ALTENCOA11-2026

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad de Nariño
San Juan de Pasto - Colombia

5 al 9 de octubre de 2026

Organizan

Apoyan

Proyectos de investigación:

- *El problema de los conjuntos producto en grupos metacíclicos no abelianos de orden par.*
- *Sobre el problema de libertad de subálgebras de Mischenko-Fomenko en $U(gl_n)$.*

Comité Científico

Álgebra

Paula Cadavid
Universidade Federal Rural de Pernambuco, Brasil

German Benítez
Universidade Federal do Paraná, Brasil

Alexander Holguín Villa
Universidad Industrial de Santander, Colombia

Teoría de Números

Mario Huicochea
Universidad Autónoma de Zacatecas, México

Amalia Pizarro Madariaga
Universidad de Valparaiso, Chile

Jhon Jairo Bravo
Universidad del Cauca, Colombia

Combinatoria

Amanda Montejano Cantoral
Universidad Nacional Autónoma de México, México

Federico Castillo
Pontificia Universidad Católica, Chile

José Luis Ramírez
Universidad Nacional de Colombia, Colombia

Aplicaciones

Hiram H. López
Department of Mathematics, Virginia Tech, USA

Diana H. Bueno
Pontificia Universidad Javeriana Cali, Colombia

Geometría Algebraica

Luciane Quoos
Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil

Alonso Sepúlveda Castellanos
Universidade Federal de Uberlandia, Brasil

Horacio Navarro
Universidad del Valle, Colombia

Análisis de Datos y Sistemas Complejos (Área Invitada)

Alejandra Rada
Universidade Federal do ABC, Brasil

Pablo M. Rodríguez
Universidade Federal de Pernambuco, Brasil

Santiago Velasco-Forero
Centre for Mathematical Morphology (CMM), Mines Paris, PSL University, Francia

Comité Organizador

John H. Castillo (Coordinador General)
Universidad de Nariño, San Juan de Pasto

Fernando A. Benavides
Universidad de Nariño, San Juan de Pasto

Carlos Alexis Gómez
Universidad del Valle, Cali

Wilson F. Mutis
Universidad de Nariño, San Juan de Pasto

Julio César Hernández
Universidad de Cartagena, Cartagena

Fernando Soto
Director Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad de Nariño, San Juan de Pasto

José Luis Herrera
Universidad del Cauca, Popayán

Hernán Escobar
Decano Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Nariño, San Juan de Pasto

Catalina M. Rúa-Alvarez
Universidad de Nariño, San Juan de Pasto

Conferencistas

Germán Benítez
Universidade Federal do Paraná, Brasil

Henry Laniado
Universidad del Cauca, Colombia

Yamidt Bermudez
Universidad del Valle, Colombia

Hiram López
Virginia Tech, USA

Diana Bueno Carreño
Universidad del Valle, Colombia

Pablo Martín Rodríguez
Universidade Federal de Pernambuco, Brasil

Paula Cadavid
Universidad Federal Rural de Pernambuco, Brasil

Alejandra Rada
Universidade Federal do ABC, Brasil

Jorge Jiménez Urroz
Universidad Politécnica de Madrid, España

Alonso Sepúlveda Castellanos
Universidade Federal de Uberlândia, Brasil

Pedro Hernandez Rizzo
Universidad de Antioquia, Colombia

Javier Sánchez Serdà
Universidad de São Paulo, Brasil

Mario Huicochea
SECIHTI/UAZ, Zacatecas, México

Sergio Troncoso
Universidad del Valle, Colombia

ALTENCOA11-2026

Prefacio **1**

Plenarias **3**

Cursillos **19**

Álgebra **31**

Ponencias Álgebra 31

Pósteres Álgebra 80

Teoría de Números **117**

Ponencias Teoría de Números 117

Pósteres Teoría de Números 144

Combinatoria **151**

Ponencias Combinatoria 151

Pósteres Combinatoria 156

Aplicaciones **159**

Ponencias Aplicaciones 159

Pósteres Aplicaciones 170

Geometría Algebraica **175**

Ponencias Geometría Algebraica 175

Pósteres Geometría Algebraica 187

Área Invitada: Análisis de Datos y Sistemas Complejos **193**

Ponencias Análisis de Datos y Sistemas Complejos 193

Pósteres Análisis de Datos y Sistemas Complejos 227

Prefacio

Es un honor presentar las memorias **ALTENCOA11-2026**, el XI Encuentro Internacional de Álgebra, Teoría de Números, Combinatoria y Aplicaciones, celebrado del 5 al 9 de octubre de 2026 en las instalaciones de la Universidad de Nariño, en la ciudad de San Juan de Pasto, Colombia.

Desde sus inicios, los encuentros ALTENCOA se han consolidado como el espacio académico oficial y más representativo de estas áreas de la matemática en nuestro país. Edición tras edición, el evento ha cumplido con el propósito inquebrantable de fomentar la investigación, el diálogo interdisciplinario, la colaboración académica y la difusión del conocimiento. Esta undécima edición marca un hito de madurez y constancia en el desarrollo de nuestra comunidad científica, demostrando que el interés y el nivel investigativo en Colombia y la región continúan en franco ascenso.

En estas páginas, el lector encontrará un reflejo fiel del rigor y la riqueza temática que caracterizaron las jornadas de **ALTENCOA11-2026**. El presente volumen compila los resúmenes de las conferencias plenarias y los cursillos impartidos por investigadores de primer nivel, así como los aportes consignados en las ponencias y sesiones de pósteres. Este documento no solo da testimonio de la intensa labor de todos los participantes, sino que también se constituye como una obra de consulta obligada para nutrir futuras investigaciones e inspirar a las nuevas generaciones de matemáticos.

San Juan de Pasto, con su inmensa riqueza cultural, sus paisajes andinos y la calidez característica de su gente, brindó el escenario perfecto para el intercambio de ideas y la consolidación de redes de cooperación institucional. Expresamos nuestro profundo agradecimiento a la Universidad de Nariño por abrirnos sus puertas y por su vital apoyo logístico y organizativo. Es el momento de agradecer toda la colaboración brindada por todos nuestros amigos y compañeros de la Universidad de Nariño; desde todas las dependencias de nuestra universidad recibimos apoyo para que **ALTENCOA11-2026** fuera un éxito académico y un intercambio social inolvidable. En especial, destacamos el apoyo brindado por las siguientes dependencias: Rectoría (Dra. Martha Sofía González Insuasti), Vicerrectoría Administrativa (Dr. Iván Ernesto Martínez Guerrero), Vicerrectoría de Interacción Social e Investigaciones (Dr. Álvaro Javier Burgos Arcos), Dirección de Relaciones Internacionales (Directora Adriana Erazo Ruiz), Facultad de Ciencias, Exactas y Naturales (Decano Mg. Hernán Escobar) y Departamento de Matemáticas y Estadística (Director Mg. Fernando Soto Agreda).

De igual manera, extendemos nuestra más sincera gratitud a los miembros del Comité Organizador y del Comité Científico, a los conferencistas invitados, a los cursillistas y a cada uno de los asistentes. Su dedicación, entusiasmo y compromiso fueron los verdaderos motores que garantizaron el éxito de esta gran cita académica.

Confiamos en que los problemas planteados, los teoremas compartidos y los vínculos humanos forjados durante esta semana en Pasto seguirán dando frutos a largo plazo, fortaleciendo la ciencia y proyectando el talento de nuestra región hacia el mundo.

¡Nos vemos en Bucaramanga en ALTENCOA12-2028!

John H. Castillo
Coordinador General **ALTENCOA11-2026**
Universidad de Nariño
San Juan de Pasto, Nariño, Colombia
Octubre de 2026

Plenarias

- ⋆ **Florian Luca: una vida entre números y colaboraciones**, Carlos Alexis Gómez, Universidad del Valle, Colombia, Jhon Jairo Bravo, Universidad del Cauca, Colombia.
- ⋆ **La matemática de la desinformación: procesos estocásticos en grafos**, Pablo M. Rodriguez, Universidade Federal de Pernambuco, Brasil.
- ⋆ **Applying Brauer data analysis to Artin's braid group with applications in quantum entanglement and quantum computing**, Agustín Moreno Cañadas, Universidad Nacional de Colombia, Colombia.
- ⋆ **Some applications of algebraic coding theory**, Hiram Lopez, Virginia Tech, Estados Unidos.
- ⋆ **Opinion dynamics on stochastic graphs**, Alejandra Rada, Universidade Federal do ABC, Brasil.
- ⋆ **LCD and LCP of AG codes**, Alonso Sepúlveda Castellanos, Universidade Federal de Uberlândia, Brasil.
- ⋆ **Toward a theory of groupoid graded rings**, Javier Sánchez Serdà, Universidade de São Paulo, Brasil.
- ⋆ **Ejemplos de matemáticas en criptografía**, Jorge Jiménez Urroz, Universidad Politécnica de Madrid, España.
- ⋆ **De la categoría de homotopía de módulos proyectivos sobre álgebras gentiles para la categoria de Bondarenko**, Germán Benitez Monsalve, Universidade Federal do Paraná, Brasil.

Florian Luca: una vida entre números y colaboraciones

Carlos Alexis Gómez Ruiz[1], Jhon Jairo Bravo[2]

[1] Universidad del Valle, Colombia

[2] Universidad del Cauca, Colombia

✉ B carlos.a.gomez@correounivalle.edu.co, jbravo@unicauca.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026

San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. Esta plenaria será un homenaje al profesor Florian Luca, destacado investigador en teoría de números, cuya trayectoria científica estuvo marcada por una extraordinaria producción académica y una amplia red de colaboraciones. Se presentarán algunos aspectos de su trabajo en ecuaciones diofánticas, sucesiones recurrentes y problemas aritméticos, como una muestra de su particular manera de hacer y compartir matemáticas.

Un espacio especial estará dedicado a su relación científica y humana con Colombia. A través de su participación en los encuentros ALTENCOA y de sus vínculos con investigadores y jóvenes matemáticos del grupo ALTENUA y de otras instituciones del país, Florian contribuyó al desarrollo de colaboraciones, proyectos, publicaciones y nuevas líneas de investigación. Más allá de sus aportes científicos, dejó entre colegas y estudiantes numerosas amistades, recuerdos y enseñanzas.

La plenaria será también una oportunidad para compartir algunas historias y experiencias de quienes tuvieron la fortuna de trabajar y convivir con él, y para celebrar un legado que trasciende sus resultados matemáticos. Recordaremos así a Florian Luca como investigador, colaborador, maestro y amigo, y la profunda huella que dejó en la comunidad matemática colombiana.

La matemática de la desinformación: procesos estocásticos en grafos

Pablo Martin Rodriguez[1]

[1] Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Brasil

✉ pablo@de.ufpe.br

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Abstract. En esta conferencia mostraremos cómo los modelos matemáticos de naturaleza estocástica definidos sobre grafos permiten describir la dinámica de transmisión de información en poblaciones estructuradas. Veremos que el desarrollo de modelos simplificados, lejos de constituir una limitación, representa una estrategia eficaz para identificar principios universales en los procesos de difusión. Introduciremos formalmente un sistema de partículas interactuantes que constituye uno de los primeros enfoques analíticos para el estudio de rumores en poblaciones homogéneamente mezcladas.
A continuación, generalizaremos dicho marco incorporando una estructura subyacente de grafo, en la que los vértices representan individuos y las aristas codifican las interacciones potenciales. Mostraremos cómo la topología del grafo modula cualitativamente el comportamiento del proceso, al determinar las condiciones de persistencia o extinción del rumor. Finalmente, presentaremos resultados recientes sobre el comportamiento asintótico del modelo en diversas familias de grafos —incluidas redes regulares y grafos aleatorios— así como algunos problemas de interés que permanecen abiertos.

Keywords. Propagación de información; Proceso estocástico; Sistema de partículas interactuantes; Transición de fase.

Applying Brauer Data Analysis to Artin's Braid Group with Applications in Quantum Entanglement and Quantum Computing

Agustín Moreno Cañadas[1]

[1] Universidad Nacional de Colombia

✉ amorenoca@unal.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Abstract. Brauer Data Analysis (BDA) is a novel data analysis technique. It applies algebraic and combinatorial invariants of so-called Brauer configuration algebras for data analysis. This talk explains how elements of Artin's Braid group can be interpreted as specialized computers for constructing such algebras, and how this setting allows us to interpret quantum circuits and certain quantum entanglement states as indecomposable projective modules associated with some Brauer configuration algebras. Applications in the CAPTCHA industry are also described.

Keywords. BDA, Braid group, Borromean rings, CAPTCHA, Emerging image, Quantum entanglement, Quantum computing, Topological quantum computing.

Brauer configuration algebras were introduced in 2017 by Green and Schroll [7] to investigate algebras of wild and tame representation type. The analysis of their algebraic invariants such as their dimension, the dimension of their centers, and the structure of their indecomposable projective modules is said to be a Brauer analysis of the data (BDA) induced by them. Such an analysis allows for finding connections between the representation theory of algebras, integer partitions theory, graph energy theory, branched covering theory [3], snake graphs [6], and the Yang-Baxter equation theory [5], with practical applications in

- Manufacturing textile, freight industry [9].
- Cryptography [1].
- Quantum Computing [2].
- Cybersecurity [1].
- Music Composition [4].

This talk explains how elements of Artin's braid group (braids) can be viewed as specialized computers for constructing appropriate Brauer configuration algebras. Actually, Kauffman and Lomonaco [8] have interpreted generalizations of Artin's Braid group as quantum gates giving rise to the so-called topological quantum computing. In this talk, the family of Borromean-Brauer configuration algebras is described, applying to them a corresponding BDA by adding new tools, such as the algebraic and topological entropies, and associated covering multigraphs. We also interpret the Borromean knot as a GHZ (Greenberger-Horne-Zeilinger) quantum state and show how this machinery can construct emerging images which are associated with some open problems in AI and some based-reasoning CAPTCHAs.

References

[1] Cañadas, A.M.; Angarita, M.A.O. Brauer configuration algebras for multimedia-based cryptography and security applications. Multimed. Tools Appl. 80, 23485–23510, 2021.

[2] Cañadas, A.M.; Gutiérrez, I.; Mendez, O.M. Brauer Analysis of Some Cayley and Nilpotent Graphs and Its Application in Quantum Entanglement Theory. Symmetry 16 (5), 2024.

[3] Cañadas, A.M.; Rodríguez-Nieto, J.G.; Salazar-Díaz, O.P. Brauer Configuration Algebras Induced by Integer Partitions and Their Applications in the Theory of Branched Coverings. Mathematics 12(22), 2024.

[4] Cañadas, A.M.; Espinosa, P.F.F.; Rodríguez-Nieto, J.G.; Méndez, O.M.; Arteaga-Bastidas, R.H. Interactions Between Brauer Configuration Algebras and Classical Cryptanalysis to Analyze Bach's Canons. arXiv:2404.07240, 2024.

[5] Cañadas, A.M.; Ballester-Bolinches, A.; Marın-Gaviria, I. Solutions of the Yang-Baxter equation arising from Brauer configuration algebras. Computation 11(1), 1–17, 2022.

[6] Espinosa, P.F.F. Categorification of Some Integer Sequences and Its Applications. Ph.D. Thesis, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia, 2021.

[7] Green, E.L.; Schroll, S. Brauer configuration algebras: A generalization of Brauer graph algebras. Bull. Sci. Math. 2017, 141, 539–572.

[8] Kauffman, L.; Lomonaco, S.L. Braiding operators are universal quantum gates. New Journal of Physics 6, 2004.

[9] Mendez, O.M.; Arteaga Bastidas, R.H.; Velasquez Londoño, J.C.; Hernandez Jurado, F.A. Brauer analysis for the color quality control of tone textile, 15th IEEE International Conference on Pattern Recognition Systems (ICPRS), Valparaiso, Viña del Mar, Chile, 1-8, 2025.

Some applications of algebraic coding theory

Hiram H. López[1]

[1] Virginia Tech, VA, USA

✉ hhlopez@vt.edu

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Abstract. In this talk, we present a wealth of interconnections between algebra, geom- etry, and combinatorics, and the areas of coding theory and its applications, such as quantum computation, distributed storage, matrix multiplication, and cryptography. We will see how properties of vanishing ideals, together with their properties like Grobner bases, Hilbert functions, footprints, degrees, being decreasing, or being Gorenstein; the study of curves, including Riemann-Roch space associated with special divisors; and the counting of lattice points, such as integer points inside of certain polyhedra, play roles in these applications.

Keywords. Coding theory, evaluation codes, algebraic coding theory.

References

[1] Camps-Moreno, E., López, H. H., Matthews, G. L., et al. (2024). An algebraic characterization of binary CSS-T codes and cyclic CSS-T codes for quantum fault tolerance. *Quantum Information Processing*. 23(230). DOI: 10.1007/s11128-024-04427-5.

[2] López, H. H., Matthews, G. L. (2023). Multivariate Goppa Codes. *IEEE Transactions on Information Theory*. 69 (1):126-137. DOI: 10.1109/TIT.2022.3201692.

[3] López, H. H., Matthews, G. L., Valvo, D. (2022). Secure MatDot codes: a secure, distributed matrix multiplication scheme. *2022 IEEE Information Theory Workshop (ITW)*, Mumbai, India, 149-154. DOI: 10.1109/ITW54588.2022.9965839.

[4] López, H. H., Soprunov, I., Villarreal, R. H. (2021). The dual of an evaluation code. *Designs, Codes and Cryptography*. (89):1367-1403. DOI: 10.1007/s10623-021-00872-w.

Opinion dynamics on stochastic graphs

Alejandra Rada[1]

[1] Universidade Federal do ABC, Santo André, Brazil

✉ alejandra.rada@ufabc.edu.br

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Abstract. This study explores how rumor transmission and opinion dynamics in social networks are shaped by polarization and individual memory capacity. To address the limitations of existing models that assume fixed memory, we propose a framework featuring tunable memory storage and dynamic affinity updates based on ideological proximity (measured via Jensen-Shannon divergence). The simulations reveal two primary findings: first, reduced memory capacity accelerates and facilitates polarization; second, within polarized groups, dissenting individuals face social exclusion without the ability to form new bonds among themselves.

Keywords. Opinion dynamics, Jensen-Shannon divergence, memory, ideological proximity.

