

OSSA. 2026. Procedimiento metodológico para la construcción del modelo ARCH y GARCH en series financieras. Revista Sigma, 22 (3). Páginas 24–34.

REVISTA SIGMA

Departamento de Matemáticas y Estadística

Volumen XXII N° 3 (2026), páginas 24–34

Universidad de Nariño

Procedimiento metodológico para la construcción del modelo ARCH y GARCH en series financieras

Genjis A. Ossa González¹

Abstract: This study analyzes the volatility of daily returns on Bancolombia stock for the period 2021–2025 by estimating and comparing ARCH and GARCH models. Closing prices are transformed into returns to ensure stationarity in the mean. Initially, an ARCH model is estimated as a baseline, followed by a GARCH(1,1) model using maximum likelihood, both subject to positivity and stationarity constraints. The results show that the returns have a daily average of 0.0548 % and a historical volatility of 2.1938 %. In the ex-post estimation, the ARCH(1) model achieves a maximum likelihood logarithm of 2526.374, with an α parameter of 16.9598 %, which reveals the impact of past shocks on current volatility. For its part, the GARCH(1,1) model shows a better fit, with a log-likelihood of 2552.41, an α of 7.4593 %, a β of 90.447 % and a sum $\alpha + \beta$ of 97.907 %, showing high persistence and clustering of volatility.

Keywords. Volatility, Financial markets, Conditional heteroscedasticity.

Resumen: Este estudio analiza la volatilidad de los retornos diarios de la acción de Bancolombia para el período 2021–2025 mediante la estimación y comparación de modelos ARCH y GARCH. Los precios de cierre se transforman en rendimientos con el fin de garantizar estacionariedad en media. Inicialmente, se estima un modelo ARCH como referencia, seguido de un modelo GARCH(1,1) mediante máxima verosimilitud, ambos sujetos a restricciones de positividad y estacionariedad. Los resultados muestran que los retornos presentan una media diaria de 0,0548 % y una volatilidad histórica de 2,1938 %. En la estimación ex-post, el modelo ARCH(1) alcanza un logaritmo de máxima verosimilitud de 2526,374, con un parámetro α de 16,9598 %, lo que expone la incidencia de los choques pasados sobre la volatilidad actual. Por su parte, el modelo GARCH(1,1) registra un mejor ajuste, con una log-verosimilitud de 2552,41, un α de 7,4593 %, un β de 90,447 % y una suma $\alpha + \beta$ de 97,907 %, mostrando una elevada persistencia y agrupamiento de la volatilidad.

Palabras Clave. Volatilidad, Mercados financieros, Heterocedasticidad condicional.

¹Universidad Popular Del Cesar, Valledupar, Colombia. Correo electrónico: gossa@unicesar.edu.co

1. Introducción

La volatilidad es una de las características más relevantes de los mercados financieros, ya que refleja el nivel de incertidumbre y riesgo asociado al comportamiento de los precios de los activos. En particular, los retornos financieros suelen presentar variaciones en la magnitud de sus fluctuaciones a lo largo del tiempo, alternando periodos de relativa estabilidad con episodios de alta turbulencia cuando el fin mismo es el equilibrio entre riesgo y rendimiento (Becker et al., 2015). Este comportamiento, conocido como clustering de volatilidad, contradice el supuesto de varianza constante planteado por los modelos econométricos tradicionales y exige el uso de enfoques que permitan modelar una varianza condicional dependiente del tiempo.

En respuesta a esta problemática, Engle, (1982) introdujo los modelos ARCH (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity), los cuales permiten que la volatilidad actual dependa de los choques pasados. Posteriormente, Bollerslev (1986) amplió este enfoque mediante los modelos GARCH (Generalized ARCH), incorporando rezagos de la propia varianza condicional y logrando capturar de manera más eficiente la persistencia de la volatilidad observada en los mercados financieros.

El presente artículo tiene como objetivo analizar la dinámica de la volatilidad de los retornos diarios de la acción de Bancolombia durante el período 2021–2025, mediante la estimación y comparación de un modelo ARCH(1) y un modelo GARCH(1,1), donde el primero captura el impacto inmediato de los choques pasados y el segundo incorpora, además, la persistencia de la volatilidad mediante rezagos de la varianza condicional. A partir de los precios de cierre diarios, se construye una serie de rendimientos y se implementa un proceso de estimación por máxima verosimilitud, sujeto a restricciones de positividad y estacionariedad. La comparación de las métricas de ajuste permite evaluar la pertinencia de cada especificación para describir el comportamiento del riesgo del activo analizado, así como identificar la presencia de heterocedasticidad condicional y persistencia temporal en la volatilidad.

