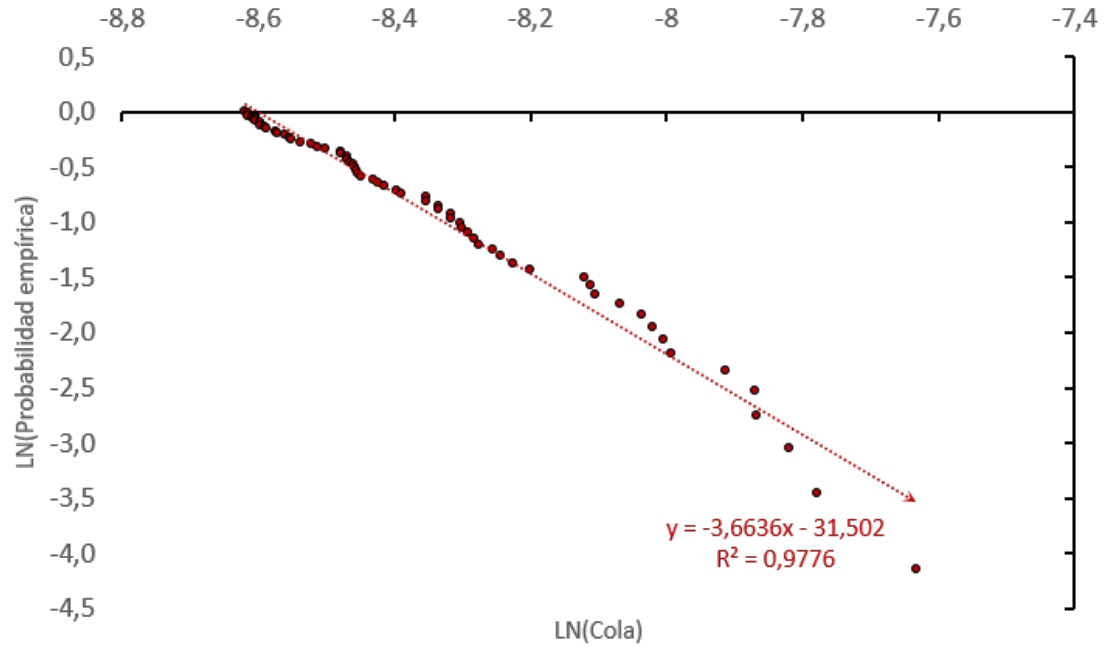
$$Z_2 = \frac{-525,3305407^2}{63} = \frac{275972,1776}{63} = 4380,510746 \quad (3)$$

$$d_1 = 500,3829382 - 486,8713519 = 13,51158633 \quad (4)$$

$$d_2 = 4380,510746 - 4384,19879 = -3,68804388 \quad (5)$$

$$\alpha = \frac{13,51158633}{-3,68804388} = -3,663618142 \quad (6)$$

Gráfico 5. Log-log de la función de supervivencia empírica.



Nota: Elaboración propia (2025)

Como se ilustra en la ecuación 17, se tiene una pendiente de $\alpha = -3,66$ en un gráfico log-log (ver grafica 5) lo cual expone que la probabilidad de excedencia empírica de los retornos

extremos sigue una ley de potencia con un exponente de cola 3,66. En términos operativos, un aumento de diez veces en la magnitud de un evento extremo reduce su probabilidad de ocurrencia en un factor aproximado de 4.600, evidenciando que los eventos de gran tamaño son posibles, pero extremadamente raros.

$$p(x) = Cx^{-3,6636}, \quad x_{\min} = 0,00018 \quad (7)$$

Conclusiones

El presente estudio analizó el comportamiento de los retornos extremos del S&P500 a partir de los retornos absolutos diarios, utilizando un enfoque basado en leyes de potencia y en la función de supervivencia. A través del percentil 95 de la distribución de los retornos absolutos se identificó un umbral de 0,00018, a partir del cual se construyó la cola de la distribución y se analizaron exclusivamente los eventos de mayor magnitud.

Los resultados empíricos muestran que la probabilidad de excedencia de los retornos extremos presenta una relación aproximadamente lineal en una representación log-log, lo que propone un comportamiento compatible con una ley de potencia en la cola de la distribución. El exponente estimado $\alpha = 3,66$, indica la presencia de colas pesadas moderadas, (según Cont, (2001) el índice de cola para la mayoría de los activos financieros suele situarse en un rango de entre 2 y 5) en las cuales los eventos extremos son más frecuentes que bajo supuestos de normalidad, aunque su probabilidad disminuye rápidamente a medida que aumenta su magnitud.

Finalmente, este trabajo aporta evidencia empírica consistente con este tipo de comportamiento en los retornos extremos del mercado analizado. Como líneas futuras de investigación, se propone la estimación del exponente mediante métodos de máxima verosimilitud, la evaluación formal de la bondad de ajuste y la comparación con distribuciones alternativas, con el fin de profundizar en la caracterización del riesgo extremo en los mercados financieros.

Referencias

- [1] Alaswed, H. A. (2024). Modeling of Reversed Fréchet Distribution under Linear Normalizing. *Sch J Phys Math Stat*, 11, 173-186.
- [2] Bergareche Solana, D. (2021). *Leyes de potencias en la economía y en la empresa* (Trabajo de grado). Universidad de Cantabria. <http://hdl.handle.net/10902/23589>
- [3] Clauset, A., Shalizi, C. R., & Newman, M. E. (2009). Power-law distributions in empirical data. *SIAM review*, 51(4), 661-703.
- [4] Cont, R. (2001). Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues. *Quantitative finance*, 1(2), 223.
- [5] Gabaix, X., Gopikrishnan, P., Plerou, V., & Stanley, H. E. (2003). A theory of power-law distributions in financial market fluctuations. *Nature*, 423(6937), 267-270.
- [6] Jacobsen, B., & Dannenburg, D. (2003). Volatility clustering in monthly stock returns. *Journal of Empirical Finance*, 10(4), 479-503.
- [7] Mandelbrot, B. (1963). The variation of certain speculative prices. *Journal of business*, 36(4), 394.