Polarization is a widespread phenomenon that significantly affects economic, political, and legal systems [6] and often leads to the formation of echo chambers and/or homophilic clusters [1–4]. However, few existing models of rumor transmission and opinion dynamics incorporate polarization and memory capacity storage. In 2019, Wang *et al.* [7] proposed a rumor dissemination model in which information is distorted and polarized prior to transmission, with receivers deciding to accept or reject messages based on the spreader's network connectivity. Subsequently, Rúa *et al.* [5] incorporated ideological proximity via Jensen–Shannon divergence, defining the acceptance probability as a function of both ideological alignment and spreader popularity. Notably, both frameworks evaluated their dynamics on Barabási–Albert scale-free networks while keeping memory capacity fixed.

Despite those contributions, further work is needed to account for variable memory effects on polarization. To address this gap, we propose a model in which memory capacity storage is not fixed but instead functions as a tunable parameter. To capture potential polarization effects during information propagation, we introduce a function that quantifies the polarity of information, along with a distortion probability that depends on an individual's tendency to polarize propagated information either positively or negatively. This approach offers greater realism in modeling information diffusion: rather than starting from a blank slate and filling their memories solely with others' opinions, individuals transmit information from their own existing, biased, and variable memories.

We also presents a model that considers the affinity between individuals on a stochastic graph. The affinity ingredient is an innovative feature that simulates the updating of neighbors (edges) in the graph. It is defined through the Jensen-Shannon measure, which quantifies the ideological proximity between individuals and is identified as the weight of network connections.

The main conclusions of our work are twofold. First, a reduced memory capacity facilitates the polarization process. Second, within polarized groups, individuals who disagree with the majority are excluded and fail to form new bonds with other excluded members, preventing the emergence of an alternative group.

This is a joint work with *Yamir Moreno and Henrique Ferraz de Arruda* from the Institute for Biocomputation and Physics of Complex Systems (BIFI), University of Zaragoza (UNIZAR), Spain.

Acknowledgements

This study was supported by grant 2024/15437-0 São Paulo Research Foundation (FAPESP).

References

[1] de Arruda, H. F., Cardoso, F. M., de Arruda, G. F., Hernández, A. R., da Fontoura Costa, L., Moreno, Y. (2022). Modelling how social network algorithms can influence opinion polarization. *Information Sciences*, 588:265–278. DOI: 10.1016/j.ins.2021.12.046.

[2] Cinelli, M., De Francisci Morales, G., Galeazzi, A., Quattrociocchi, W., Starnini, M. (2021). The echo chamber effect on social media. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 118(9):e2023301118. DOI: 10.1073/pnas.2023301118.

[3] Dandekar, P., Goel, A., Lee, D. T. (2013). Biased assimilation, homophily, and the dynamics of polarization. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 110(15):5791–5796. DOI: 10.1073/pnas.1217220110.

[4] Gaitonde, J., Kleinberg, J., Tardos, É. (2021). Polarization in Geometric Opinion Dynamics. In *Proceedings of the 22nd ACM Conference on Economics and Computation (EC '21)*, pages 499–519. DOI: 10.1145/3465456.3467633.

[5] de Paula, P. O., Rada, A., Rúa, C. (2024). Application of Information Theory in Rumor Spreading Modeling Considering Polarization in Complex Networks. arXiv: 2408.08891.

[6] Sunstein, C. (2002). The Law of Group Polarization. *Journal of Political Philosophy*, 10(2):175–195. DOI: 10.1111/1467-9760.00148.

[7] Wang, C., Koh, J. M., Cheong, K. H., Xie, N.-G. (2019). Progressive Information Polarization in a Complex-Network Entropic Social Dynamics Model. *IEEE Access*, 7:35394–35404. DOI: 10.1109/ACCESS.2019.2902400.

LCD and LCP of AG Codes

Alonso Sepúlveda Castellanos[1], Adler Marques[2], Luciane Quoos[3]

[1] Institute of Mathematics at the University Fedral of Uberlândia, Uberlândia, Brazil
[2] Institute of Matehmatics at the University Federal of Rio de Janeiro, Brazil
[3] Institute of Mathematics at the University Federal of Rio de Janeiro, Brazil
✉ alonso.castellanos@ufu.br, adler@ufrj.br, luciane@im.ufrj.br

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Abstract. Linear complementary pairs (LCPs) of codes and linear complementary dual (LCD) codes have gained significant attention due to their applications in coding theory and cryptography. In this work, we construct explicit LCPs of codes and LCD codes from function fields of genus $g \geq 1$.

Keywords. AG codes, algebraic curves, function fields, LCD codes, LCP of codes.

Let $\mathbb{F}_q$ be the finite field of order q, where q is a power of a prime number. A linear code $\mathcal{C}$ over $\mathbb{F}_q$ is an $\mathbb{F}_q$-subspace of dimension k in $\mathbb{F}_q^n$, where $n \geq 1$. A code $\mathcal{C}$ is said to have length n, dimension k, and (Hamming distance) minimum distance $d = d(\mathcal{C})$. These parameters are commonly denoted by $[n, k, d]$. For a given linear code $\mathcal{C}$, the dual code $\mathcal{C}^\perp$ is defined with respect to the Euclidean inner product in $\mathbb{F}_q^n$ and has dimension $n - k$. The hull of $\mathcal{C}$, with parameters $[n, k]$, is defined as

$$\mathrm{Hull}(\mathcal{C}) = \mathcal{C} \cap \mathcal{C}^\perp.$$

The concept of the hull was first introduced by Assmus and Key in [1] for the classification of finite projective planes. If $\dim(\mathrm{Hull}(\mathcal{C})) = \ell$, it follows that $0 \leq \ell \leq \min k, n - k$. In this case, $\mathcal{C}$ is referred to as an ℓ-dimensional hull code. Specifically, if $\ell = 0$, $\mathcal{C}$ is called an LCD code, and if $\ell = k$, the code $\mathcal{C}$ is said to be self-orthogonal, i.e., $\mathcal{C}^\perp \subseteq \mathcal{C}$.

A pair $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ of linear codes over $\mathbb{F}_q$ of length n is called an LCP of codes if $\mathcal{C} + \mathcal{D} = \mathbb{F}_q^n$ and $\mathcal{C} \cap \mathcal{D} = 0$. In the special case where $\mathcal{D} = \mathcal{C}^\perp$, the code $\mathcal{C}$ is an LCD code. LCD codes were first studied by Massey in 1964 [13], and in [14], he demonstrated the existence of asymptotically good LCD codes. In 2004, Sendrier [19] refined this result by proving that LCD codes achieving the asymptotic Gilbert-Varshamov bound exist.

Over the past decade, LCD codes and LCPs of codes have received increased attention due to their applications in cryptography. These include direct sum masking as a countermeasure against side-channel attacks (SCA) and fault injection attacks (FIA) [17, 5, 6], as well as enhancing the robustness of encoded circuits against hardware Trojan horses [18, 17].

In 2018, Carlet, Mesnager, Tang, Qi, and Pellikaan proved in [9] that for $q > 3$, any linear code over $\mathbb{F}_q$ is equivalent to an LCD code. This result implies that any set of parameters $[n, k, d]$ achievable by linear codes over $\mathbb{F}_q$ with $q > 3$ is also achievable by Euclidean LCD codes. Jin and Xing [11] showed that an algebraic geometry code over $\mathbb{F}_{2^m}$ $(m \geq 7)$ is equivalent to an LCD code. More recently, the classification of LCD codes has been extended to include codes with higher hull dimensions (see [12]).

Numerous studies have focused on the characterization and construction of LCPs of codes and LCD codes (see, for instance, [14, 22, 7, 8, 20] and references therein). In the context of AG codes, Beelen and Jin [3] explicitly constructed several classes of MDS LCD codes over the rational function field. Mesnager, Tang, and Qi [15] investigated LCD AG codes and provided examples over the projective line, elliptic and hyperelliptic curves, and the Hermitian curve. A few years later, Bhowmick, Dalai, and Mesnager [4] established conditions for constructing LCPs of codes and presented illustrative examples.

Chen, Ling, and Liu [10] determined the dimension of the hull of Reed-Solomon codes using AG codes. In 2024, Moreno, López, and Matthews [16] introduced an explicit construction of non-special divisors of "small" degree over Kummer extensions. These divisors have been effectively used to describe LCD algebraic geometry codes from certain families over Kummer extensions.

In this work, we focus on the effective construction of LCPs of codes and LCD codes over function fields of genus $g \geq 1$ over $\mathbb{F}_q$. Our approach relies on the existence of non-special divisors of degree g and $g-1$ supported on the rational places of the function field, as established in 2006 [2]. Theoretical conditions for non-special divisors to construct LCPs of codes over general function fields were provided in [4, Theorem 3.5]. These constructions depend heavily on the existence of non-special divisors of degree $g-1$ in the function field. Moreover, for Kummer extensions, an explicit construction of such divisors was given in [16, Theorems 8, 12, 13], leading to the construction of several LCD codes over specific function fields.

References

[1] E.F. Assmus Jr. and J.D. Key. Affine and projective planes. *Discrete Mathematics*, **83**(2-3):161–187, 1990.

[2] S. Ballet and D. Le Brigand. On the existence of non-special divisors of degree g and $g-1$ in algebraic function fields over $\mathbb{F}_q$. *Journal of Number Theory*, 116(2):293–310, 2006.

[3] P. Beelen and L. Jin. Explicit MDS codes with complementary duals. *IEEE Transactions on Information Theory*, 64(11):7188–7193, 2018.

[4] S. Bhowmick, D. K. Dalai, and S. Mesnager. On linear complementary pairs of algebraic geometry codes over finite fields. *Discrete Mathematics*, 347(12):114193, 2024.

[5] J. Bringer, C. Carlet, H. Chabanne, S. Guilley, and H. Maghrebi. Orthogonal direct sum masking. In D. Naccache and D. Sauveron, editors, *Information Security Theory and Practice. Securing the Internet of Things*, 40–56, 2014.

[6] C. Carlet and S. Guilley. Complementary dual codes for counter-measures to side-channel attacks. In R. Pinto, P. Rocha Malonek, and P. Vettori, editors, *Coding Theory and Applications*, 97–105, 2015.

[7] C. Carlet, C. Guneri, F. Ozbudak, B. Özkaya, and P. Solé. On linear complementary pairs of codes. *IEEE Transactions on Information Theory*, 64(10):6583–6589, 2018.

[8] C. Carlet, S. Mesnager, C. Tang, and Y. Qi. Euclidean and hermitian LCD MDS codes. *Designs, Codes and Cryptography*, 86(11):2605–2618, 2018.

[9] C. Carlet, S. Mesnager, C. Tang, Y. Qi, and R. Pellikaan. Linear codes over $\mathbb{F}_q$ are equivalent to LCD codes for $q > 3$. *IEEE Transactions on Information Theory*, 64(4):3010–3017, 2018.

[10] B. Chen, S. Ling, and H. Liu. Hulls of Reed-Solomon codes via algebraic geometry codes. *IEEE Transactions on Information Theory*, 69(2):1005–1014, 2023.

[11] L. Jin and C. Xing. Algebraic geometry codes with complementary duals exceed the asymptotic Gilbert-Varshamov bound. *IEEE Transactions on Information Theory*, 64(9):6277–6282, 2018.

[12] G. Luo, M-F. Ezerman, M. Grassl, and S. Ling Constructing quantum error-correcting codes that require a variable amount of entanglement, *Quantum Information Processing*, **23** Article 4, 2024.

[13] J. L. Massey. Reversible codes. *Information and Control*, 7(3):369–380, 1964.

[14] J. L. Massey. Linear codes with complementary duals. *Discrete Mathematics*, 106-107:337–342, 1992.

[15] S. Mesnager, C. Tang, and Y. Qi. Complementary dual algebraic geometry codes. *IEEE Transactions on Information Theory*, 64(4):2390–2397, 2018.

[16] E. C. Moreno, H. H. López, and G. L. Matthews. Explicit non-special divisors of small degree, algebraic-geometric hulls, and LCD codes from Kummer extensions. *SIAM Journal on Applied Algebra and Geometry*, 8(2):394–413, 2024.

[17] X. T. Ngo, S. Bhasin, J.-L. Danger, S. Guilley, and Z. Najm. Linear complementary dual code improvement to strengthen encoded circuit against hardware trojan horses. In *2015 IEEE International Symposium on Hardware Oriented Security and Trust (HOST)*, 82–87, 2015.

[18] X. T. Ngo, S. Guilley, S. Bhasin, J.-L. Danger, and Z. Najm. Encoding the state of integrated circuits: a proactive and reactive protection against hardware trojans horses. In *Proceedings of the 9th Workshop on Embedded Systems Security*, 1–10, 2014.

[19] N. Sendrier. Linear codes with complementary duals meet the Gilbert–Varshamov bound. *Discrete Mathematics*, 285(1):345–347, 2004.

[20] L. Sok, M. Shi, and P. Solé. Constructions of optimal LCD codes over large finite fields. *Finite Fields and Their Applications*, 50:138–153, 2018.

[21] H. Stichtenoth. *Algebraic Function Fields and Codes*. Graduate Texts in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2008.

[22] X. Yang and J. L. Massey. The condition for a cyclic code to have a complementary dual. *Discrete Mathematics*, 126(1):391–393, 1994.

Toward a Theory of Groupoid Graded Rings

Javier Sánchez[1]

[1] Departamento de Matemática-IME, Universidade de São Paulo, São Paulo-SP, Brasil

✉ jsanchez@ime.usp.br

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Abstract. We discuss initial steps toward the development of the theory of object-unital groupoid-graded rings. Although such rings do not, in general, possess a global identity element, they admit an appropriate system of local units and we define local chain conditions, instead of global ones.
Among our main contributions, we present a graded version of the Wedderburn–Artin Theorem. In addition, we develop the theory of the graded Jacobson radical, establishing results on different types of nilpotency conditions and relating them with the local chain conditions and proving graded analogues of the Hopkins–Levitzki Theorem about the equivalence of the local chain conditions on graded rings and graded modules.
Despite notable similarities with the classical theory of rings, the groupoid-graded setting exhibits significant differences, stemming largely from the fact that our rings are typically infinite direct sums of right ideals.
This is ongoing joint work with Zaqueu Cristiano from the University of São Paulo and Wellington Marques de Souza from the Federal University of Mato Grosso do Sul.

Keywords. Graded Rings and Modules, Artinian and Noetherian modules, Jacobson radical, Hopkins-Levitzki Theorem.

Let R be a unital associative ring with Jacobson radical $J(R)$. Important results in Classical Ring Theory are the following, see for example [4].

Teorema 1 (Wedderburn-Artin Theorem)**.** *R is a simple right artinian ring if and only if $R \cong M_n(D)$ where D is a division ring and $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.* □

Teorema 2. *R is a semisimple ring if and only if R is a right artinian and $J(R) = 0$.* □

Teorema 3. *If R is a right artinian ring, then $J(R)$ is a nilpotent ideal of R and $R/J(R)$ is a semisimple ring.* □

Teorema 4 (Hopkins-Levitzki Theorem)**.** *Suppose that $R/J(R)$ is a semisimple ring and $J(R)$ is a nilpotent ideal of R. Then the following statements are equivalent for a right R-module M_R:*

(1) *M_R is artinian.*

(2) *M_R is noetherian.*

In particular, if R is a right artinian ring, then R is a right noetherian ring. □

We generalize those theorems to the groupoid graded context where rings are assumed to be associative but not necessarily unital. We proceed to define the objects that we will be considering and the main obstacles to obtain our results.

A *groupoid* Γ is a small category in which every morphism is an isomorphism. We will denote the set of objects of Γ by Γ_0 and we identify them with its identity morphisms. Thus, the identity morphism of $e \in \Gamma_0$ will be denoted again by e. If $e, f \in \Gamma_0$ and γ is a morphism from e to f, we will write $d(\gamma) = e$.

We say that the ring R is a Γ-*graded ring* if there is a family $\{R_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ of additive subgroups of R such that $R = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} R_\gamma$ and $R_\gamma R_\delta \subseteq R_{\gamma\delta}$, for each $\gamma, \delta \in \Gamma$. Following [1], we say that R is *object unital* if, for all $e \in \Gamma_0$, the ring R_e is unital with identity element 1_e, and for all $\gamma \in \Gamma$ and $r \in R_\gamma$, we have $1_{r(\gamma)}r = r1_{d(\gamma)} = r$. It follows from [5, Proposition 2.1.1] that R is unital if and only if the set $\{e \in \Gamma_0 \colon 1_e \neq 0\}$ is finite. Observe that R has the following decomposition as a direct sum of right ideals

$$R = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} R_\gamma = \bigoplus_{e\in\Gamma_0} \Big(\underbrace{\bigoplus_{r(\gamma)=e} R_\gamma}_{R(e)} \Big) = \bigoplus_{e\in\Gamma_0} R(e).$$

We say that R is right Γ_0-*artinian* if $R(e)$ satisfies the descending chain condition for its graded submodules for each $e \in \Gamma_0$. Similarly, one can define when R is *right* Γ_0-*noetherian*. The *graded Jacobson radical* of R is the intersection of all maximal graded right ideals of R. One can show that it is in fact an ideal.

We are able to show a Wedderburn-Artin Theorem for R when it is *gr-semisimple*, i.e. R is a (possibly infinite) sum of gr-simple R-modules.

Unlike in the classical case, the graded Jacobson radical of a Γ_0-artinian ring is not necessarily nilpotent. However, we present a Hopkins-Levitzki type theorem for *gr- semiprimary rings*, that is, graded rings such that $R/J(R)$ is gr-semisimple and $J(R)$ is *objectwise nilpotent* in the following sense: for each $e \in \Gamma_0$, there exists a natural number n_e such that $1_e J^{n_e} = J^{n_e} 1_e = 0$. We observe that a right Γ_0-artinian ring does not imply being right Γ_0-noetherian or having an objectwise nilpotent graded Jacobson radical. We show that a ring that is both right and left Γ_0-artinian is always gr-semiprimary.

This is an ongoing project with Zaqueu Cristiano from the University of Sao Paulo and Wellington Marques de Souza from the Federal University of Mato Grosso do Sul. Some of our results can be found in [2, 3].

References

[1] Cala, J., Lundström, P., Pinedo, H. (2022). Graded modules over object-unital groupoid graded rings. *Commun. Algebra* 50(2): 444–462. DOI: 10.1080/00927872.2021.1959601.

[2] Cristiano, Z., Marques de Souza, W., Sánchez, J. (2026). Groupoid graded semisimple rings. *J. Algebra* 687:1–116. DOI: 10.1016/j.jalgebra.2025.08.020.

[3] Cristiano, Z., Marques de Souza, W., Sánchez, J. (2025). Graded chain conditions and graded Jacobson radical of groupoid graded modules, 57 pp. arXiv:2508.03667. To appear in *São Paulo J. Math. Sci.*.