2. Revisión de literatura

Los mercados financieros constituyen contextos complejos caracterizados por altos niveles de incertidumbre y dinamismo. Si bien no obedecen directamente a las leyes físicas de la termodinámica, su comportamiento puede interpretarse mediante una analogía con el concepto de entropía, entendida no como una ley física estricta, sino como una medida del aumento de la incertidumbre y del desorden informacional en sistemas abiertos (Mantegna y Stanley, 1999). En este sentido, los precios financieros suelen exhibir dinámicas de aleatoriedad o no linealidad, con desviaciones producto de factores corporativos, macroeconómicos y geopolíticos. Estos elementos refuerzan la complejidad inherente al comportamiento de los mercados tal como lo expone Bentes et al. (2008) y Adamek, et al. (1997) dada las expectativas y justifican el uso de modelos econométricos que permitan capturar dicha dinámica de forma flexible y realista.

Por lo anterior, el análisis de la volatilidad ha ocupado un lugar central en la econometría financiera debido a su importancia en la medición del riesgo. El riesgo trae consigo la defensa ante la complejidad de los mercados, que sin duda alguna tiene características que empíricamente se materializan en la presencia de heterocedasticidad condicional (Gaona, 2023), lo que limita la capacidad explicativa de modelos con varianza constante. Frente a ello, los modelos GARCH permiten capturar la dinámica temporal de la volatilidad al incorporar

la dependencia de los choques pasados y de la propia varianza condicional, ofreciendo una representación más realista del riesgo financiero.

Los primeros enfoques econométricos asumían varianza constante en los errores, lo cual resultó insuficiente para describir el comportamiento empírico de los retornos financieros, caracterizados por periodos alternados de alta y baja volatilidad, un avance fundamental en este campo fue propuesto por Engle (1982), quien introdujo los modelos ARCH. Estos modelos permiten que la varianza condicional dependa de los choques pasados (Hernández y Luévano, 2019) capturando la heterocedasticidad condicional observada en los datos financieros. La contribución de Engle (1982), demostró que, aunque los retornos suelen ser no autocorrelacionados, sus cuadrados presentan dependencia temporal significativa, lo cual refleja la dinámica de la volatilidad.

Posteriormente, Bollerslev (1986) amplió el enfoque ARCH mediante la formulación de los modelos GARCH, incorporando rezagos de la propia varianza condicional. Esta extensión permitió capturar de manera más parsimoniosa la persistencia de la volatilidad, reduciendo el número de parámetros necesarios frente a especificaciones ARCH de orden elevado.

Diversos estudios empíricos han documentado que, para retornos de acciones e índices bursátiles, la suma de los parámetros ARCH y GARCH suele ser cercana a la unidad, lo que indica una alta persistencia de la volatilidad (Engle y Bollerslev, 1986; Bollerslev, 1986). Este comportamiento ha sido ampliamente observado tanto en mercados desarrollados como emergentes, validando la aplicabilidad de los modelos GARCH en distintos contextos financieros (Bollerslev et al., 1992; Cont, 2001).

Asimismo, la literatura como la destaca la superioridad de los modelos GARCH frente a ARCH en términos de ajuste estadístico y capacidad predictiva (Casas y Cepeda, 2008), particularmente cuando se comparan métricas como el logaritmo de la máxima verosimilitud. En este sentido, la comparación entre modelos ARCH y GARCH se ha convertido en una práctica habitual para evaluar la pertinencia de incorporar persistencia en la modelación de la volatilidad.

En línea con estos aportes, el presente estudio se inscribe en la literatura que analiza la dinámica de la volatilidad mediante modelos ARCH y GARCH, aplicándolos a un activo de renta variable del mercado accionario colombiano. La estimación y comparación de un modelo ARCH(1) y un modelo GARCH(1,1) permite evaluar la existencia de heterocedasticidad condicional y persistencia de la volatilidad, contribuyendo a la evidencia empírica sobre el comportamiento del riesgo en mercados emergentes.