[4] Lam, T. Y. (2001). *A First Course in Noncommutative Rings*. Graduate Texts in Mathematics, vol. 131, 2nd ed., Springer Verlag.

[5] Lundström, P. (2004). The category of groupoid graded modules. *Colloq. Math.* 100(2):195–211. DOI: 10.4064/cm100-2-4.

Ejemplos de Matemáticas en Criptografía

Jorge Jiménez Urroz

Universidad Politécnica de Madrid, España
✉ jorge.urroz@upm.es

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. Desde la época de César hasta la actualidad, no importa quién o en qué parte del planeta, todos tenemos algún secreto. Ya sea un pedacito de tu vida personal o el mensaje más determinante para la humanidad a través del teléfono rojo, todos queremos que lo sepa, solo y exclusivamente, aquel a quien hemos escogido para contárselo. Y, a día de hoy, en que la comunicación es digital y la potencia de los ordenadores colosal, ¿cómo podemos garantizar de forma tajante que nadie más tendrá acceso al mensaje? ¿Quién o qué es capaz de proteger la información a tal nivel?
La respuesta está en las matemáticas.
En la charla veremos algunos ejemplos de cómo y qué partes de las matemáticas —de grado, posgrado e incluso de investigación en la actualidad— nos permiten aseverar que nuestros mensajes están seguros... por ahora.
Palabras claves. Curvas elípticas, RSA, factorización, criptografía postquántica

Referencias

[1] Clay Mathematics Institute. (n.d.). "The Millennium Prize Problems." Accessed June 18, 2026. Available at: https://www.claymath.org/millennium-problems/.

[2] Dieulefait, L., Urroz, J. (2020). Factorization and Malleability of RSA Moduli, and Counting Points on Elliptic Curves Modulo N. *Mathematics*. 8(12): 2126.

[3] Dieulefait, L., Urroz, J. (2025). Computing $\varphi(N)$ for an RSA Module with a Single Quantum Query. *Quantum Information Processing* 24(12): 386.

[4] Gutierrez, J., Urroz, J. (2023). Local Permutation Polynomials and the Action of e-Klenian Groups. *Finite Fields and Their Applications* 91: Paper No. 102261.

[5] National Institute of Standards and Technology (NIST). (2026). *NIST IR 8610*. Available at: https://nvlpubs.nist.gov/nistpubs/ir/2026/NIST.IR.8610.pdf.

[6] Pomerance, C.(1996). A Tale of Two Sieves. *Notices of the American Mathematical Society*. 43(12): 1473–1485.

[7] Rivest, R., Shamir, A., Adleman, L. (1978). A Method for Obtaining Digital Signatures and Public-Key Cryptosystems. *Communications of the ACM*. 21(2): 120–126.

[8] Shor, P. W. (1997). Polynomial-Time Algorithms for Prime Factorization and Discrete Logarithms on a Quantum Computer. *SIAM Journal on Computing*. 26(5): 1484–1509.

[9] Stinson. D. R. (2006). *Cryptography: Theory and Practice*. Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC.

[10] Washington, L. C. (2008). *Elliptic Curves: Number Theory and Cryptography*. Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC.

De la Categoria de Homotopia de Módulos Proyectivos sobre Álgebras Gentiles para la Categoria de Bondarenko

Germán Benitez[1]

[1] Universidade Federal do Paraná (UFPR), Pontal do Paraná, Paraná, Brasil

✉ germanbenitez@ufpr.br, gabm03@gmail.com

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. Bondarenko y Drozd presentaron una descripción de todos los objetos indescomponibles en una categoria de representaciones de posets, hoy en dia conocida como Categoria de Bondarenko. Esta categoria fué esencial en el trabajo de Bekkert y Merklen, en [1], para clasificar todos los objectos indescomponibles de la categoria derivada de álgebras gentiles. En vista de esta conexión con la categoria derivada, la cual posee una estructura triangulada, en esta charla, presentaremos una estructura triangulada para cierto cociente de la categoria de Bondarenko asociada a un poset. Como una consecuencia de este hecho, mostraremos el funtor de inmersión triangulado de la categoria de homotopia de módulos proyectivos sobre álgebras gentiles para un cociente de la categoria de Bondarenko.

Proyecto en colaboración con *Gustavo Costa* [2, 3] de la Universidade Federal do ABC (UFABC) y con *Lucas Queiroz Pinto* [3] de la Universidade de São Paulo (IME–USP).

Palabras claves. Categoria de homotopia, categoria derivada, representaciones de posets, categoria triangulada.

Referencias

[1] V. Bekkert and H. A. Merklen, Indecomposables in derived categories of gentle algebras, Algebr. Represent. Theory **6** (2003), no. 3, 285–302; MR2000963

[2] G. Benitez and G. Costa, From the homotopy category of projective modules over gentle algebras to poset representations, J. Algebra **690** (2026), 340–378; MR4989294

[3] Benitez, G., Costa, G., Pinto, L., (2024). Triangulated Structure for Bondarenko's Category, 12 pp. arXiv: 2403.18836. Disponible en https://arxiv.org/abs/2403.18836

Cursillos

- ⋆ **Introducción a las Variedades Tóricas**, Sergio Troncoso, Universidad del Valle, Colombia.
- ⋆ **Álgebras de evolución y sus derivaciones**, Paula Cadavid, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Brasil.
- ⋆ **Analítica de datos para muestras de funciones**, Henry Laniado, Universidad del Cauca, Colombia.
- ⋆ **Introducción a la teoría de códigos**, Diana Bueno Carreño, Pontificia Universidad Javeriana, Cali, Colombia.
- ⋆ **Colores en la geometría combinatoria**, Mario Alejandro Huicochea Mason, SECIH-TI/UAZ, México.
- ⋆ **Una introducción al álgebra de diferencias**, Yamidt Bermudez, Universidad del Valle, Pedro Hernandez Rizzo, Universidad de Antioquia, Colombia.

A first Introduction on Toric Variaties

Sergio Troncoso Igua[1]

[1] Universidad del Valle, Cali, Colombia

✉ sergio.troncoso@correounivalle.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Abstract. The study of toric varieties is a fascinating area of algebraic geometry because it connects geometry, algebra, and combinatorics in a very visual and concrete way. In this course, we will explore the theory of toric varieties starting from the basics, so only a modest mathematical background is required. The idea is to gradually develop the main concepts and techniques of the subject while understanding why toric varieties have become such an important tool in modern algebraic geometry.
Throughout the course, we will study objects such as cones, lattices, polytopes, and fans, and we will see how they provide a combinatorial description of geometric spaces. One of the most appealing aspects of toric geometry is that many sophisticated ideas can be understood through explicit examples and visual constructions.
As the course progresses, we will move toward more advanced topics and applications of the theory. In particular, we will eventually reach the resolution of certain singularities using Hirzebruch–Jung negative continued fractions, illustrating how toric geometry offers elegant and concrete methods for understanding complicated geometric phenomena. By the end of the course, participants will have a solid introduction to the subject and a view toward more advanced research topics.

Keywords. Toric Varieties, Algebraic Geometry, Convex Geometry.

This course is an introduction to toric geometry with an emphasis on explicit constructions, combinatorial methods, and the study of singularities from the perspective of algebraic geometry. The course will develop the theory progressively, beginning with the combinatorial and algebraic foundations of toric varieties and culminating in the resolution of cyclic quotient surface singularities through Hirzebruch–Jung continued fractions. The general philosophy throughout the course is that many geometric properties of a variety can be encoded by combinatorial objects such as cones, fans, and polytopes.

We begin with the basic combinatorial ingredients underlying toric geometry. The first topics include lattices, dual lattices, semigroups, rational polyhedral cones, dual cones, and convex lattice polytopes. Particular attention will be given to the semigroup associated to a cone and to Gordan's Lemma, which guarantees finite generation of the corresponding monoid. From these constructions we will define semigroup algebras and explain how affine toric varieties arise naturally as spectra of these algebras. Explicit examples will be studied in detail in order to understand how relations between generators of the semigroup translate into binomial ideals defining affine toric varieties.

The course will then introduce algebraic tori and torus actions. We will study the character lattice and the interpretation of monomials as characters of the torus. Using this perspective, affine toric varieties will be presented as varieties containing an algebraic torus as a dense open subset whose torus action extends to the whole variety. We will discuss the embedding of the torus into affine toric varieties and analyze how the geometry of the defining cone controls properties such as dimension, normality, and singularities.

After the affine case, we will develop the theory of toric varieties associated to fans. A fan will be introduced as a compatible collection of strongly convex rational polyhedral cones, and we will

explain how affine toric varieties corresponding to adjacent cones can be glued together to produce global toric varieties. Fundamental examples such as projective space, Hirzebruch surfaces, and blow-ups of toric surfaces will be discussed from the fan perspective. We will also study the relationship between geometric properties of a toric variety and combinatorial properties of its fan, including completeness and compactness criteria.

An important part of the course will be devoted to the orbit–cone correspondence. We will study the bijection between cones of a fan and torus orbits of the associated toric variety, together with the correspondence between dimensions of cones and dimensions of orbits. This provides a direct combinatorial description of invariant subvarieties and divisors. In particular, we will introduce torus-invariant Weil divisors, canonical divisors, and the divisor group generated by the rays of the fan.

The next section of the course focuses on singularities and resolutions in dimension two. We will define smooth cones and smooth fans and prove the criterion stating that a toric variety is smooth if and only if all cones in the corresponding fan are smooth. Since singularities of toric surfaces occur precisely at torus-fixed points corresponding to two-dimensional cones, this reduces the problem of resolution to a local combinatorial procedure.

We will then study toric morphisms and subdivisions of fans, leading to the construction of resolutions of singularities. In dimension two, we will discuss the explicit algorithm for resolving a cone by subdividing it into smooth cones using lattice points lying on the boundary of the convex hull associated to the cone. This construction yields the minimal toric resolution of a surface singularity. We will analyze the exceptional divisors appearing in the resolution and compute their self-intersection numbers directly from the combinatorics of the subdivision. Special attention will be given to configurations of exceptional curves and their interpretation as chains of smooth rational curves.

Once resolutions are understood from the fan perspective, we will study cyclic quotient singularities. Every two-dimensional toric singularity can be expressed as a quotient singularity of type

$$\frac{1}{d}(1,k),$$

and we will explain how the cone determines the quotient structure through lattice indices and normal forms. The course will discuss the relation between the determinant of the cone generators and the order of the finite cyclic group acting on the affine plane. Several examples, including singularities of type A_n, will be developed explicitly.

The final part of the course will focus on Hirzebruch–Jung continued fractions and their role in the minimal resolution of cyclic quotient singularities. We will explain how a singularity of type

$$\frac{1}{d}(1,k)$$

admits a minimal resolution whose exceptional locus is determined by the negative continued fraction expansion of

$$\frac{d}{k}.$$

The coefficients of this expansion determine the self-intersection numbers of the exceptional curves appearing in the resolution. Explicit computations and examples will be carried out in detail to illustrate how the combinatorics of continued fractions corresponds geometrically to subdivisions of cones and configurations of exceptional divisors.

The course will also cover several aspects of toric birational geometry and Fano varieties. We will study simplicial fans, quotient singularities, canonical and terminal singularities, and the combinatorial characterization of toric Fano varieties through Fano polytopes. In dimension two, this naturally leads

to the study of toric del Pezzo surfaces. The dictionary between geometric properties and combinatorial conditions on the associated polytope will be emphasized throughout this part of the course.

Another important topic will be the relation between divisors and polytopes. Given a torus-invariant divisor, we will associate a polytope in the dual lattice and study how geometric properties of the divisor are reflected in the combinatorics of the polytope. We will discuss global sections, ampleness, lattice volume, and normal fans of polytopes, together with examples involving projective spaces and Hirzebruch surfaces. This point of view provides a geometric interpretation of divisors and embeddings of toric varieties into projective space.

Finally, depending on the pace of the course, we may discuss weighted projective spaces, weighted blow-ups, and the quotient description of toric varieties through Geometric Invariant Theory. Topics such as weight matrices, secondary fans, irrelevant ideals, and stability conditions will be introduced in examples in order to illustrate how toric varieties can also be described as quotients of affine spaces by torus actions.

The main references for the course will be [2] by William Fulton and [1] by David Cox, John Little, and Henry Schenck, together with supplementary notes and articles related to singularities and resolutions in the toric setting.

References

[1] *D. Cox, J. Little, and H. Schenc*, Toric varieties. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS) (2011; Zbl 1223.14001)

[2] *W. Fulton*, Introduction to toric varieties. The 1989 William H. Roever lectures in geometry. Princeton, NJ: Princeton University Press (1993; Zbl 0813.14039)

Àlgebras de evolución y sus derivaciones

Paula Cadavid[1]

[1] Universidade Federal Rural de Pernambuco - UFRPE, Recife, Brasil

✉ paula.cadavid@ufrpe.br

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Abstract. Las álgebras de evolución constituyen una clase particular de álgebras no asociativas que poseen conexiones con diversos campos de las matemáticas, tales como la teoría de grafos, la teoría de grupos y las cadenas de Markov discretas, entre otros. En este cursillo se presentará una introducción a estas estructuras, con un enfoque centrado en su relación con la teoría de grafos.
Utilizaremos esta perspectiva para exponer técnicas y resultados que permitan calcular sus derivaciones, así como para discutir algunos problemas abiertos en el área. En particular, presentaremos los avances y resultados recientes desarrollados en las contribuciones de Elduque y Labra [1, 2] sobre la interacción fundamental entre grafos, automorfismos y álgebras de evolución. Asimismo, abordaremos en detalle los teoremas de caracterización para el espacio de derivaciones asociados a grafos, basándonos en los trabajos de Cadavid, Rodiño Montoya y Rodríguez [3], Camacho et al. [4], Cabrera et al. [5], y Cabrera, Cadavid y Reis [6].

Keywords. Álgebra de evolución, grafo, derivación

References

[1] Elduque, A., Labra A. (2015) Evolution algebras and graphs. *J. Algebra Appl.* 14:1550103.

[2] (2021) Elduque, A., Labra A. Evolution algebras, automorphisms, and graphs. *Linear Multilinear Algebra.* 69:331-342.

[3] Cadavid P., Rodiño Montoya M. L., Rodriguez P. M. (2020) Characterization theorems for the space of derivations of evolution algebras associated to graphs. *Linear Multilinear Algebra.* 68:1340-1354.

[4] Camacho, L., Gomez, J., Omirov, B., Turdibaev. (2013) The dierivations of some evolution algebras. *Linear Multilinear Algebra.* 61:309-322.

[5] Cabrera Casado Y., Cadavid P., Rodiño Montoya M. L., Rodríguez P.M. (2021) On the characterization of the space of derivations in evolution algebras. *Annali di Matematica Pura ed Applicata. (1923 -).* 200:737–755.

[6] Cabrera, Y., Cadavid, P., Reis Tiago. (2023) Derivations and loops of some evolution algebras. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas Fisicas y Naturales Serie A-Matematicas.* 117:119.

Analítica de datos para muestras de funciones

Henry Laniado[1]

[1] Departamento de Matemáticas, Universidad del Cauca, Popayán, Colombia

✉ hlaniado@unicauca.edu.co, hlaniado@gmail.com

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. En los últimos años, el análisis de datos funcionales (FDA) se ha convertido en un dominio muy activo de investigación en estadística, por su propio interés y también por sus aplicaciones en una serie de contextos como la ciencia médica, biología, química y ciencias sociales. En esencia, los objetos de estudio de FDA son funciones reales que se supone que se generan por medio de un proceso estocástico. Las funciones se observan en un cierto número de puntos fijos, por ejemplo instantes de tiempo, pero en lugar de ser tratados como datos multivariados, se suavizan utilizando herramientas del análisis numérico y funcional para ser estudiadas en espacios infinitodimensionales. No obstante, se han adaptado y extendido varias técnicas del análisis multivariado de datos al escenario funcional. Como componentes principales funcionales, correlaciones entre funciones, medidas de centralidad funcional entre otras. Sin embargo, aun quedan diversas técnicas para ser estudiadas en el campo funcional o que se han analizado sólo de manera parcial. Por lo tanto, por su interés teórico y práctico en este cursillo se expondrán las técnicas básicas de descripción de datos funcionales, algunas estructuras de visualización, medidas de centralidad funcional, algunas extensiones de los coeficientes de correlación al escenario de muestras funcionales y test de homogeneidad
Palabras claves. Datos funcionales, estadísticas para datos funcionales, coeficiente de correlación funcional.

1. Introducción

Diversas situaciones de tipo práctico son caracterizadas a través de la evolución de una variable en el tiempo y que puede ser explicada por un proceso estocástico. Las realizaciones del proceso son trayectorias que pueden considerarse como datos de tipo funcional o datos funcionales. El análisis de datos funcionales está orientado al estudio estadístico de las funciones que conforman una muestra, por ejemplo, su análisis descriptivo, visualización e inferencia, y no tanto al estudio de tipo predictivo como es el caso de las series de tiempo. En las últimas dos décadas se han desarrollado nuevas metodologías útiles y de riguroso soporte teórico que permiten en la práctica la modelación de fenómenos cuyas observaciones son tomadas con alta frecuencia y que suponen una muestra de funciones. Muchas de la metodologías estadísticas del análisis multivariante de datos han sido extendidas al escenario de funciones y han permitido el análisis estadístico de datos de alta dimensión. Por ejemplo, análisis de componentes principales funcionales [1], clasificación funcional [2, 6], medidas de profundidad estadística para funciones [3], test de homogeneidad para muestras funcionales [5], incluso medidas de correlación funcional [7]. Una amplia descripción de conceptos y contextos de técnicas estadísticas para datos funcionales puede ser vista en [4]. En este cursillo se presentarán los conceptos básicos del análisis descriptivo para datos funcionales y algunas técnicas de centralidad, homogeneidad y medidas de dependencia que son relevantes metodologías que se han extendido al escenario infinitodimensional. Se intentará proporcionar a los asistentes herramientas y técnicas de uso habitual de la teoría del análisis de datos funcionales. El enfoque del cursillo es desde un punto de vista formal pero también haciendo especial énfasis en la implementación computacional de todos los conceptos introducidos y de su aplicación. Se sugiere a los asistentes llevar computador con Python o Matlab. No es necesario tener nociones de programación, el cursillo las incluirá.

2. Objetivo general

Entender las técnicas estadísticas descriptivas para variables funcionales y su implementación computacional con datos reales y sintéticos.