3. Metodología

En relación al procesamiento de los datos se desarrolla el modelo con la data de cierre de BANCOLOMBIA con una periodicidad diaria que abarca desde el 4 de enero del 2021 a 11 de abril del 2025. Por lo anterior, el primer paso es convertir datos a una serie estacionaria, por ello lo se desarrolla es el cambio porcentual r que hay en el día actual P_t con respecto al día inmediatamente anterior P_{t-1} .

$$r_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 \rightarrow r_t = r_t[252] \quad (1)$$

Posteriormente se calculó el residuo como la diferencia entre la constante μ_t con respecto al

r_t dado que este es el error no explicado por la media constante, lo anterior explicado de la siguiente forma:

$$\varepsilon_t = r_t - \mu_t \quad (2)$$

Posteriormente ε_t pasa al cuadrado para poder modelar la volatilidad condicional (véase ecuación 4)

$$\varepsilon_t^2 = (r_t - \mu_t)^2 \quad (3)$$

Así pues, la volatilidad condicional representa la siguiente forma bajo una modelo ARCH de orden 1(-), es decir que la volatilidad rezagada ε_{t-1}^2 como fundamento de la condicional se observa de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} r_t & \varepsilon_t & \varepsilon_t^2 & \varepsilon_{t-1}^2 \\ r_{tn} & \varepsilon_{tn} & \varepsilon_{tn}^2 & - \\ r_{tn} & \varepsilon_{tn} & \varepsilon_{tn}^2 & \varepsilon_{tn-1}^2 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Así pues, la varianza condicional σ_t^2 va tener la siguiente forma:

El primer elemento de σ_t^2 va ser igual al estimador de volatilidad σ :

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\Omega_t}{(1 - \alpha_t)}} \quad (5)$$

Donde Ω_t es un parámetro ex ante que refleja la volatilidad histórica de los retornos, Ω_t^2 que es la varianza y Alpha $\alpha_t = 0$ que eventualmente ambos parámetros van hacer elementos sujetos de maximización.

$$\Omega_t = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (r_t - \bar{r}_t)^2}{n - 1}} \rightarrow \Omega_t^2 \quad (6)$$

Así pues, el primer valor de $\sigma_t^2 = \sigma^2$ y los datos posteriores será de la forma del producto entre los valores rezagados con respecto a la suma de $\Omega_t + \alpha_t$, siendo de la siguiente forma:

$$\sigma_t^2 = \Omega_t + [\alpha_t \varepsilon_{t-1}^2] \quad (7)$$

El logaritmo de la función de máxima verosimilitud es la expresión matemática que se usa para estimar los parámetros de un modelo ARCH mediante el método de Máxima Verosimilitud.

$$\tau_t = \ln \left(\frac{1}{\sqrt{\sigma_t^2} 2\pi} e^{-\frac{\varepsilon_t^2}{2\sigma_t^2}} \right) \quad (8)$$

3.1. Proceso de maximización del logaritmo de máxima verosimilitud τ_t

El proceso de maximización *max* se hace en función de obtener los valores óptimos de los parámetros del modelo sujeto a unas restricciones λ .

$$\max_{S.A:\lambda} \rightarrow \tau_t = \sum \ln \left(\frac{1}{\sigma_t^2 \sqrt{2\pi}} \right) e^{-\frac{\varepsilon_t^2}{2\sigma_t^2}} \quad (9)$$

3.2. Restricciones

$$\lambda = \begin{cases} \Omega_t > 0 \\ \alpha_t \geq 0 \\ \alpha_t < 1 \end{cases} \quad (10)$$

Para $\Omega_t^2 > 0$ la constante del modelo, es decir la parte base de la varianza, debe ser estrictamente positiva (diferencias al cuadrado). Por otro lado $\alpha_t \geq 0$ que multiplica el residuo anterior al cuadrado) debe ser no negativo porque si (v.g.) $\alpha_t < 0$, entonces un choque positivo reduciría la volatilidad, lo cual es contrario al comportamiento real de los mercados (los choques aumentan la volatilidad). Y finalmente $\alpha_t < 1$ el impacto de los choques pasados en la volatilidad no puede ser tan grande como para provocar que el proceso de la varianza condicional no se haga infinita.

Por otro lado, si incluimos GARCH en el proceso tendríamos que agregar una nueva constante ex ante igual a $\beta = 0$, y la forma del estimador de volatilidad tendrá la forma:

$$\hat{\sigma}_\beta = \sqrt{\frac{\Omega_t}{(1 - \alpha_t - \beta)}} \quad (11)$$

Y esto sujeto a las siguientes restricciones en el proceso de optimización:

$$\lambda_\beta = \begin{cases} \Omega_t > 0 \\ \alpha_t \geq 0 \\ \beta_t \geq 0 \\ \alpha + \beta < 1 \end{cases} \quad (12)$$

Las restricciones $\Omega_t > 0$, $\alpha \geq 0$ y $\beta \geq 0$ garantizan que la varianza condicional σ_t^2 sea positiva en todo momento y que los choques pasados y la volatilidad rezagada afecten la volatilidad actual de manera coherente con la dinámica observada en mercados financieros. Adicionalmente, la condición $\alpha + \beta < 1$ asegura que los choques sobre la volatilidad se disipen en el tiempo y que exista una volatilidad promedio estable de largo plazo.

4. Resultados

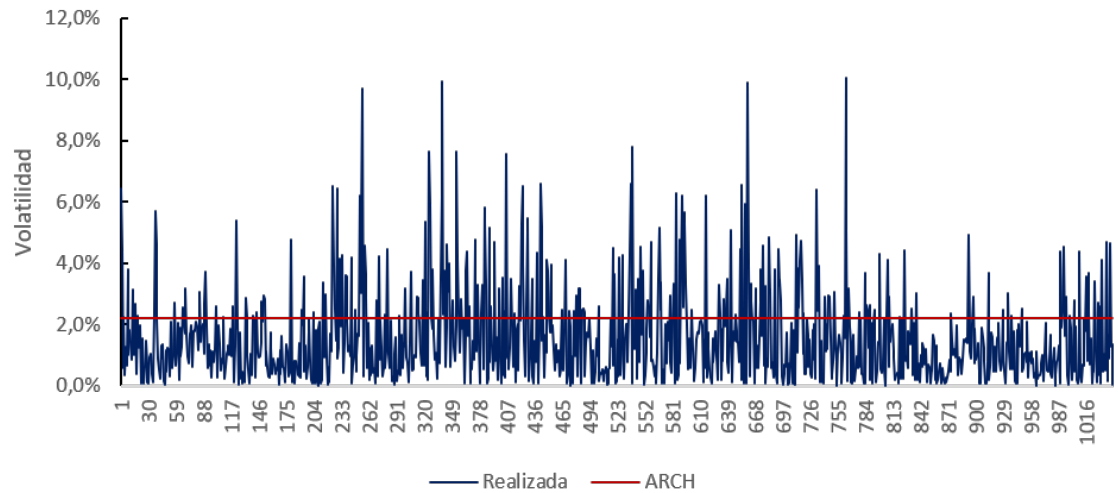
Tabla 1. Indicadores del proceso ex-ante (ARCH).

Indicador	Valor
Media	0,0548 %
Volatilidad	2,1938 %
Varianza	0,0481 %
constante μ_t	0,0548 %
Omega	0,0481 %
Alpha	0,0000 %
Estimador	2,1938 %
Log max-verosimilitud	2506,713

Nota: Elaboración propia (2025)

Con base en los retornos diarios de Bancolombia para el período, se estimó un modelo de media constante y se obtuvo una media muestral o retorno diario promedio de 0,05 % (que si anualizamos tendríamos una rentabilidad de 13,84 %) y una volatilidad histórica de 2,19 %. En proceso ex-ante el parámetro maneja una constante de 0 como medida de ausencia de dependencia significativa de la volatilidad actual respecto a los choques pasados $\varepsilon_{t_n-1}^2$. El logaritmo de la máxima verosimilitud obtenido fue 2506,7.

Gráfico 1. Varianza empírica y modelada ex-ante (ARCH).



Nota: Elaboración propia (2025)

Tabla 2. Indicadores del proceso ex-post (ARCH).