2.1. Objetivos específicos

- Entender el concepto intuitivo de dato funcional, su descrpción y análisis estadístico
- Representar gráficamente una muestra funcional y obtener conclusiones visuales

3. contenido

- Definición intuitiva de dato funcional y su representación
- Versión funcional de los principales estadísticos descriptivos
- Medidas de dependencia para datos funcionales
- Definición y detección de datos atípicos funcionales.
- Test de homogeneidad para muestras funcionales

Referencias

[1] Berrendero, J.R., Justel, A. (2011) Principal component for multivariate functional data. Computational Statistics and Data Analysis, 55, 9, (2619-2634).

[2] Lesmes,C, Zuluaga, F., Laniado, H., Gomez, A. Carvajal, A. (2026). The EE-Classifier: A classification method for functional data based on extremality indexes. arXiv:2411.14999. Accepted in Chilean Journal of Statistics.

[3] López-Pintado, S., Romo, J. (2009). On the concept of depth for functional data. Journal of the American Statistical Association, 104(486), 718-734.

[4] Ramsay, J.O., Sylverman,B.W. (2021). *Functional Data Analysis*, Second editions, Springer-Verlag.

[5] Saldarriaga, A.C.,Laniado, H., Zuluaga, F. Leiva, V. (2021). Homogeneity tests for functional data based on depth-depth plots with chemical applications. Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems. Volume 219.

[6] Sguera, C., Galeano, P., Lillo, R.E. (2014) Spatial depth-based classification for functional data. Test 23, 4, 725-750.

[7] Valencia, D., Lillo R.E., Romo, J. (2019). A Kendall correlation coefficient between functional data. Advances in Data Analysis and Classification. Volume 13.

Introducción a la Teoría de códigos

Diana H. Bueno-Carreño[1]

[1] Pontificia Universidad Javeriana, Cali, Colombia

✉ dhbueno@javerianacali.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. La Teoría de códigos correctores de errores hace parte de la Teoría de la Información la cual fue introducida por C. E. Shannon en su trabajo "A mathematical theory of communications"de 1948 y aborda, desde un punto de vista matemático, el problema de la transmisión de un mensaje desde un emisor hasta un receptor a través de un canal de comunicación. En este proceso la Teoría de códigos se encarga de estudiar la fiabilidad de la comunicación y es por ello que se ha convertido en una disciplina intersección de matemáticas, ingeniería y ciencias. En este curso se presentarán algunos conceptos fundamentales de la teoría de códigos correctores de errores, abordando ciertos aspectos generales para luego decantar en códigos lineales, una clase de códigos que ha sido ampliamente estudiada.

Palabras claves. Teoría de la información, Códigos, Códigos lineales

Referencias

[1] Huffman, W.C., Pless, V. (2003). Fundamentals of Error-Correcting Codes. *Cambridge*.

[2] Macwilliams, F.J., Sloane, N.J.A. (1977). The Theory of Error-Correcting Codes. *North- Holland Mathematical Library*.

[3] Pless, V. (1998). Introduction to the Theory of Error-Correcting Codes. *Wiley – Interscience series in discrete mathematics and optimization*.

[4] Simón Pinero, J.J. (2008). Códigos correctores de errores. *Notas de clase*.

Colores en la geometría combinatoria

Mario Huicochea

[1] SECIHTI/UAZ, Zacatecas, México

✉ dym@cimat.mx

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. La geometría discreta es un área muy extensa de las matemáticas que se destaca por presentar problemas muy sencillos de entender pero en algunas ocasiones muy difíciles de resolver. En particular, varios problemas en esta área se pueden plantear en términos de colores, subconjuntos monocromáticos, etc. En este minicurso daremos una breve introducción a algunos de los resultados de esta área. En algunos casos, veremos las ideas de sus demostraciones. La belleza de algunos de estos argumentos así como su flexibilidad pueden ser bastante útiles en esta y otras áreas. Finalmente y no menos importante, platicaremos sobre algunos de los problemas y conjeturas que permanecen, y que podrían motivar a la gente joven a trabajar en ellos.

Palabras claves. coloración, monocromática, línea

Una introducción al álgebra de diferencias

Yamidt Bermudez[1], Pedro Hernandez Rizzo[2]

[1] Universidad del Valle, Cali, Colombia
[2] Universidad de Antioquia, Medellin, Colombia
✉ yamidt.bermudez@correounivalle.edu.co, pedro.hernandez@udea.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. El presente mini-curso ofrece una introducción sistemática al álgebra de diferencia, disciplina dedicada al estudio algebraico de las ecuaciones en diferencia mediante anillos conmutativos equipados con un endomorfismo ϕ. El objetivo central es analizar cómo la estructura de diferencia permite modelar ecuaciones recursivas desde una perspectiva puramente algebraica, siguiendo la línea de investigación desarrollada por Ritt, Cohn y Wibmer. A lo largo de tres sesiones, se abordará la construcción de objetos algebraicos básicos, el análisis de ideales compatibles con la dinámica y la formulación de una geometría espectral robusta. El curso está diseñado para participantes con conocimientos básicos de álgebra conmutativa (anillos, ideales y homomorfismos), sin requerir experiencia previa en geometría algebraica avanzada. Al finalizar, se espera que los asistentes comprendan la dualidad entre las estructuras algebraicas de diferencia y sus correspondientes espacios geométricos, así como sus conexiones con la teoría de modelos y los sistemas dinámicos discretos.

Palabras claves. algebra de diferencias, espectro primo

Descripción del curso

El álgebra de diferencia emerge como el análogo discreto del álgebra diferencial clásica de Kolchin [3]. Mientras que esta última estudia anillos equipados con una derivación δ, el álgebra de diferencia considera pares (R, ϕ) donde $\phi\colon R \to R$ es un endomorfismo de anillos. Esta perspectiva permite abordar ecuaciones en diferencia algebraicas mediante herramientas puramente algebraicas, generalizando resultados fundamentales como el teorema de los ceros de Hilbert.

Programa detallado

Día 1: Objetos, ecuaciones y soluciones en diferencia

Definición formal de anillos de diferencia (R, ϕ) y morfismos compatibles. Construcción del anillo de polinomios en diferencia $R[X]$ extendiendo el endomorfismo a la variable (ej. $\phi(X) = f(X)$). Modelado de ecuaciones en diferencia algebraicas como ideales en $R[X]$. Concepto de solución como un morfismo de anillos de diferencia hacia un anillo de sucesiones o un ϕ-cuerpo. Ejemplos concretos de recurrencias lineales y no lineales vistas algebraicamente. Cierre comparativo: breve comentario sobre el paralelo con el álgebra diferencial (anillos con derivación δ) y la filosofía de Ritt-Kolchin.

Día 2: Ideales compatibles y espacios espectrales

Estudio de ϕ-ideales (ideales invariantes bajo la dinámica) y operaciones de clausura: reflexiva, radical y perfecta. El problema geométrico fundamental: por qué los ideales primos clásicos invariantes (C-espectro) pueden no existir; ejemplos de vacuidad. Introducción al W-espectro como intersección de

órbitas finitas de primos, garantizando la existencia de puntos geométricos bajo hipótesis razonables. Comparación estructural entre C-espectro, L-espectro y W-espectro: diagramas de inclusión y significado geométrico. Noetherianidad y sus implicaciones teóricas: teorema de existencia de puntos. Ejemplos ilustrativos sobre el caso no Noetheriano y patologías espectrales.

Día 3: Topología, correspondencia y morfismos

Topologías ϕ-Zariski sobre los espectros C y W usando conjuntos algebraicos de diferencia. Nullstellensatz en diferencia: análisis de la correspondencia biunívoca entre ideales ϕ-radicales (o perfectos) y conjuntos cerrados; implicaciones principales y límites de validez. Análisis detallado en anillos Noetherianos: descomposición de ϕ-radicales y estabilidad topológica. Aplicaciones inducidas entre espectros mediante morfismos de anillos: continuidad, densidad de imagen y homeomorfismos cerrados. Conclusiones y horizonte de investigación: dualidad álgebra-geometría en diferencia. Presentación del resultado de Wibmer sobre ϕ-spaces y ϕ-rings como marco unificador que "cierra" la teoría: toda geometría de diferencia razonable puede realizarse como el espectro de un anillo de diferencias bien comportado, análogo al teorema de representación de esquemas afines en geometría algebraica clásica.

Referencias

[1] Atiyah, M. F., MacDonald, I. G. (1969). *Introduction to Commutative Algebra*. Addison-Wesley Series in Mathematics. Addison-Wesley, Reading, MA.

[2] Cohn, R. M. (1965). *Difference Algebra*. Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, Vol. 17. Interscience Publishers, New York.

[3] Kovacic, J. J. (2002). Differential schemes. En: Guo, L., Keigher, W. F., Cassidy, P. J., Sit, W. Y. (eds.) *Differential Algebra and Related Topics*, pp. 71–94. World Scientific, Singapore.

[4] Levin, A. (2008). *Difference Algebra*. Algebra and Applications, Vol. 14. Springer, New York.

[5] van der Put, M., Singer, M. F. (1997). *Galois Theory of Difference Equations*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1666. Springer, Berlin.

[6] Wibmer, M. (2015). Affine difference algebraic groups. *arXiv preprint* arXiv:1505.00078.

[7] Wibmer, M. (2021). *Lecture Notes on Difference Geometry*. Disponible en: https://www.math.tugraz.at/~wibmer/Notes.pdf.

Álgebra

Ponencias Álgebra

Comité Científico: Paula Cadavid (Universidade Federal Rural de Pernambuco, Brasil), German Benítez (Universidade Federal do Paraná, Brasil), Alexander Holguín Villa (Universidad Industrial de Santander, Colombia).

- ⋆ **Hopf partial actions in braided monoidal categories**, Fabio Alejandro Calderon Mateus, Universidad Industrial de Santander, Colombia.
- ⋆ **Módulos semi-graduados no degenerados**, Andrés Chacón Capera, Universidad Industrial de Santander, Colombia.
- ⋆ **On amenable groupoids**, Karol Stefany Herrera Cano, Universidad ECCI, Colombia.
- ⋆ **Convolución de sucesiones polinomiales generalizadas de Padovan y de Perrin**, David Fernando Daza Urbano, Maribel Díaz Noguera, Martha Judith Romero Rojas, Universidad del Cauca, Colombia.
- ⋆ **Acciones parciales de grupoides y equivalencias de Morita**, Hector Pinedo, Universidad Industrial de Santander, Colombia.
- ⋆ **Álgebras de grafo de Brauer y álgebras de configuración de Brauer**, Jhony Fernando Caranguay Mainguez, Universidad de Antioquia, Colombia.
- ⋆ **Laurent m-Series and entangled polynomial rings**, André Duarte, Universidade de São Paulo, ICMC, Brasil.
- ⋆ **Double Ore extensions of type (14641): PBW methods, centers, smoothness, and homological invariants**, Andrés Alejandro Rubiano Suárez, Universidad ECCI, Colombia.
- ⋆ **Algunas familias de matrices idempotentes de rango 1 cuyos permanentes generan números multifactoriales**, Juan Gabriel Triana Laverde, Universitaria Agustiniana, Colombia.

- ⋆ **Diámetro y girth del grafo nilpotente en anillos no conmutativos de tipo polinomial**, Sebastián David Higuera Rincón, Universidad Antonio Nariño, Colombia.
- ⋆ **Hilbert evolution algebras, weighted digraphs, and nilpotency**, Paula Cadavid, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Brasil.
- ⋆ **Identidades Polinomiales para el Álgebra de Novikov en dimensión dos**, Carlos Arturo Rodriguez Palma, Universidad Industrial de Santander, Colombia
- ⋆ **One note on: On two-generated non-commutative algebras subject to the affine relation**, Camilo Arana, Universidad Nacional de Colombia, Colombia.
- ⋆ **Grafos de Cayley aditivos y reglas g-Golomb**, Juliana Mercedes Diaz Solarte, Universidad del Cauca, Fernando A. Benavides, Universidad de Nariño, Colombia.
- ⋆ **A P-theorem for Inverse Semigroupoids**, Víctor Marín, Universidad del Tolima, Colombia.
- ⋆ **Involuciones en anillos de grupo: viejos y nuevos resultados**, Alexander Holguín Villa, Universidad Industrial de Santander, John H. Castillo, Universidad de Nariño, Colombia.
- ⋆ **Estabilidad para r-peak posets**, Gabriel Bravo Ríos, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia.
- ⋆ **Explicit minimal polynomials arising from Chebyshev polynomials of degree $p^m q^r$**, Martha Judith Romero Rojas, David Daza Urbano, Maribel Díaz Noguera, Universidad del Cauca, Colombia.
- ⋆ **Matrix bispectrality and noncommutative algebras: beyond the prolate spheroidals**, Brian David Vasquez Campos, Universidad del Tolima, Colombia.
- ⋆ **A pushforward structure in K-theory**, Cristian David Sarmiento Santiago, Universidad Nacional de Colombia, Colombia.
- ⋆ **N-matrices y operaciones asociadas a Hiper-grafos**, David Santiago Cuartas Gomez, Ivon Andrea Dorado Correa, Universidad Nacional de Colombia, Colombia.
- ⋆ **Relaciones entre funciones Dynkin y configuraciones de Brauer**, Miguel Kratzer Giraldo, Verónica Cifuentes, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia.
- ⋆ **Estructura exacta en complejos de cocadenas sobre un endofuntor**, Cristian Felipe Gallego Olaya, Universidad de Antioquia, Germán Benítez, Universidade Federal do Amazonas, Pedro Hernandez, Universidad de Antioquia, Colombia.
- ⋆ **Inmersión canónica de semigrupos numéricos en semigrupos casi-simétricos con el mismo número de Frobenius**, Olmer Folleco Solarte, Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales, Colombia.

⋆ **Gavillas y pregavillas en categorías reflexivas**, Julio César Hernández Arzusa, Universidad de Cartagena, Colombia.

⋆ **Funciones continuas como herramienta para caracterizar espacios y estructuras algebraico-topológicas**, Julio César Hernández Arzusa, Heidy Lorena Gonzalez Manjarres, Universidad de Cartagena, Colombia.

Hopf partial actions in braided monoidal categories

Fabio Calderón[1], Héctor Pinedo[1]

[1] Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia

✉ facalmat@uis.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Abstract. Partial actions of Hopf algebras provide a framework for describing symmetries that are not globally defined. While the classical theory has been developed primarily for groups and vector spaces, a categorical formulation suitable for monoidal categories remains largely unexplored. In this work we develop a theory of Hopf partial actions in braided monoidal categories using graphical calculus and internal Hom techniques.

Working in closed braided monoidal categories, we introduce the notion of a partial action of a bialgebra object on an algebra object and study its structural properties. Our main results establish a globalization procedure for partial actions. Under suitable assumptions, every partial action arises from a global action on a larger algebra object constructed within the same monoidal category. In addition, we construct a Morita context associated with a partial action, clarifying the relationship between the original algebra and its globalization.

Keywords. Hopf algebras; partial actions; monoidal categories; braided tensor categories; globalization.

Partial actions were originally introduced in operator algebra theory and later adapted to purely algebraic contexts such as group actions on rings [3]. The concept was subsequently extended to Hopf algebras, giving rise to the theory of Hopf partial actions. This theory provides a natural framework for describing symmetries that are defined only on parts of an algebraic structure. Classical treatments of Hopf partial actions take place in the category of vector spaces and have produced important structural results, including globalization theorems that allow partial actions to be embedded into global ones [1].

Our work develops a categorical version of this theory within the setting of braided monoidal categories. Tensor categories have become central in modern algebra, appearing naturally in areas such as representation theory, quantum groups, and category theory. Standard references for the categorical structures involved include the works of Mac Lane [5], Borceux [2], and the comprehensive treatment of tensor categories by Etingof, Gelaki, Nikshych, and Ostrik [4]. Within such categories, algebraic structures such as algebras, coalgebras, and modules can be described abstractly using the monoidal product, and many of their identities can be expressed conveniently through graphical calculus.

A key ingredient in our approach is the use of internal Hom objects in closed monoidal categories. The adjunction

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X \otimes Z, Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, [X, Y])$$

provides a categorical analogue of currying and allows morphisms to be encoded through their transposes. This perspective naturally leads to the construction of convolution algebras associated with a coalgebra C and an algebra A, generalizing the classical convolution product on $\mathrm{Hom}_k(C, A)$. Convolution algebras play a fundamental role in the description of module algebra structures and serve as a key tool in the study of partial actions.

After establishing this categorical framework, we introduce the notion of a partial action of a bialgebra H on an algebra object A in $\mathcal{C}$. The defining axioms generalize the classical compatibility conditions for module algebras while allowing the action to be defined only partially. These conditions will be

expressed both algebraically and diagrammatically, illustrating the usefulness of graphical calculus in this context.

The main result of the paper concerns the globalization of partial actions. Under suitable assumptions on the ambient category, such as closedness and abelian structure, we show that every partial action can be embedded into a global action on a larger algebra object constructed within the same category. The proof relies on categorical techniques involving factorization through images, the stability of epimorphisms under tensor products, and the interaction between module structures and subobjects.

In addition, we construct a Morita context naturally associated with a partial action and its globalization. This context clarifies the structural relationship between the two algebras and provides further insight into how partial symmetries extend to global ones.

The results obtained here extend the classical theory of Hopf partial actions from vector spaces to braided tensor categories. This categorical viewpoint highlights the structural nature of partial symmetries and opens the possibility of studying them in more general tensor-categorical settings, including those arising in quantum algebra and categorical representation theory.

References

[1] Alves, M., Batista, E. (2010). Enveloping actions for partial Hopf actions. *Communications in Algebra* 38(8):2872–2902.

[2] Borceux, F. (1994). *Handbook of Categorical Algebra*. Cambridge University Press.

[3] Dokuchaev, M., Exel, R. (2005). Associativity of crossed products by partial actions. *Transactions of the American Mathematical Society* 357:1931–1952.

[4] Etingof, P., Gelaki, S., Nikshych, D., Ostrik, V. (2015). *Tensor Categories*. Mathematical Surveys and Monographs 205. American Mathematical Society.

[5] Mac Lane, S. (1998). *Categories for the Working Mathematician*. Springer.

Módulos semi-graduados no degenerados

Andrés Chacón Capera[1]

[1] Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia

✉ andchaca@uis.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. Los anillos semi-graduados, introducidos por Lezama y Latorre en 2017, generalizan los anillos $\mathbb{Z}$-graduados y abarcan familias importantes de álgebras no conmutativas. En esta charla se presentan resultados recientes sobre la categoría de módulos sobre estos anillos. En particular, para una $\Bbbk$-álgebra semi-graduada positivamente A, se introduce la subcategoría NSG-A de módulos semi-graduados no degenerados y se demuestra que es una categoría de Grothendieck.

Palabras claves. Módulo semi-graduado, categoría de Grothendieck, álgebra no conmutativa.