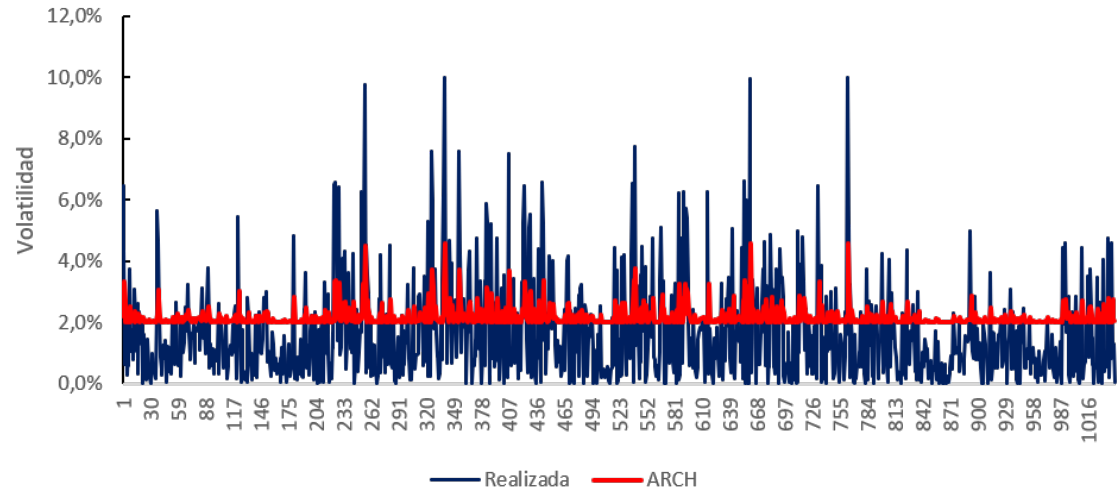
Indicador	Valor
Media	0,0548 %
Volatilidad	2,1938 %
Varianza	0,0481 %
constante μ_t	0,000027 %
Omega	0,0399 %
Alpha	16,9598 %
Estimador	2,1907 %
Log max-verosimilitud	2526,374

Nota: Elaboración propia (2025)

Tras la estimación por Máxima Verosimilitud del modelo ARCH (1) bajo restricciones de positividad y estabilidad, se obtuvo $\Omega_t = 0,039\%$ y $\alpha_t = 16,96\%$. Este resultado evidencia la presencia de heterocedasticidad condicional, indicando que la volatilidad actual depende de los choques pasados a través del término ε_{t-1}^2 . La media condicional fue estimada aproximadamente igual a cero, coherente con la literatura para retornos diarios.

Adicionalmente, el logaritmo de la máxima verosimilitud incrementó de 2506,713 a 2526,374, lo que ciertamente es reflejo de una mejora en el ajuste respecto a la especificación inicial. Por lo que concluye que en un aproximadamente de 16,96 % del choque de volatilidad ocurrido en el período anterior se transmite a la varianza condicional del período actual.

Gráfico 2. Varianza empírica y modelada ex-post (ARCH)



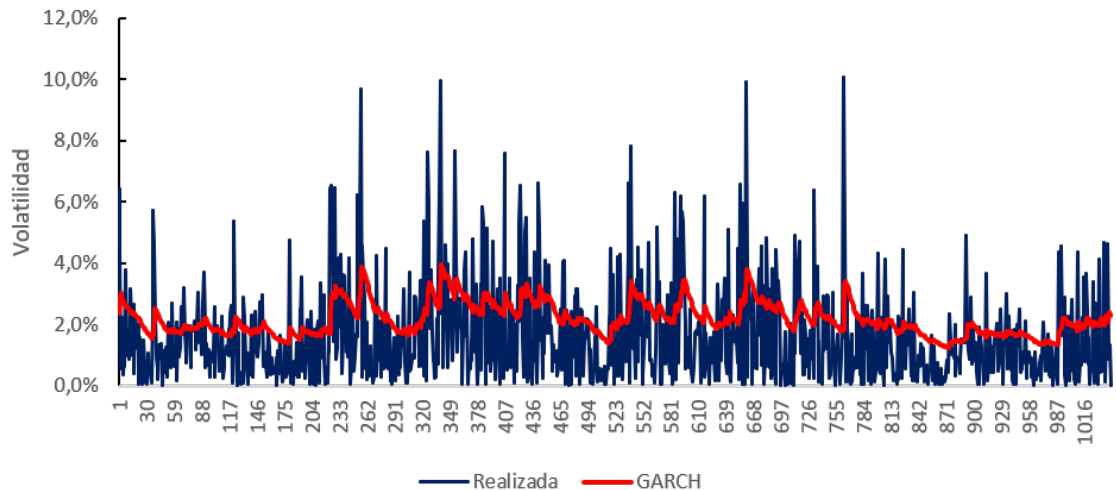
Nota: Elaboración propia (2025)

Tabla 3. Indicadores del proceso ex-ante (GARCH).