Introducción

El estudio de los anillos y los módulos graduados ha desempeñado un papel central en el álgebra moderna, tanto por su utilidad en geometría algebraica como por su conexión con la teoría homológica; sin embargo, varios de los anillos más relevantes en la literatura no admiten una graduación natural.

En este contexto, Lezama y Latorre [4] introdujeron los anillos semi-graduados como una generalización de los anillos $\mathbb{Z}$-graduados que incluye, entre otros, las extensiones PBW torcidas, las álgebras envolventes de álgebras de Lie de dimensión finita y diversas álgebras cuánticas que no admiten una graduación no trivial. Junto a estos anillos surge de manera natural la noción de módulo semi-graduado. Una lista extensa de ejemplos de anillos y módulos semi-graduados, así como varios resultados sobre ellos, puede encontrarse en [2].

Se conoce que la categoría SGR-R de módulos semi-graduados sobre un anillo semi-graduado R es abeliana y satisface la condición Ab5 [1]. Sin embargo, la pregunta sobre si esta categoría posee una familia de generadores (y es por lo tanto de Grothendieck) ha permanecido abierta. Esta charla presenta una respuesta afirmativa de manera parcial trabajando en cierta subcategoría de SGR-R.

Módulos semi-graduados no degenerados

Por el momento restringimos nuestro estudio a las $\Bbbk$-álgebras semi-graduadas positivamente, cuya definición precisamos a continuación.

Definición 1. Una $\Bbbk$-álgebra A se dice *positivamente semi-graduada* (PSG) si satisface las siguientes condiciones:

(i) A es un anillo SG positivo con semi-graduación $A = \bigoplus_{n\geq 0} A_n$.

(ii) Para todo $m, n \geq 1$, $A_m A_n \subseteq A_1 \oplus \cdots \oplus A_{m+n}$.

(iii) A es conexa, es decir, $A_0 = \Bbbk$.

(iv) Para todo $n \geq 0$, A_n es un $\Bbbk$-espacio vectorial.

Estas álgebras generalizan las álgebras finitas semi-graduadas (FSG) estudiadas por Lezama y Gómez [3]. Aunque cada componente homogénea de una álgebra PSG sea un espacio vectorial, no se tiene que suceda lo mismo para sus módulos semi-graduados, esta discrepancia introduce una fuente de degeneración que conviene evitar, y motiva la siguiente definición.

Definición 2. Un A-módulo semi-graduado $M = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} M_i$ se llama *no degenerado* si cada componente homogénea M_i es un $\Bbbk$-espacio vectorial.

La subcategoría plena de SGR-A formada por los módulos semi-graduados no degenerados se denota NSG-A. Esta subcategoría es cerrada para subobjetos, cocientes, productos y coproductos, por lo que hereda la condición Ab5 de SGR-A.

Al restringirse a NSG-A se demuestra que esta categoría posee una familia de generadores. La idea clave es construir una familia de objetos $\tilde{\mathcal{Z}}$ y mostrar que dado cualquier módulo no degenerado M y un elemento homogéneo $m \in M$, el submódulo semi-graduado generado por m es isomorfo a un objeto perteneciente a la familia $\tilde{\mathcal{Z}}$. Esto garantiza que $\tilde{\mathcal{Z}}$ es una familia de generadores de NSG-A, y como la categoría ya satisface Ab5, se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 3. *Sea A una $\Bbbk$-álgebra* PSG*. La categoría* NSG-A *es una categoría de Grothendieck.*

La utilidad principal de este resultado radica en sus consecuencias homológicas. Toda categoría de Grothendieck posee suficientes inyectivos, lo que garantiza que cualquier objeto de NSG-A admite una resolución inyectiva. Esto permite definir los funtores derivados de Hom en este contexto y posiblemente desarrollar una teoría de cohomología para las álgebras semi-graduadas.

Referencias

[1] Chacón, A. (2022). On the noncommutative geometry of semi-graded rings. PhD dissertation. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.

[2] Fajardo, W., Gallego, C., Lezama, O., Reyes, A., Suárez, H., Venegas, H. (2020) *Skew PBW Extensions. Ring and Module-theoretic Properties, Matrix and Gröbner Methods, and Applications.* Algebra and Applications, Vol. 28.: Springer.

[3] Lezama, O., Gómez, J. (2019). Koszulity and point modules of finitely semi-graded rings and algebras. *Symmetry*, 11(7):1–22. DOI: 10.3390/sym11070881

[4] Lezama, O., Latorre, E. (2017) Non-commutative algebraic geometry of semi-graded rings. *Int. J. Algebra Comput.* 27(4):361–389. DOI: 10.1142/S0218196717500199

On amenable groupoids

Karol Stefany Herrera Cano[1]

[1] Universidad ECCI, Bogotá, Colombia

✉ kherrerac@ecci.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Abstract. Amenable groups arise from a fundamental problem in measure theory: the Banach–Tarski paradox, which shows that a ball in three-dimensional space can be decomposed into two identical balls. This paradox does not occur in the plane because the isometry group of $\mathbb{R}^2$ is amenable. A group is amenable if it admits a finitely additive, translation-invariant probability measure. This notion, introduced by Von Neumann in 1929, allows us to distinguish groups that admit invariant "means" from those that do not. Amenable groups have applications in ergodic theory, group growth, and geometric paradoxes. On the other hand, a groupoid is a small category in which every morphism is invertible (i.e., every morphism is an isomorphism). In this talk, we will define the concepts of groupoids and amenable groups. The idea is to see if it is possible to study *amenability* in broader structures, such as groupoids.

Keywords. Amenable group, groupoid, amenable groupoid.

A groupoid is a category where all morphisms are invertible, and a group turns out to be a particular case: a group is exactly a groupoid with a single object. Thus, we could say that groupoids generalize groups in the sense of category theory. Ibort and Rodriguez in their book [2] analyze the notion of groupoid from a set-theoretic perspective, starting from the notions already developed for groups. There, they discuss the concept of a subgroupoid, as well as the basic notions specific to groupoids, such as the fundamental isotropic subgroupoid, connectedness, and the operations of disjoint union and direct product of groupoids.

Definition 1 ([2, Definition 3.1])**.** A **groupoid** consists of a set $\mathbf{G}$, a set Ω, and two maps $s, t : \mathbf{G} \to \Omega$, called the source and target map, respectively. The set Ω is called the space of objects of the groupoid whose elements will be denoted by x, y, etc. The elements in $\mathbf{G}$ will be called the morphisms or arrows of the groupoid and they will be denoted by using a convenient diagrammatic notation $\alpha : x \to y$, where x is the source of the morphism α, that is $s(\alpha) = x$, and y its target, i.e., $t(\alpha) = y$. Two morphisms $\beta, \alpha \in \mathbf{G}$ will be said to be **composable** if $t(\alpha) = s(\beta)$. The set of pairs (β, α) of composable elements will be denoted by $\mathbf{G}_2$.

The axioms of a groupoid are completed by stating that there is a composition law defined only on pairs of composable morphisms, $\circ : \mathbf{G}_2 \to \mathbf{G}$, such that:

(i) **(Associativity)** $(\gamma \circ \beta) \circ \alpha = \gamma \circ (\beta \circ \alpha)$, whenever (β, α) and (γ, β) are in $\mathbf{G}_2$.

(ii) **(Units)** For any object $x \in \Omega$, there exists a morphism $1_x : x \to x$, called the unit at x, such that if $\alpha : x \to y$, then $\alpha \circ 1_x = \alpha$ and $1_y \circ \alpha = \alpha$.

(iii) **(Inverse)** For any morphism $\alpha : x \to y$, there exists another morphism $\beta : y \to x$, such that $\beta \circ \alpha = 1_x$ and $\alpha \circ \beta = 1_y$. Such morphism will be denoted as α^{-1}.

A groupoid $\mathbf{G}$ over the space of objects Ω will be sometimes denoted as $\mathbf{G} \rightrightarrows \Omega$ in order to emphasize the source and the target maps s, t.

In 1924, Banach and Tarski [1] proved that a ball in three-dimensional space can be decomposed into a finite number of pieces and reassembled to form two balls identical to the original. This implies that in $\mathbb{R}^3$ there is no finitely additive measure, defined for all subsets, invariant under rigid motions, and assigning positive volume to the ball; therefore, there exist non-measurable sets with respect to Lebesgue measure. In contrast, in $\mathbb{R}$ and $\mathbb{R}^2$ such measures do exist because their isometry groups are amenable, unlike that of $\mathbb{R}^3$. The Banach -Tarski paradox motivates the definition of amenable groups.

We will assume that G is a countable discrete group. We denote by 1_G the identity element of G. If X is any set, we denote by $\mathcal{P}(X)$ the power set of X, i.e., $\mathcal{P}(X) = \{A : A \subseteq X\}$.

Definition 2 ([3, p. 4])**.** Let X be a nonempty set. We say that $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, 1]$ is a **finitely additive measure** on X if

(i) $\mu(X) = 1$

(ii) If $A, B \in \mathcal{P}(X)$ are such that $A \cap B = \emptyset$, then $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

We denote by $PM(X)$ the set of all finitely additive measures on X.

Definition 3 ([3, p. 4])**.** Let G be a group. We say that $\mu \in PM(G)$ is G-invariant (on the left) if

$$\mu(gA) = \mu(A), \text{ for all } g \in G \text{ and all } A \in \mathcal{P}(G),$$

where $gA = \{ga : a \in A\}$. We say that G is an **amenable group** if there exists a G-invariant $\mu \in PM(G)$.

Currently, the definition of an **amenable groupoid** is already established; see, for example, the works of [4, 5]. The main idea is to study and see if it is possible to connect the notion of an amenable groupoid in the same categorical sense as understood for groupoids, namely, by establishing a structural correspondence that allows one to transfer amenability properties to the context of amenable groupoids.

References

[1] Banach, S., and Tarski, A. (1924). Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes.*Fundam. Math.*, 6(1), 244-277.

[2] Ibort, A., and Rodríguez, M. A. (2020). An introduction to groups, groupoids and their representations. Boca Raton: CRC Press.

[3] Garrido, A. (2013). An introduction to amenable groups. Lecture notes.

[4] Anantharaman-Delaroche, C. (2023). Amenability, exactness and weak containment property for groupoids. arXivpreprintarXiv:2306.17613.

[5] Sridharan, K. N., and Kumar, N. S. (2026). Amenable unitary representations of locally compact groupoids. arXivpreprintarXiv:2602.11727.

Convolución de Sucesiones Polinomiales Generalizadas de Padovan y de Perrin

David Daza Urbano[1], Maribel Díaz Noguera[1], Martha Romero Rojas[1]

[1] Universidad del Cauca, Popayán, Colombia

✉ davidaza@unicauca.edu.co, mddiaz@unicauca.edu.co, mjromero@unicauca.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. En esta presentación damos fórmulas explícitas para la convolución entre sucesiones polinomiales generalizadas de Padovan y de Perrin. En particular, se estudia la convolución cruzada entre ambas familias. Asimismo, se obtienen identidades para la convolución de estas sucesiones con otras familias clásicas de sucesiones polinomiales generalizadas, tales como las de Fibonacci, Pell y Lucas. Las identidades obtenidas permiten, mediante la evaluación en valores específicos de x, recuperar y unificar diversas fórmulas de convolución para las correspondientes sucesiones numéricas.

El trabajo proporciona un enfoque alternativo y más directo para el estudio de la convolución de sucesiones polinomiales recurrentes, dentro de un marco algebraico unificado basado en sus polinomios característicos. En particular, el método se desarrolla en el anillo $\mathbb{Z}[x][y]$ y evita el uso de funciones generatrices, lo que simplifica considerablemente el tratamiento y la obtención de fórmulas cerradas para la convolución de este tipo de sucesiones.
Palabras claves. Convolución, Sucesión lineal recurrente, Polinomio característico, Polinomios de Padovan.

Introducción

Recordemos que una sucesión polinomial recursiva lineal de orden $k \geq 2$ es una sucesión $\{w_n(x)\}_{n\geq 0}$ que satisface la relación

$$w_n(x) = a_1(x)w_{n-1}(x) + \cdots + a_k(x)w_{n-k}(x), \quad n \geq k, \tag{1}$$

donde $a_1(x), \ldots, a_k(x)$ son polinomios con $a_k(x) \neq 0$. Los polinomios $w_0(x), w_1(x), \ldots, w_{k-1}(x)$, no todos nulos, se denominan condiciones iniciales. El polinomio

$$f(x, y) = y^k - a_1(x)y^{k-1} - \cdots - a_k(x)$$

se denomina polinomio característico asociado a la sucesión $\{w_n(x)\}_{n\geq 0}$. Denotamos por $\Omega(f(x, y))$ el conjunto de sucesiones que satisfacen (1).

Sea $\{u_n^{(i)}(x)\}$, con $0 \leq i \leq k-1$, la sucesión en $\Omega(f(x, y))$ definida por las condiciones iniciales $u_n^{(i)}(x) = \delta_{n,i}$ para $0 \leq n \leq k-1$, donde $\delta_{n,i}$ es la función delta de Kronecker. Estas se denominan sucesiones básicas y generan $\Omega(f(x, y))$ por combinación lineal.

En este contexto, dadas dos sucesiones $\{G_n(x)\}$ y $\{H_n(x)\}$, definimos su convolución por

$$C_n(x) = \sum_{k=0}^{n} G_k(x)\, H_{n-k}(x).$$

El estudio de la convolución de sucesiones recursivas es un tema clásico ampliamente desarrollado en el caso numérico, especialmente se han establecido fómulas cerradas para la convolución que involucra sucesiones numéricas de orden dos como Fibonacci y Lucas; ver, por ejemplo, [8, 6, 7, 5, 1, 3, 4].

En el contexto de sucesiones polinomiales, los resultados son más escasos. Entre los pocos casos conocidos se encuentran las convoluciones asociadas a los polinomios de Chebyshev [9]. Un enfoque reciente desarrollado en [2] proporciona una fórmula general para sucesiones polinomiales recursivas lineales de orden dos en términos de sus sucesiones básicas, mostrando además que la convolución preserva la estructura recursiva. Este enfoque sugiere una extensión natural a órdenes superiores.

Entre las sucesiones de orden tres, las familias de Padovan y Perrin han sido estudiadas en el caso numérico desde distintos puntos de vista, incluyendo propiedades aritméticas y ecuaciones diofánticas. Sin embargo, su versión polinomial ha recibido menos atención y, en particular, su convolución no ha sido estudiada en el caso polinomial.

En su versión polinomial, la sucesión de Padovan $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ está definida por

$$P_n(x) = xP_{n-2}(x) + P_{n-3}(x), \quad n \geq 3,$$

con condiciones iniciales

$$P_0(x) = 1, \qquad P_1(x) = 0, \qquad P_2(x) = x,$$

mientras que la sucesión de Perrin $\{Pe_n(x)\}_{n\geq 0}$ satisface la relación

$$Pe_n(x) = x^2Pe_{n-2}(x) + Pe_{n-3}(x), \quad n \geq 3,$$

con condiciones iniciales

$$Pe_0(x) = 3x, \qquad Pe_1(x) = 0, \qquad Pe_2(x) = 2.$$

La convolución de estas sucesiones y la de algunas de sus generalizaciones constituye el objeto central de este trabajo, así como su interacción con otras familias clásicas como las sucesiones polinomiales de Fibonacci, Pell y Lucas, permitiendo además, mediante la evaluación en valores específicos de x, recuperar y unificar diversas fórmulas de convolución para las correspondientes sucesiones numéricas.

Referencias

[1] K. Adegoke, S. O. Akerele, R. Frontczak (2025). Convolutions of second order sequences: A direct approach. *Fibonacci Quart.* 63(1): 107–122.

[2] D. Daza, M. Díaz, M. Romero. A general formula for convolutions of second-order linear recursive polynomial sequences. Preprint.

[3] G. Dresden, Y. Wang (2021). Sums and convolutions of k-bonacci and k-Lucas numbers. *Integers* 21: A56.

[4] G. Dresden, Y. Wang (2024). A general convolution identity. *Math. Mag.* 97(2): 98–109.

[5] T. Koshy, M. Griffiths (2018). Some gibonacci convolutions with dividends. *Fibonacci Quart.* 56(3): 237–245.

[6] T. Szakács (2016). Convolution of second order linear recursive sequences I. *Ann. Math. Inform.* 46: 205–216.

[7] T. Szakács (2018). Convolution of second order linear recursive sequences II. *Commun. Math.* 25: 137–148.

[8] W. Zhang (1997). Some identities involving the Fibonacci numbers. *Fibonacci Quart.* 35: 225–228.

[9] Z. Fan, W. Chu (2022). Convolutions involving Chebyshev polynomials. *Electron. J. Math.* 3: 38–46.

Acciones parciales de grupoides y equivalencias de Morita

Héctor Pinedo Tapia[1]

[1] Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia

✉ hpinedot@uis.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. Presentaremos y mostraremos algunos resultados acerca de la noción de equivalencia de Morita para acciones parciales de grupoides.

Palabras claves. Bimódulo, contexto de Morita, acción parcial de grupoide.

En [1] los autores introdujeron y estudiaron el problema de *equivalencia de Morita para acciones parciales de grupos*; más precisamente, dado un contexto de Morita estricto

$$(R, S, M, N, \tau, \psi)$$

y acciones parciales α y θ de un grupo G en los anillos R y S, respectivamente, se presentó el siguiente:

Problema 1. Definir una acción parcial σ de G en el álgebra de enlace

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix},$$

que extienda simultáneamente a las acciones parciales α y θ.

Para resolver el Problema 1, algunas restricciones naturales sobre las acciones parciales y el contexto de Morita fueron aplicadas, obteniendo resultados profundos y significativos, llamando el interés de varios investigadores. En particular, el estudio del Problema 1 se llevó a contextos más generales, como por ejemplo, acciones parciales de grupos en anillos de matrices generalizadas [5], equivalencia de Morita para acciones parciales de álgebras de Hopf [2] y más recientemente el problema de considerar acciones parciales de álgebras de Hopf en anillos de matrices generalizadas [3]. En esta charla presentaremos algunos avances sobre el Problema 1 en el contexto de acciones parciales de grupoides, el cual está desarrollado en [4] como trabajo en conjunto con Dirceu Bagio, Paulo Demenhegi y Thaisa Tamusiunas.

Referencias

[1] Abadie, F., Dokuchaev, M., Exel, R., Simón, J. J. (2016). Morita equivalence of partial group actions and globalization. *Transactions of the American Mathematical Society*, 368(7):4957–4992, .