Indicador	Valor
Media	0,0548 %
Volatilidad	2,1938 %
Varianza	0,0481 %
constante μ_t	0,0548 %
Omega	0,0481 %
Alpha	0,0000 %
Beta	0,0000 %
Alpha + Beta	0,0000 %
Estimador	2,1938 %
Log max-verosimilitud	2506,71

Nota: Elaboración propia (2025)

La tabla previa presenta los indicadores del proceso ex-ante para la estimación del modelo GARCH (1,1). En esta etapa se inicializan los parámetros asignando a Ω_t la varianza histórica de los retornos, mientras que α y β se fijan inicialmente en cero, lo cual equivale a una varianza condicional constante. Estos valores son el punto de partida (ex – ante) para el procedimiento de maximización de la log-verosimilitud, a partir del cual se obtienen los parámetros óptimos sujetos a las restricciones del modelo. El valor de log-verosimilitud ex-ante de 2506,71 se interpreta como la verosimilitud del modelo base (varianza constante). Tras optimizar, ese valor debería aumentar si el GARCH aporta.

Gráfico 3. Varianza empírica y modelada ex-post (GARCH)

Nota: Elaboración propia (2025)

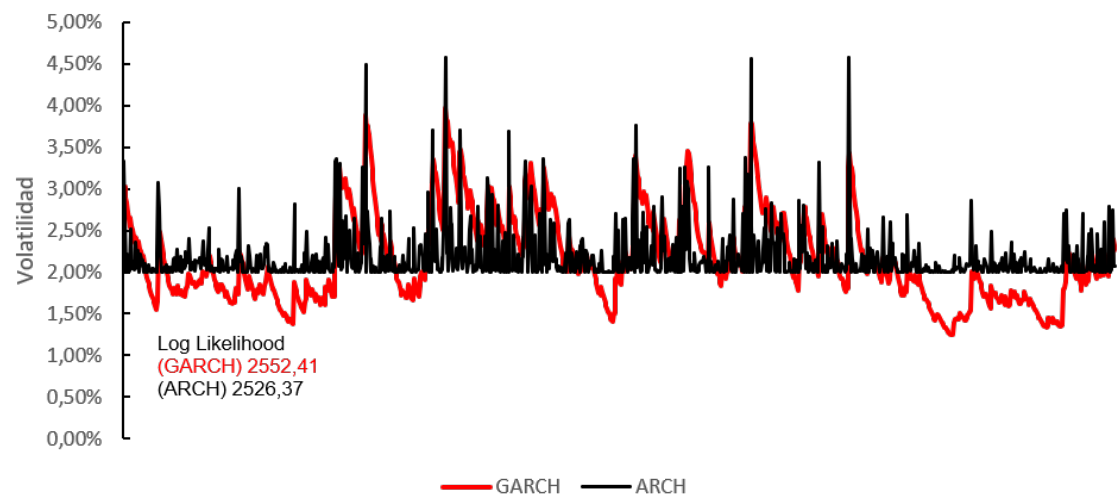
Tabla 4. Indicadores del proceso ex-post (GARCH).

Indicador	Valor
Media	0,0548 %
Volatilidad	2,1938 %
Varianza	0,0481 %
constante μ_t	0,0607 %
Omega	0,0012 %
Alpha	7,4593 %
Beta	90,447 %
Alpha + Beta	97,907 %
Estimador	2,378 %
Log max-verosimilitud	2552,41

Nota: Elaboración propia (2025)

La estimación ex-post del modelo GARCH (1,1) ya tiene una dinámica significativa de la volatilidad. El parámetro ARCH $\alpha = 7,4\%$ muestra que los choques recientes tienen un impacto moderado sobre la volatilidad actual, mientras que el parámetro GARCH $\beta = 90,4\%$ mantiene una alta persistencia de la volatilidad en el tiempo. La suma $\alpha + \beta = 97,9\%$ confirma la presencia de clustering (Los periodos de alta volatilidad tienden a agruparse entre sí, y los periodos de baja volatilidad también) de volatilidad y asegura la estacionariedad del proceso. Asimismo, el incremento del logaritmo de la máxima verosimilitud respecto al modelo ex-ante es una mejora relativamente en el ajuste del modelo.

Gráfico 4. Comparación modelos ARCH y GARCH ex-post.



Nota: Elaboración propia (2025)

5. Conclusiones

El análisis desarrollado en este estudio permitió evaluar la dinámica de la volatilidad de los retornos diarios de la acción de Bancolombia mediante la estimación y comparación de modelos ARCH y GARCH respectivamente. Los resultados confirman que para el primero en el proceso ex-post, esta mejora el ajuste frente al modelo ex-ante al capturar el efecto de los choques pasados sobre la volatilidad. Desde el punto de vista del ajuste estadístico, el incremento del logaritmo de la máxima verosimilitud de 2506,71 en el modelo ex-ante a 2526,37 en el modelo ARCH ex-post indica una mejora clara en la capacidad explicativa del modelo.

Para el segundo, el GARCH ex-post expone la mejor representación de la volatilidad al capturar simultáneamente el impacto de los choques y la alta persistencia del riesgo, evidenciando mejoras significativas en el ajuste estadístico frente a los modelos ARCH y a las especificaciones ex-ante. El ajuste estadístico, el incremento del logaritmo de la máxima verosimilitud hasta 2552,41 representa una mejora clara respecto a los modelos ARCH y a las especificaciones ex-ante. Este resultado valida empíricamente la superioridad del modelo GARCH para describir la dinámica temporal del riesgo del activo analizado, al incorporar tanto el efecto de los choques pasados como la persistencia de la volatilidad.

Desde una perspectiva de toma de decisiones de inversión, los resultados del modelo GARCH(1,1) implican que la acción de Bancolombia muestra una volatilidad altamente persistente, dado que la suma de los parámetros $\alpha + \beta$ alcanza 97,907% esto implica que los episodios de mayor incertidumbre tienden a prolongarse en el tiempo y que los choques recientes sobre el precio del activo no se disipan de manera inmediata. En este sentido, para un inversionista, el activo exige una evaluación cuidadosa del riesgo antes de asumir posiciones, especialmente en horizontes de corto plazo, donde la persistencia de la volatilidad puede traducirse en mayores fluctuaciones del rendimiento esperado.

Referencias

- [1] Adamek, P., Campbell, J. Y., Lo, A. W., MacKinlay, A. C., y Viceira, L. M. (1997). *A solution manual to the econometrics of financial markets*. Princeton University Press.
- [2] Becker, R., Clements, A. E., Doolan, M. B., y Hurn, A. S. (2015). Selección de modelos de pronóstico de volatilidad para fines de asignación de cartera. *International Journal of Forecasting*, 31(3), 849–881.
- [3] Bentes, S. R., Menezes, R., y Mendes, D. A. (2008). Long memory and volatility clustering: Is the empirical evidence consistent across stock markets?. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 387(15), 3826–3830.
- [4] Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31(3), 307–327.
- [5] Bollerslev, T., Chou, R. Y., y Kroner, K. F. (1992). ARCH modeling in finance: A review of the theory and empirical evidence. *Journal of Econometrics*, 52(1-2), 5–59.
- [6] Casas Monsegny, M., y Cepeda Cuervo, E. (2008). Modelos ARCH, GARCH y EGARCH: aplicaciones a series financieras. *Cuadernos de Economía*, 27(48), 287–319.
- [7] Cont, R. (2001). Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues. *Quantitative Finance*, 1(2), 223.

- [8] Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 987–1007.
- [9] Engle, R. F., y Bollerslev, T. (1986). Modelling the persistence of conditional variances. *Econometric Reviews*, 5(1), 1–50.
- [10] Gaona Montiel, F. G. (2023). Estudio funcional de la volatilidad en bolsa y los contratos de opciones: las inversiones en el mercado mexicano de derivados (MexDer). *Contaduría y Administración*, 68(1), 182–208.
- [11] Hernández Trillo, F., y Luévano, K. (2019). La depreciación de 2014-2018: ¿Trump o déficits gemelos? *Investigación Económica*, 78(310), 40–68.
- [12] Mantegna, R. N., y Stanley, H. E. (1999). *Introduction to econophysics: correlations and complexity in finance*. Cambridge University Press.