[2] Alves, M. M., Ferrazza, T. L. (2025). Morita equivalence and globalization for partial Hopf actions on nonunital algebras. *Journal of Algebra and Its Applications*, 24(11):2550262.

[3] Bagio, D., Batista, E., Pinedo, H. (2026). Partial Hopf actions on generalized matrix algebras. *Glasgow Mathematical Journal*, to appear,

[4] Bagio, D., Demenhegi, P., Pinedo, H., Tamusiunas, T. (2026). Morita equivalence for partial groupoid actions. Preprint.

[5] Bagio, D., Pinedo, H. (2025). Partial actions of groups on generalized matrix algebras. *Journal of Algebra*, 663(1):533–564.

Álgebras de grafo de Brauer y álgebras de configuración de Brauer

Jhony F. Caranguay Mainguez[1]

[1] Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia

✉ jhony.caranguay@udea.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. En esta charla se presenta una introducción a álgebras de grafo de Brauer (AGB) y álgebras de configuración de Brauer (ACB), las cuales se definen mediante una información combinatoria (grafo o configuración de Brauer) y son importantes en la teoría de representaciones de álgebras de dimensión finita. Además, dado que las ACB son una generalización de las AGB, se mostrarán algunos casos de generalización de resultados de AGB a ACB. En particular, se comenta el problema de encontrar una clasificación de las equivalencias derivadas de un álgebra, la cual ya fue resuelta por S. Opper y A. Zvonareva para AGB, pero no se tiene un resultado análogo para el caso de ACB.

Palabras claves. Álgebras de grafo de Brauer, álgebras de configuración de Brauer, categorías derivadas, equivalencias derivadas.

Las álgebras de grafo de Brauer (AGB) y su generalización, las álgebras de configuración de Brauer (ACB), son álgebras que han sido ampliamente estudiadas en la teoría de representaciones de álgebras de dimensión finita. Ver [7, 6] para una introducción y presentación de resultados sobre AGB, y [5, 3, 4] para la introducción y algunos resultados sobre ACB. En particular, un resultado conocido es que las AGB coinciden con las álgebras especiales biseriales simétricas y son mansas. Por otro lado, las ACB coinciden con las álgebras especiales multiseriales simétricas y son, en general, salvajes (ver [3] para una clasificación completa de ACB mansas).

Algunos problemas estudiados para estas dos clases de álgebras involucran categorías derivadas y equivalencias derivadas. En este sentido, algunos resultados conocidos para AGB han permitido el planteamiento de posibles generalizaciones al caso de ACB (ver [2]). Por ejemplo, en [1], los autores demuestran que la clase de AGB es cerrada bajo equivalencias derivadas, lo cual permite plantearse el problema de clasificar AGB hasta equivalencia derivada. Precisamente, en [6], los autores proporcionan un criterio con condiciones necesarias y suficientes para que dos AGB sean derivadamente equivalentes. Dicha caracterización está en términos de la información combinatoria del grafo de Brauer. Por otro lado, para el caso de ACB, en [2, Example 2.14.] se muestran dos álgebras derivadamente equivalentes, de las cuales solo una de ellas es un ACB. Esto motiva la discusión sobre cuándo dos ACB son derivadamente equivalentes.

Referencias

[1] Antipov, M., Zvonareva, A. (2022). Brauer graph algebras are closed under derived equivalence. *Mathematische Zeitschrift.* DOI: 1963-1981.

[2] Aoki, T., Zhang, Y. (2024). Mutation of Brauer configuration algebras. arXiv: 2403.14134.

[3] Duffield, D. D. (2018). Tame and wild symmetric special multiserial Algebras. arXiv: 1802.06442.

[4] Duffield, D. D. (2024). Tubes containing string modules in symmetric special multiserial algebras. *Journal of Algebraic Combinatorics.* 60(2), 435-490. DOI: 10.1007/s10801-024-01339-6.

[5] Green, E. L., Schroll, S. (2017). Brauer configuration algebras: A generalization of Brauer graph algebras. *Bulletin des Sciences Mathématiques.* 141(6), 539-572. DOI: 10.1016/j.bulsci.2017.06.001.

[6] Opper, S., Zvonareva, A. (2022). Derived equivalence classification of Brauer graph algebras. *Advances in Mathematics.* 402, 108341. DOI: 10.1016/j.aim.2022.108341.

[7] Schroll, S. (2018). Brauer graph algebras. *In: Homological methods, representation theory, and cluster algebras. Springer International Publishing.* 177–223. DOI: 10.1007/978-3-319-74585-56.

Laurent m-Series and Entangled Polynomial Rings

André Duarte[1]

[1] Universidade de São Paulo, ICMC, Brasil

✉ andreduarte@icmc.usp.br

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Abstract. We investigate extensions of the notion of entanglement from polynomial rings to Laurent polynomial, power series, and Laurent series settings. Particular emphasis is placed on Laurent m-series, which provide a natural ambient structure encompassing several related entanglement constructions through restriction, completion, and localization.
We further examine the skew setting and show that skew Laurent series rings associated with finite-order automorphisms can be realized inside a common ambient ring by means of a directed-limit construction.

References

[1] Arenas-Herrera, M. I., Verde-Star, L. (2017). Representation of doubly infinite matrices as non-commutative Laurent series. *Special Matrices* 5(1): 250–257.

[2] Cohn, P. M. (1995). *Skew fields: theory of general division rings*. Cambridge: Cambridge University Press.

[3] Cohn, P. M. (1996). Polynomial and power series rings. Free Algebras, Firs and Semifirs. In M. Hazewinkel (Ed.), *Handbook of Algebra*, Vol. 1, pp. 731–760. Amsterdam: Elsevier.

[4] Lee, K. S., Leroy, A., López-Permouth, S. R. (To appear). Entangled and skew polynomials. *Communications in Algebra*.

[5] López-Permouth, S. R., Pallone, A. (2023). Rings of entangled polynomials. *Rend. Circ. Mat. Palermo* 72(2): 1823–1843.

Double Ore Extensions of Type (14641): PBW Methods, Centers, Smoothness, and Homological Invariants

Andrés Rubiano[1]

[1] Department of Mathematics, Faculty of Basic Sciences, Universidad ECCI, Bogota, Colombia

✉ arubianos@ecci.edu.co

ALTENCOA11-2026, October 5–9, 2026
San Juan de Pasto, University of Nariño

Abstract. Double Ore extensions, introduced by Zhang and Zhang, provide a two-generator enlargement of classical Ore extensions and yield important families of Artin–Schelter regular algebras of global dimension four. This talk presents a unified computational and structural viewpoint on double extension regular algebras of type (14641). Starting from the corrected formulation of the double extension data and the Zhang–Zhang classification, we explain how Gröbner–Shirshov methods lead to PBW bases for several families and make explicit computations feasible. We then discuss three complementary invariants: centers and central subalgebras, which provide access to cancellation phenomena; differential smoothness, where these algebras exhibit a sharp obstruction in the sense of noncommutative differential geometry; and explicit homological invariants, including minimal graded free resolutions and Betti numbers for a pilot family over the quantum plane. The guiding theme is that PBW normal forms act as a bridge between defining double Ore data, central structure, noncommutative smoothness, and homological behavior. The talk also outlines future directions toward uniform matrix descriptions of resolutions and a broader computational theory for trimmed graded double Ore extensions.

Keywords. Double Ore extensions; Artin–Schelter regular algebras; Gröbner–Shirshov bases; PBW bases; homological invariants.

Double Ore extensions were introduced in [8] as a natural two-generator analogue of Ore extensions. If R is a subalgebra of an algebra B, a right double extension is generated by R and two variables y_1, y_2 subject to a quadratic relation

$$y_2y_1 = p_{12}y_1y_2 + p_{11}y_1^2 + \tau_1y_1 + \tau_2y_2 + \tau_0$$

and to relations governed by a matrix-valued map $\sigma : R \to M_2(R)$ and a σ-derivation δ. We use the corrected compatibility conditions of Carvalho, Lopes and Matczuk [1], which are essential for separating genuine double extensions from two-step iterated Ore extensions. In the graded trimmed case $RP[y_1, y_2; \sigma]$, Zhang and Zhang constructed and classified 26 families of Artin–Schelter regular algebras of global dimension four and type (14641) [9]. Their minimal resolution of the trivial module has the formal shape

$$0 \to B(-4) \to B(-3)^4 \to B(-2)^6 \to B(-1)^4 \to B \to \Bbbk_B \to 0,$$

which explains the terminology type (14641).

The first part of the talk focuses on computational control. For several families in the Zhang–Zhang list, finite Gröbner–Shirshov bases have been computed algorithmically, yielding PBW bases and effective normal forms [3]. This PBW structure is not merely a technical convenience: it is the mechanism that allows one to reduce ambiguities, compare monomials, compute commutation formulas, and translate defining relations into explicit invariants. It also connects double Ore extensions with the broader theory of graded skew PBW extensions [2] and with classical noncommutative Gröbner methods [4].

The second part describes three structural outcomes of this viewpoint. First, center computations for selected algebras of type (14641) produce explicit central subalgebras and examples related to the noncommutative Zariski cancellation problem [5]; these calculations show how $\mathrm{Z}(B)$ can function as a rigid commutative shadow of a noncommutative algebra. Second, from the perspective of noncommutative differential geometry, double extension regular algebras of type (14641) are not differentially smooth, giving evidence that smoothness phenomena familiar from some Ore extensions do not transfer automatically to the double Ore setting [7]. Third, for a pilot trimmed graded family over the quantum plane, one can compute explicit minimal graded free resolutions, graded Betti numbers, and Poincaré series for the trivial module and natural cyclic right modules [6]. In this case the Betti pattern of $\Bbbk_B$ is $(1, 4, 6, 4, 1)$, while the cyclic modules $B/(x_1, x_2)B$ and $B/(y_1, y_2)B$ have linear resolutions with Betti pattern $(1, 2, 1)$.

Overall, the proposed lecture emphasizes a single organizing principle: for double Ore extensions of type (14641), PBW and Gröbner–Shirshov techniques form a common language linking classification, central invariants, differential smoothness obstructions, and explicit homological computations. A natural next step is to extend these calculations to more genuinely double families and to search for uniform formulas for the higher differentials in terms of the defining DE-data.

References

[1] Carvalho, P. A. A. B., Lopes, S. A., Matczuk, J. (2011). Double Ore extensions versus iterated Ore extensions. *Comm. Algebra* 39(8):2838–2848. DOI: 10.1080/00927872.2010.489532.

[2] Gómez, J. Y., Suárez, H. (2020). Double Ore extensions versus graded skew PBW extensions. *Comm. Algebra* 48(1):185–197. DOI: 10.1080/00927872.2019.1635610.

[3] Herrera, K., Higuera, S., Rubiano, A. (2025). Finite Gröbner–Shirshov bases for double extension regular algebras of type (14641). arXiv preprint. DOI: 10.48550/arXiv.2509.05583.

[4] Li, H. (2002). *Noncommutative Gröbner Bases and Filtered-Graded Transfer*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1795. Berlin: Springer.

[5] Rubiano, A. (2026). Center of double extension regular algebras of type (14641). Preprint.

[6] Rubiano, A. (2026). A note on explicit homological invariants of graded double Ore extensions. Preprint.

[7] Rubiano, A., Reyes, A. (2024). Smooth geometry of double extension regular algebras of type (14641). arXiv preprint arXiv:2409.10264.

[8] Zhang, J. J., Zhang, J. (2008). Double Ore extensions. *J. Pure Appl. Algebra* 212(12):2668–2690. DOI: 10.1016/j.jpaa.2008.05.008.

[9] Zhang, J. J., Zhang, J. (2009). Double extension regular algebras of type (14641). *J. Algebra* 322(2):373–409. DOI: 10.1016/j.jalgebra.2009.03.041.

Algunas familias de matrices idempotentes de rango 1 cuyos permanentes generan números multifactoriales

Juan Gabriel Triana[1]

[1] Universitaria Agustiniana, Bogotá, Colombia

✉ juang.triana@uniagustiniana.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. En esta charla presentamos dos familias de matrices de rango 1 cuyos permanentes generan números multifactoriales. Bajo ciertas restricciones, veremos que se obtienen como caso particular matrices idempotentes de rango 1, cuyos permanentes corresponden a números multifactoriales.

Palabras claves. Permanente de una matriz, matriz idempotente, números multifactorial

Introducción

Sea $A = (a_{i,j})$ una matriz $n \times n$ y sea $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, se define el permanente de A como

$$perm(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

donde S_n es el grupo simétrico de permutaciones de N cf. [4]. Recientemente, se ha visto un creciente interés en el estudio de los permanentes [6], propiedades de estos [1], y su conexión con familias de números [3, 5].

El permanente de A es similar al determinante excepto porque no hay alternancia de signos [2]. Por lo anterior, la expansión de Laplace mediante menores puede adaptarse para el cálculo de permanentes de la siguiente forma

$$perm(A) = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} M_{ij}$$

donde M_{ij} es el permanente de la submatriz obtenida al eliminar la i-ésima fila y la j-ésima columna de A.

Por otra parte, se definen los números multifactorial $n!_r$ mediante la recurrencia

$$n!_r = n(n-r)!_r \text{ con } (1-r)!_r = \cdots = (-1)!_r = 0!_r = 1.$$

Si $r = 1$ obtenemos los números factorial, $n!_1 = n!$, con quienes se tiene la propiedad $(rn)!_r = r^n n!$ [7].

Resultados

En este trabajo se estudian las matrices

$$B_n = \begin{bmatrix} x_1 & x_1 & \ldots & x_1 \\ x_2 & x_2 & \ldots & x_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & x_n & \ldots & x_n \end{bmatrix} \text{ y } C_n = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_{n-1} \\ y_1 & x_1 y_1 & \ldots & x_{n-1} y_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n-1} & x_1 y_{n-1} & \ldots & x_{n-1} y_{n-1} \end{bmatrix}$$

Con las cuales se demuestra el siguiente resultado.

Proposición 1. *Para cada $n \geq 1$ entero se tiene:*

- $perm(rB_n) = (rn)!_r x_1 x_2 \cdots x_n$.
- $perm(rC_n) = (rn)!_r x_1 y_1 \cdots x_{n-1} y_{n-1}$.

Por otra parte, si tomamos las restricciones $x_n = 1 - x_1 - \cdots - x_{n-1}$, para las matrices B_n, y $x_1 y_1 + \cdots + x_{n-1} y_{n-1} = 0$ para las matrices C_n, generamos las matrices T_n y R_n respectivamente, para las cuales tenemos:

Proposición 2. *Para cada $n \geq 1$ entero, T_n y R_n son idempotentes. Además:*

- $perm(rT_n) = (rn)!_r x_1 \cdots x_{n-1}(1 - x_1 - \cdots - x_{n-1})$.
- $perm(rR_n) = (rn)!_r x_1 y_1 \cdots x_{n-2} y_{n-2}(-x_1 y_1 - \cdots - x_{n-2} y_{n-2})$.

Referencias

[1] Dolzan, D. (2024). Multiplicativity of permanents over matrix semirings. *Electron. J. Linear Algebra* **40**: 446-452. DOI: 10.13001/ela.2024.8607.

[2] Fiedler, M., Hall, F., Stroev, M. (2014). Permanents, determinants, and generalized complementary basic matrices. *Oper. Matrices* **8**(4): 1041-1051. DOI: 10.7153/oam-08-57.

[3] Fu, S., Lin, Z., Sun, Z. (2025). Permanent identities, combinatorial sequences, and permutation statistics. *Adv. Appl. Math.* **163**: 102789. DOI: 10.1016/j.aam.2024.102789.

[4] Glynn, D. (2010). The permanent of a square matrix. *European J. Combin.* **31**: 1887-1891. DOI: 10.1016/j.ejc.2010.01.010.

[5] Lin, Z., Yan, W., Zhao, T. (2025). Combinatorial identities arising from permanents for Euler numbers and Stirling numbers. *Adv. Appl. Math.* **165**: 102852. DOI: 10.1016/j.aam.2025.102852.

[6] Taranenko, A. (2016). Permanents of multidimensional matrices: Properties and applications. *J. Appl. Ind. Math.* **10**: 567-604. DOI: 10.1134/S1990478916040141.

[7] Triana, J. (2019). The formal derivative operator and multifactorial numbers. *Rev. Colombiana Mat.* **52**(2): 125-137. DOI: 10.15446/recolma.v53n2.85522.

Diámetro y girth del grafo nilpotente en anillos no conmutativos de tipo polinomial

Sebastián David Higuera Rincón

Universidad Antonio Nariño, Bogotá, Colombia
✉ shiguera442@uan.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. En esta ponencia presentamos un estudio sobre el diámetro y la excentricidad mínima (girth) del grafo nilpotente asociado a extensiones PBW (Poincaré-Birkhoff-Witt) torcidas definidas sobre anillos 2-primal [4]. Nuestro trabajo generaliza resultados previos obtenidos en el contexto de las extensiones de Ore, mostrando que algunas propiedades de grafos se preservan al considerar familias más generales de anillos no conmutativos. Estos resultados enriquecen la teoría de la interacción entre propiedades algebraicas de anillos y propiedades combinatorias de grafos asociados, y aportan un contexto más amplio que integra los grafos de divisores de cero y los grafos nilpotentes.

Palabras claves. Grafo nilpotente, diámetro, girth, extensiones de Ore, extensiones PBW torcidas, anillos 2-primal.

Introducción

En los últimos años, los grafos asociados a anillos se han consolidado como una herramienta importante para comprender la estructura algebraica mediante técnicas combinatorias. Un ejemplo es el *grafo de divisores de cero*, introducido por Beck [2] y desarrollado ampliamente por Anderson y Livingston [1], quienes mostraron que este grafo refleja propiedades relevantes de los anillos.

Redmond [8] y otros autores extendieron la noción de grafo de divisores de cero al ámbito no conmutativo y analizaron sus propiedades métricas, como el diámetro y la excentricidad mínima (girth). Chen [3] y, posteriormente, Li y Li [6] definieron el *grafo nilpotente*, donde el conjunto de vértices está dado por una cierta clase de divisores de cero asociada al conjunto de elementos nilpotentes del anillo. Este grafo contiene como subgrafo al grafo de divisores de cero y, por tanto, amplía las posibilidades de análisis.

Recientemente, varios trabajos han estudiado estos grafos en el contexto de extensiones de Ore introducidas por Ore [7], obteniendo resultados significativos sobre los valores posibles del diámetro y la invarianza del girth. En este sentido, surge una pregunta natural: ¿qué ocurre cuando, en lugar de extensiones de Ore, se consideran extensiones no conmutativas más generales, como las extensiones PBW torcidas? Las extensiones PBW torcidas, definidas por Gallego y Lezama [5], generalizan tanto las extensiones de Ore como diversas familias de álgebras no conmutativas de interés en álgebra y física matemática. Estudiar los grafos nilpotentes asociados a estas estructuras permite extender y unificar resultados previos, a la vez que abre la posibilidad de nuevas aplicaciones.

Durante la ponencia se presentarán algunos conceptos fundamentales y los principales teoremas de nuestro trabajo, así como ejemplos explícitos de álgebras que no pueden escribirse como extensiones de Ore y que ilustran los resultados obtenidos. La charla estará orientada a mostrar cómo la interacción entre álgebra y teoría de grafos permite extraer conclusiones profundas acerca de la estructura de anillos no conmutativos. Finalmente, se discutirán posibles líneas futuras de investigación, tales como la caracterización de otras propiedades métricas de los grafos nilpotentes en extensiones no conmutativas.

Referencias

[1] D. F. Anderson, P. S. Livingston, The zero-divisor graph of a commutative ring, *J. Algebra* **217**(2) (1999) 434–447.

[2] I. Beck, Coloring of commutative rings, *J. Algebra* **116**(1) (1988) 208–226.

[3] P. Chen, A kind of graph structure of rings, *Algebra Colloq.* **10**(2) (2003) 229–238.

[4] S. Higuera, A. Reyes, Nilpotent graphs over skew PBW extensions, arXiv:2506.00632 (preprint) (2025).

[5] C. Gallego, O. Lezama, Gr.ºbner bases for ideals of σ-PBW extensions, *Comm. Algebra* **39**(1) (2011) 50–75.

[6] A. Li, Q. Li, A Kind of Graph Structure on Non-Reduced Rings, *Algebra Colloq.* **17**(1) (2010) 173–180.

[7] O. Ore, Theory of Non-Commutative Polynomials, *Ann. of Math.* (*2*) **34**(3) (1933) 480–508.

[8] S. P. Redmond, The zero-divisor graph of a non-commutative ring, *Int. J. Commut. Rings* **1**(4) (2002) 203–211.

Hilbert evolution algebras, weighted digraphs, and nilpotency

Paula Cadavid[1]

[1] Universidade Federal Rural de Pernambuco - UFRPE, Recife, Brasil

✉ paula.cadavid@ufrpe.br

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Abstract. Hilbert evolution algebras generalize evolution algebras through a framework of Hilbert spaces. In this talk we focus on infinite-dimensional Hilbert evolution algebras and their representation through a suitably defined weighted digraph. By means of studying such a digraph we obtain properties for these structures extending well-known results related to the nilpotency of finite dimensional evolution algebras. We show that differently from what happens for the finite dimensional evolution algebras, the notions of nil and nilpotency are not equivalent for Hilbert evolution algebras. Furthermore, we exhibit necessary and sufficient conditions under which a given Hilbert evolution algebra is nil or nilpotent. Our results are contained in [1].

Keywords. Evolution algebra, Hilbert space, Hilbert evolution algebra, nil, nilpotency.

References

[1] Cadavid, P., Rodriguez, P.M., Vidal, S.J. (2024) Hilbert evolution algebras, weighted digraphs, and nilpotency. *Rev. Real Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A-Mat.* 118:117. DOI:/10.1007/s13398-024-01616-w.

Identidades Polinomiales para el Álgebra de Novikov en dimensión dos

Carlos Arturo Rodriguez Palma

Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia
✉ caropal@uis.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. Supongamos que F es un cuerpo arbitrario de característica diferente de 2. Fijamos un conjunto infinito numerable $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Escribimos $F\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ para denotar el F-álgebra libre unitaria con generadores $x_1, \ldots, x_n$. En el caso en que los generadores libres sean $x_1, x_2, \ldots$, el álgebra libre correspondiente se denota por $F\langle X\rangle$.

Recordemos que un polinomio $f(x_1, \ldots, x_n)$ en $F\langle X\rangle$ es una identidad polinomial para un álgebra A si $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ para todos $a_1, \ldots, a_n \in A$. Si A satisface una identidad polinomial no trivial, llamamos a A una PI-álgebra. Denotamos por $\mathrm{Id}(A)$ el subconjunto de $F\langle X\rangle$ formado por todas las identidades polinomiales de A. Es conocido que $\mathrm{Id}(A)$ es un T-ideal de $F\langle X\rangle$, es decir, un ideal que es invariante bajo todos los endomorfismos de $F\langle X\rangle$.

Un álgebra N sobre un cuerpo F se denomina **álgebra de Novikov** si N satisface las siguientes identidades polinomiales

$$(x, y, z) = (y, x, z), \tag{1}$$
$$(xy)z = (xz)y, \tag{2}$$

donde $(x, y, z) = (xy)z - x(yz)$ es el asociador de las variables x, y, z.

En el 2001 Bai y Meng [1] obtienen la clasificación para el álgebra de Novikov N en dimensiones dos sobre el cuerpo de los complejos $\mathbb{C}$. En [2], Ferreira, Kuz y Lopatin estudian las identidades polinomiales para esta álgebra.

En esta charla presentaremos la clasificación par el álgebra de Novikov N en dimensión dos sobre un cuerpo F de característica diferente de 2 y usaremos esta clasificación para estudiar sus identidades polinomiales. Los resultados que presentaremos fueron obtenidos en un trabajo con el profesor Diogo Diniz de la Universidad Federal de Campina Grande (UFCG).

Palabras claves. Identidades Polinomiales, T-ideal, Álgebra de Novikov.

Referencias

[1] C. Bai, C.,& Meng, D.(2001). The classification of Novikov algebras in low dimensions, *J. Phys. A, Math. Gen.* **34**(8), 1581–1594: https://doi.org/10.1088/0305-4470/34/8/305.

[2] Ferreira, I., Kuzmin, A., & Lopatin, A. (2025). Novikov algebras in low dimension: Identities, imagens and codimension, *Journal of Algebra*, 674,1–28: https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2025.03.015

One note on : On Two-Generated Non-commutative Algebras Subject to the Affine Relation

Camilo Arana[1]

[1] Universidad Nacional de Colombia, Bogotá D.C., Colombia

✉ dcaranah@unal.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. In the paper titled *On Two-Generated Noncommutative Algebras Subject to the Affine Relation*, Levandovskyy, , Christoph Koutschan, and Oleksandr Motsak obtained a classification of two-generated algebras of type $(q, \alpha, \beta, \gamma)$ into five classes. We review the main results of this work and show how these algebraic results are connected to problems in combinatorics.

Palabras claves. Noncommutative algebras, classification, combinatorics.

Motivated by the study of normal orders for two-generated algebras, we came across a remarkable paper by Levandovskyy et al., entitled *On Two-Generated Noncommutative Algebras Subject to the Affine Relation* [1]. In that work, the authors developed a complete and systematic classification of all two-generated algebras of the form $(q, \alpha, \beta, \gamma)$, that is, algebras subject to commutation relations of the type $yx = qxy + \alpha x + \beta y + \gamma$. This classification provides a unified framework for understanding a broad family of noncommutative algebras that arise naturally in different contexts. Furthermore, they determined several normal forms associated with these algebras, which play a fundamental role in describing their algebraic structure and in facilitating explicit computations. For additional background on normal ordering techniques and their combinatorial aspects, we refer the reader to [3].

In this talk, we aim to present the main results of the work of Levandovskyy et al., placing particular emphasis on the ideas behind the classification and the role of standard forms. Finally, we will highlight how these results are naturally connected to problems of normal ordering and to combinatorial structures such as Stirling numbers, thereby illustrating the interplay between noncommutative algebra and combinatorics.

Referencias

[1] Levandovskyy, V., Koutschan, C., Motsak, O. On Two-Generated Non-commutative Algebras Subject to the Affine Relation, in: Gerdt, V.P., Koepf, W., Mayr, E.W., Vorozhtsov, E.V. (eds) Computer Algebra in Scientific Computing. 13th international workshop, CASC 2011, Kassel, Germany, September 5-9 (2011). Proceedings, 309-320. Lecture Notes in Computer Science, vol 6885. Springer, Berlin, Heidelberg. DOI: 10.1007/978-3-642-23568-9_24.

[2] Mansour, T., Schork, M. On Ore-Stirling numbers defined by normal ordering in the Ore algebra. *Filomat* **37**(18) 6115–6131 (2023) DOI: 10.2298/FIL2318115M.

[3] Mansour, T., Schork, M. *Commutation relations, normal ordering, and Stirling numbers*. Discrete Mathematics and Its Applications. CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton, FL, (2015) https://doi.org/10.1201/b18869.

Grafos de Cayley aditivos y reglas g-Golomb

Juliana Diaz[1], Fernando A. Benavides[2]

[1] Universidad Del Cauca, Popayán, Colombia

[2] Universidad De Nariño, Pasto, Colombia

✉ julianamdiaz@unicauca.edu.co, fandresbenavides@udenar.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026

San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. Los grafos de Cayley aditivo y de Cayley diferencia, definidos sobre grupos abelianos finitos, son variantes menos conocidas del grafo de Cayley clásico. Estas estructuras permiten conectar la combinatoria con la teoría espectral en el análisis de grafos. En este sentido, se obtiene una nueva cota superior para el tamaño máximo de una regla g-Golomb en un grupo abeliano de orden n dada por $f_2^-(g,n) \leq \sqrt{(n-2)g+1}+1$.

Palabras claves. Grafo de Cayley, regla $g-$Golomb, teoría espectral

Los grafos de Cayley fueron introducidos por Arthur Cayley en 1878 [1]. Una variante de estos grafos se obtiene cuando se considera un grupo finito X y un subconjunto no vacío $S \subseteq X$ tal que $S = S^{-1}$ y $1_X \notin S$, entonces el *grafo de Cayley* de X respecto a S denotado por $Cay(X,S)$, es un grafo no dirigido cuyo conjunto de vértices es X y su conjunto de aristas está dado por:

$$E(Cay(X,S)) = \{uv : u,v \in X \quad \text{y} \quad u^{-1}v \in S\}.$$

Como S es cerrado bajo inversos implica que $Cay(X,S)$ es no dirigido. Este concepto fue introducido para estudiar los grupos abstractos definidos a partir de un conjunto de generadores [3], constituyendo así un puente entre la teoría de grupos y la teoría de grafos.

Existen dos variantes menos exploradas del grafo de Cayley conocidas como *grafo de Cayley aditivo* (también llamado *grafo suma*) y el *grafo de Cayley diferencia* (o *digrafo de Cayley*). Sea X un grupo abeliano finito y $S \subseteq X$. El grafo de Cayley aditivo $Cay^+(X,S)$ tiene como conjunto de vértices a X y el conjunto de aristas:

$$E(Cay^+(X,S)) = \{uv : u,v \in X \quad \text{y} \quad u+v \in S\}.$$

Note que S no se asume simétrico. Por otro lado, el grafo de Cayley diferencia de X respecto a S, denotado por $\mathrm{Cay}^-(X,S)$, tiene como conjunto de vértices a X y como conjunto de aristas:

$$E(\mathrm{Cay}^-(X,S)) = \{(u,v) \in X \times X : v-u \in S\}.$$

Observe que si $S \neq -S$, entonces el grafo es dirigido; sin embargo, si este no es el caso y 1_X es un elemento de S, se obtiene el grafo de Cayley no dirigido clásico.

Sean X un grupo abeliano, $S \subset X$ y $x \in X$. Se denota por $R_S^+(x)$ y $R_S^-(x)$ al número de pares ordenados $(s_1,s_2) \in S^2$ tales que $s_1+s_2 = x$ y $s_1-s_2 = x$, respectivamente. Se dice que S es un *conjunto g-Sidon* si $R_S^+(x) \leq g$ para todo $x \in X$, y una *regla g-Golomb* si $R_s^-(x) \leq g$ para todo $x \in X - \{0\}$. Si $g = 2$ o $g = 1$, se tiene un conjunto Sidon o una una regla Golomb tradicional, respectivamente. Estas estructuras han sido estudiadas en múltiples contextos combinatorios. En particular, J. López, H. Ruiz y C. Trujillo estudiaron el problema del tamaño máximo de estos conjuntos mediante las funciones

$f_2^+(g,N)$ y $f_2^-(g,N)$ utilizando herramientas como la energía aditiva para obtener cotas precisas y valores asintóticos [2]. A pesar de estos avances, se deja abierta la cuestión de cómo las restricciones combinatorias propias de los conjuntos g-Sidon y las reglas g-Golomb influyen en el espectro de los grafos de Cayley aditivos asociados. En este sentido, utilizando técnicas básicas de teoría espectral de grafos, hemos establecido la siguiente cota superior para el tamaño máximo de una regla g-Golomb en un grupo abeliano X de orden $n = |X|$, esto es:

$$f_2^-(g,n) \leq \sqrt{(n-2)g+1} + 1,$$

para todo $n, g \in \mathbb{Z}^+$ con $g \leq n$. El objetivo de la charla es mostrar cómo se obtiene esta cota superior a partir del segundo valor propio de la matriz de adyacencia asociada al grafo de Cayley aditivo, destacando el potencial del enfoque espectral en problemas combinatorios.

Referencias

[1] Caucal, D. (2020). Cayley graphs of basic algebraic structures. *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science,* 21. DOI: 10.23638/DMTCS-21-1-16.

[2] López, J., Ruiz, M., and Trujillo, C. (2017). g-sidon modular sets and g-golomb modular rulers. *JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications*, 39(4):401–415. DOI: 10.17654/NT039040401.

[3] Konstantinova, E. (2013). Some problems on Cayley graphs. *University of Primorska Press*. DOI: 10.1016/j.laa.2008.05.010.

A P-theorem for Inverse Semigroupoids

Víctor Marín[1]

[1] Universidad del Tolima, Ibagué, Colombia

✉ vemarinc@ut.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. It is well known that every ordered partial action of an inverse semigroupoid on a partially ordered set admits a universal globalization. This result is used to establish a connection between ordered partial actions of groupoids and a multi-object analogue of McAlister triples. As a consequence, we present a multi-object version of the P-theorem: every E-unitary inverse semigroupoid is isomorphic to a semidirect product arising from an ordered partial action of a groupoid on a multi-object version of a semilattice.

Palabras claves. Ordered partial actions, Inverse Semigroupoids, P-theorem.

A landmark result in the theory is the structural theorem known as the P-theorem, proved by McAlister in [3, Theorem 2.6]. The central idea behind this theorem is that groups and semilattices, the simplest examples of E-unitary inverse semigroups, can be used as foundational components for building all E-unitary inverse semigroups.

In [2], the class of all E-unitary inverse semigroups is obtained, up to isomorphisms, by means of the so-called P-semigroups. A P-semigroup is obtained from a McAlister triple (G, E, X), which consists of a group G acting by order automorphisms on a partially ordered set E, an order ideal X of E that is a meet semilattice under the induced order and the action is required to satisfy the conditions $G \cdot X = E$ and $g \cdot X \cap X \neq \emptyset$ for all $g \in G$. The P-semigroup associated with (G, E, X) is then formed by $P(G, E, X) = \{(g, x) \in G \times X \mid g \cdot x \in X\}$ with the product given by $(g, x) \cdot (h, y) = (gh, h^{-1} \cdot x \wedge y)$. The McAlister P-theorem asserts that every E-unitary inverse semigroup is isomorphic to a P-semigroup.

Demeneghi and Tasca (to see [1]) proved that every partial action of an inverse semigroupoid on a set admits universal globalization. In [4], We extend this result by introducing the notion of ordered partial actions of inverse semigroupoids on partially ordered sets and prove that every ordered partial action of an inverse semigroupoid on a poset admits globalization. Furthermore, this globalization is universal among all global actions that extend the original partial action in an appropriate sense.

We apply this result to establish a connection between generalized McAlister triples and ordered partial actions of groupoids on semilatticeoids. This leads to the definition of a P-semigroupoid as an inverse semigroupoid isomorphic to a semidirect product arising from such a partial action. In particular, P-semigroupoids are shown to be E-unitary.

Finally, by adapting Munn's ideas to the multi-object setting, we establish a version of the P-theorem in this context. Specifically, we show that every E-unitary inverse semigroupoid $\mathcal{S}$ is isomorphic to the semidirect product arising from the ordered partial action of its maximal groupoid image $\mathcal{S}/\sigma$ on $E(\mathcal{S})$, induced by the Munn action of $\mathcal{S}$ on $E(\mathcal{S})$.

Referencias

[1] Demeneghi, P., and Tasca, F.(2025). Globalization of Partial Inverse Semigroupoid Actions on Sets. *Comm. Algebra.* 53 (5): 1904–1920. DOI:10.1080/00927872.2024.2426039.

[2] Kellendonk, J. and Lawson M. V. (2004). Partial Actions of Groups. *International Journal of Algebra and Computation.* 14 (1): 87–114. DOI:10.1142/S0218196704001657.

[3] McAlister, D. B. (1974). Groups, semilattices and inverse semigroups II. *Trans. Amer. Math. Soc.* 196: 351–370. DOI:10.2307/1997032.

[4] Tasca A. F., Demeneghi P., Marín, V. and Velasco W. G. G. (2025). A P-theorem for Inverse Semigroupoids through Ordered Globalizations, 23 pp. arXiv:2505.08897.

Involuciones en Anillos de Grupo: viejos y nuevos resultados

Alexander Holguín Villa[1], John H. Castillo[2]

[1] Universidad Industrial de Santander - UIS, Bucaramanga, Colombia
[2] Universidad de Nariño - UdeNar, San Juan de Pasto, Colombia
✉ aholguin@uis.edu.co, jhcastillo@udenar.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. En esta charla presentamos un "estado del arte" y algunos avances recientes de los Anillos de Grupo vistos como anillos con involución. En particular, discutimos los resultados más relevantes sobre las propiedades de Lie de los elementos simétricos (en algunos casos de los elementos anti-simétricos) y cuándo estas propiedades determinan o influencian la estructura de todo el Anillo de Grupo. Consideramos varios tipos de involuciones, no solo la así llamada involución clásica. Finalmente, formulamos algunos problemas que pueden abordarse en trabajos futuros.

Palabras claves. Involución; Anillos de grupo; Propiedades de Lie; Elementos simétricos y anti-simétricos.

Introducción

Recordemos que un subconjunto S de una $\mathbf{F}$-álgebra R satisface una *identidad polinomial* (brevemente $S \in$ IP), si existe un polinomio no-cero $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en la $\mathbf{F}$-álgebra asociativa libre $\mathbf{F}\{X\}$ sobre el conjunto infinito enumerable de variables no-conmutativas $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ tal que $f(s_1, s_2, ..., s_n) = 0$, para todo $s_i \in S$. Por ejemplo, R es conmutativa si satisface la identidad polinomial $f(x_1, x_2) = x_1x_2 - x_2x_1$ y, toda álgebra asociativa finito dimensional satisface la *identidad polinomial standard* de grado $n+1$, donde $n = \dim_{\mathbf{F}} R$ [8, Lemma 5.1.6],

$$St_{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = \sum_{\rho \in \mathcal{S}_{n+1}} (sgn\rho) x_{\rho(1)} x_{\rho(2)} \cdots x_{\rho(n+1)}.$$

Una involución sobre la $\mathbf{F}$-álgebra R es una aplicación $x \mapsto x^*$ tal que $(x+y)^* = x^*+y^*$, $(xy)^* = y^*x^*$ y $(x^*)^* = x$ para todo $x, y \in R$, en otras palabras, * es un anti-automorfismo de orden 2, [9]. En este caso, resulta natural considerar los subconjuntos $R^+ = \{r \in R : r^* = r\}$ and $R^- = \{r \in R : r^* = -r\}$ de elementos simétricos y anti-simétricos, respectivamente, del anillo R bajo la involución *. Una pregunta de interés general es determinar hasta qué punto las propiedades de R^+ o R^- determinan las propiedades de toda R. Uno de los resultados más famosos en ese sentido debido a Amitsur [4, Teorema 6.5.2], establece que si $R^+ \in$ IP o $R^- \in$ IP, entonces $R \in$ IP también (no necesariamente la misma IP). Si R es asociativo y $x_1, x_2 \in R$, se define el corchete de Lie por $[x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1$ y recursivamente, $[x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}] = [[x_1, \ldots, x_n], x_{n+1}]$. $S \subseteq R$ es llamado *Lie nilpotente*, si existe $n \geq 2$ tal que $[a_1, a_2, ..., a_n] = 0$ para todo $a_i \in S$. El menor tal n es llamado el índice de nilpotencia. Para un entero positivo n, diremos que S es Lie n-Engel si $[a, \underbrace{b, \ldots, b}_{n \text{ times}}] = 0$, para todo $a, b \in S$. Obviamente si S es Lie nilpotente, entonces S es Lie n-Engel para algún n.

Para $\mathbf{F}$ un cuerpo de característica diferente de 2 y G un grupo, en los últimos años se ha presentado un aumento notorio del estudio de varias propiedades de las álgebras de grupo asociadas $\mathbf{F}G$, consideradas como anillos con involución, [7]. Inicialmente, las involuciones analizadas sobre $\mathbf{F}G$ fueron todas obtenidas como extensiones $\mathbf{F}$-lineales de involuciones * del grupo G: $\sum_{g \in G} \alpha_g g \mapsto \sum_{g \in G} \alpha_g g^*$, siendo

estudiadas propiedades como conmutatividad, Lie nilpotencia y Lie n-Engel en los conjuntos $\mathbf{F}G^+$ y $\mathbf{F}G^-$ y cuándo dichas particularidades determinan por completo la estructura de $\mathbf{F}G$, [3, 5, 6]. Nuestras álgebras de interés $\mathbf{F}G$ están dotadas de manera natural de una involución, la así llamada *involución clásica*, la cual es la inducida de la aplicación $g \mapsto g^{-1}$, para $g \in G$, más exactamente ella viene dada por $\alpha = \sum_{g\in G} \alpha_g g \mapsto \alpha^* = \sum_{g\in G} \alpha_g g^{-1}$. Sin embargo, otro tipo de involuciones también han despertado el interés: **las involuciones de grupo orientadas** [1, 2, 5], que son extensiones $\mathbf{F}$-lineales de las involuciones * de G, "*torcidas*" por un homomorfismo no-trivial $\sigma : G \to \{\pm 1\}$, llamado *orientación*, i.e., si $^* : G \to G$ es una involución dada, la *involución de grupo orientada* de $\mathbf{F}G$ es definida por

$$\alpha = \sum_{g\in G} \alpha_g g \mapsto \alpha^{\circledast} = \sum_{g\in G} \alpha_g \sigma(g) g^*.$$

En esta `charla` presentamos algunos resultados clásicos y otros nuevos acerca de álgebras de grupo tales que $\mathbf{F}G^+$ ó $\mathbf{F}G^-$ son Lie nilpotentes (Lie n-Engel) con respecto a $\circledast$. Además, relacionamos la conmutatividad de los elementos $\mathbf{F}G^+$ con la $\circledast$-identidad polinomial $\alpha\alpha^{\circledast} = \alpha^{\circledast}\alpha$, $\alpha \in \mathbf{F}G$, [5, Theorem 3.1 and Theorem 4.1]. Para finalizar, se plantean algunas preguntas de trabajos futuros.

Referencias

[1] Broche Cristo, O., Polcino Milies, C. (2006). Symmetric elements under oriented involutions in group rings. *Comm. Algebra* 34(9):3347–3356. DOI: 10.1080/00927870600779181.

[2] Castillo Gómez, J. H., Polcino Milies, C. (2012). Lie properties of symmetric elements under oriented involutions. *Comm. Algebra.* 40(12):4404–4419. DOI: 10.1080/00927872.2011.602165.

[3] Giambruno, A., Polcino Milies, C., Sehgal, S. K. (2009). Lie properties of symmetric elements in group rings. *J. Algebra* 321(3):890–902. DOI: 10.1016/j.jalgebra.2008.09.041.

[4] Herstein, I. N. (1976). *Rings with involution.* Chicago Lectures in Mathematics. Chicago, IL: University of Chicago Press.

[5] Holguín-Villa, A., Castillo, J. H. (2020). Normal group algebras. *Comm. Algebra.* 48(10):4391–4402. DOI: 10.1080/00927872.2020.1762090.

[6] Jespers, E., Ruiz Marín, M. (2006). On symmetric elements and symmetric units in group rings. *Comm. Algebra.* 34(2):727–736. DOI: 10.1080/00927870500388018.

[7] Lee, G. T. (2010). *Group Identities on Units and Symmetric Units of Group Rings.* Algebra and Applications, Vol. 12., London, UK: Springer-Verlag.

[8] Passman D. S. (1977). *The algebraic structure of group rings.* Pure and Applied Mathematics, New York: Wiley- Interscience [John Wiley & Sons].

[9] Polcino Milies, C., Sehgal, S. K. (2002). *An introduction to group rings.* Algebras and Applications. Vol. 1., Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Estabilidad para r-peak posets

Gabriel Bravo Ríos[1]

[1] Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia

✉ gbravor@udistrital.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. Se introduce la noción de estabilidad para la categoría de representaciones zócalo-proyectivas de un r-peak poset. Asimismo, se describen funciones de estabilidad mediante un modelo geométrico de arcos orientados en un polígono y la forma bilineal asociada a posets de tipo $\mathbb{A}$. Este enfoque proporciona una nueva realización geométrica de la categoría de representaciones de esta familia de posets. Finalmente, se demuestra que dicha forma bilineal induce una función de estabilidad total a través de su relación con este modelo geométrico.

Palabras claves. Estabilidad, forma bilineal, modelo geométrico, posets de tipo $\mathbb{A}$, r-peak poset.

La noción de estabilidad para categorías abelianas fue introducida por Rudakov en [8], motivada por las ideas de estabilidad desarrolladas por King [4] y Schofield [10] en el contexto de representaciones de quivers. En particular, Futorny e Iusenko introdujeron este concepto para la categoría de representaciones de posets con un punto maximal, donde estudiaron propiedades de estabilidad y demostraron que toda representación indescomponible es estable respecto a algún peso [2].

Por otra parte, Simson en [11] introdujo las categorías $\mathbb{P}$-spr de peak $\mathbb{P}$-espacios para un poset con r puntos maximales, como una generalización de los posets con un punto maximal, y Kosakowska presentó una lista de todos los posets y representaciones sinceras indescomponibles de posets con r puntos maximales (r-peak posets) [5, 6, 7]. Recientemente, Schiffler y Serna introdujeron una familia de r-peak posets cuyo grafo subyacente es un diagrama de Dynkin de tipo $\mathbb{A}$, llamados posets de tipo $\mathbb{A}$. Ellos probaron que dichos posets son de tipo de representación finita y presentaron una realización geométrica de la categoría de representaciones a través de la categoría clúster de tipo $\mathbb{A}$ [9].

En esta charla se introduce la noción de estabilidad para la categoría de $\mathbb{P}$-spr, y se muestra que estas categorías conservan propiedades fundamentales, como la propiedad de "see-saw" y la existencia de filtraciones de Jordan–Hölder y Harder–Narasimhan. Para los posets de tipo $\mathbb{A}$, se describe una función de estabilidad vía la forma bilineal asociada a dichos posets, siguiendo las ideas de Futorny e Iusenko [2], y se prueba que toda representación indescomponible en la categoría de representaciones de posets de tipo $\mathbb{A}$ es estable con este peso. Más aún, siguiendo el modelo geométrico de segmentos de línea en un polígono $P(Q)$, con Q un quiver de tipo Dynkin A [1], se describe una equivalencia categórica entre una subcategoría completa determinada por el modelo geométrico y la categoría de representaciones zócalo-proyectivas sobre el álgebra de incidencia de posets de tipo $\mathbb{A}$. Este modelo induce una función de estabilidad total para la categoría de posets de tipo $\mathbb{A}$. Finalmente, se muestra que la función de estabilidad asociada a la forma bilineal induce funciones de estabilidad total a través de la categoría completa de segmentos de línea del polígono $P(Q)$ para posets de tipo $\mathbb{A}$[3].

Referencias

[1] Barnard, E., Gunawan, E., Meehan, E., Schiffler, R. (2023). Cambrian combinatorics on quiver representations (type $\mathbb{A}$). *Adv. Appl. Math.* 143:102428. DOI: 10.1016/j.aam.2022.102428.

[2] Futorny, V., Iusenko, K. (2019). Stable representations of posets. *J. Pure Appl. Algebra* 223(12):5251–5278. DOI: 10.1016/j.jpaa.2019.03.020.

[3] Iusenko, K., Rios, G. B., Serna, R.-J. (2025). Stability for socle-projective categories of type $\mathbb{A}$, 28 pp. arXiv: 2501.13578.

[4] King, A. D. (1994). Moduli of representations of finite-dimensional algebra. *Q. J. Math.* 45(4):515–530. DOI: 10.1093/qmath/45.4.515.

[5] Kosakowska, J. (2001). A classification of two-peak sincere posets of finite prinjective type and their sincere prinjective representations. *Colloq. Math.* 87(1):27–77. DOI: 10.4064/cm87-1-3.

[6] Kosakowska, J. (2002). Indecomposable sincere prinjective modules over multipeak sincere posets of finite prinjective type with at least four maximal elements. In: Happel, D., Zhang, Y. B. (eds.), *Representations of Algebras II*. Beijing Norm. Univ. Press, Beijing, 253–291.

[7] Kosakowska, J. (2002). Sincere posets of finite prinjective type with three maximal elements and their sincere prinjective representations. *Colloq. Math.* 93(2):155–208. DOI: 10.4064/cm93-2-1.

[8] Rudakov, A. (1997). Stability for an abelian category. *J. Algebra* 197(1):231–245. DOI: 10.1006/jabr.1997.7093.

[9] Schiffler, R., Serna, R.-J. (2020). A geometric realization of socle-projective categories for posets of type $\mathbb{A}$. *J. Pure Appl. Algebra* 224(12):106436. DOI: 10.1016/j.jpaa.2020.106436.

[10] Schofield, A. (1991). Semi-invariants of quivers. *J. London Math. Soc.* 43(3):385–395. DOI: 10.1112/jlms/s2-43.3.385.

[11] Simson, D. (1993). Posets of finite prinjective type and a class of orders. *J. Pure Appl. Algebra* 90(1):77–103. DOI: 10.1016/0022-4049(93)90138-J.

Explicit Minimal Polynomials Arising from Chebyshev Polynomials of Degree $p^m q^r$

David Daza Urbano[1], Maribel Díaz Noguera[1], Martha Romero Rojas[1]

[1] Universidad del Cauca, Popayán, Colombia

✉ davidaza@unicauca.edu.co, mddiaz@unicauca.edu.co, mjromero@unicauca.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. We study explicit irreducible factors of the Chebyshev polynomials $T_{p^m q^r}(x)$, where p and q are distinct odd primes. Using elementary properties of Chebyshev polynomials and cyclotomic fields, we explicitly construct the minimal polynomial of $2\cos\left(\frac{\pi}{p^m q^r}\right)$. This yields a concrete factorization of $T_{p^m q^r}(x)$ in terms of algebraic numbers of the form $2\cos\left(\frac{k\pi}{p^a q^b}\right)$, and extends previous results for prime powers.

Palabras claves. minimal polynomials, Chebyshev polynomials, cyclotomic fields, trigonometric algebraic numbers.

Introducción

Chebyshev polynomials play an important role in several areas of mathematics, including approximation theory, number theory, and algebraic geometry. In particular, their algebraic properties have been extensively studied, especially their factorization and the structure of their irreducible factors over $\mathbb{Q}$.

One classical problem concerns the minimal polynomials of numbers of the form

$$\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

and their relation to the factorization of Chebyshev polynomials. These polynomials arise naturally from the identity

$$T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta),$$

which implies that the roots of $T_n(x)$ are the numbers

$$\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right), \qquad k = 1, \ldots, n.$$

The arithmetic properties of these polynomials have been investigated by several authors. For example, the irreducible factors of Chebyshev polynomials and their relation with cyclotomic fields have been studied in works such as Gurtas [8], Grubb [6], Hsiao [9], and Levy [10]. More recently, Daza [3] described the minimal polynomials of numbers of the form

$$\cos\left(\frac{\pi}{2p^m}\right)$$

for odd primes p, and established a factorization of $T_{p^m}(x)$ into irreducible polynomials over $\mathbb{Q}$.

In this talk, we study the analogous situation involving two distinct primes. Let p and q be odd primes, and let $m, r \geq 1$. We introduce a family of polynomials

$$P_{m,r}^{(p,q)}(x),$$

arising from Chebyshev polynomials, and prove that they are irreducible over $\mathbb{Q}$ and that they are the minimal polynomials of the numbers

$$\cos\left(\frac{\pi}{2p^m q^r}\right).$$

Using these polynomials, we obtain a natural factorization of the Chebyshev polynomial $T_{p^m q^r}(x)$ that separates the factors associated with each prime from the mixed factors arising from the interaction between the two prime powers. Combining this decomposition with the known factorizations of $T_{p^m}(x)$ and $T_{q^r}(x)$ yields a complete factorization of $T_{p^m q^r}(x)$ into irreducible polynomials over $\mathbb{Q}$.

Finally, we describe the splitting field of these polynomials and determine the corresponding Galois group, showing that it is naturally related to the maximal real subfield of a cyclotomic field.

This provides a unified description of the irreducible factors of $T_{p^m q^r}(x)$ and connects the algebraic structure of Chebyshev polynomials with classical results from cyclotomic fields and Galois theory.

Referencias

[1] Bayad, A., Cangül, I. N.: The minimal polynomial of $2\cos(\pi/q)$ and Dickson polynomials, Applied Mathematics and Computation, **218** (13), 7014–7022 (2012).

[2] Beslin, S. and De Angelis, V.: The Minimal Polynomials of $\sin(2\pi/p)$ and $\cos(2\pi/p)$. Mathematics magazine, 77(2), pp.16-149. 2004.

[3] V. Daza, J. David, et al., Minimal polynomial of $\cos(\pi/2p^m)$ over $\mathbb{Q}$ and irreducible factors of Chebyshev polynomials $T_{p^m}(x)$.

[4] Demirci, M., Cangül, I. N.: The constant term of the minimal polynomial of $\cos(2\pi/n)$ over $\mathbb{Q}$, Fixed Point Theory and Applications, **2013** (77), 1–8 (2013).

[5] Florez, R., Saunders, J.: Irreducibility of generalized Fibonacci polynomials, Integers, **22** (A69), 1–16 (2022).

[6] Grubb, D.J.: Factoring Chebyshev Polynomials. The Fibonacci Quarterly, 52(4), pp.360-366, 2014.

[7] Gürtas, Y. Z.: The minimal polynomial of $\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)$, Communications of the Korean Mathematical Society, **31** (4), 667–682 (2016).

[8] Gürtaş, Y. Z.: Chebyshev polynomials and the minimal polynomial of $\cos(2\pi/n)$ (II), Journal of Interdisciplinary Mathematics, **25** (8), 2267–2288 (2022).

[9] Hsiao, H.J.: On factorization of Chebyshev's polynomials of the first kind. Bulletin of the Institute of Mathematics Academia Sinica, **12**(1), pp.89-94 (1984)

[10] Levy, D.:The irreducible factorization of Fibonacci polynomials over Q. The Fibonacci Quarterly, 39(4), pp.309-319 (2001).

[11] Oluwade, B.: The Galois Group of the Chebyshev Polynomials of the First Kind of Prime Degree, African Journal of Computing and ICT, **3** (1–2), 21–27 (2010).

[12] Rayes, M.O., Trevisan, V. and Wang, P.:Factorization of Chebyshev polynomials. Kent State University. Kent, OH, 1998.

[13] Rayes, M.O., Trevisan, V. and Wang, P.S.: Factorization properties of Chebyshev polynomials. Computers & Mathematics with Applications, 50(8-9), pp.1231-1240, 2005.

Matrix bispectrality and noncommutative algebras: beyond the prolate spheroidals

Brian Vasquez[1]

[1] Universidad del Tolima, Ibagué, Colombia

✉ bdvasquezc@ut.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Abstract. This talk concerns the noncommutative bispectral problem and its connections with harmonic analysis, differential operators, and algebraic structures arising in mathematical physics. The classical bispectral problem, introduced by Johannes J. Duistermaat and Frits A. Grünbaum, originated from the study of remarkable commutation properties related to time-and-band limiting operators and prolate spheroidal wave functions.

We discuss matrix-valued extensions of the bispectral problem, where differential operators and eigenfunctions are allowed to take values in noncommutative algebras. In this setting, bispectrality becomes closely related to bimodule structures and operator algebras, revealing deep interactions between analysis, algebra, and geometry. Particular emphasis will be given to conjectures proposed in earlier work of Grünbaum and collaborators, later proved in the doctoral work of the speaker under the supervision of Jorge Zubelli.

Keywords. Bispectral algebras, Bispectral triple, Integral and Commuting Differential Operators, Presentations of Finitely Generated Algebras, Time-and-band Limiting.

The bispectral problem discussed in this talk has its origin in Duistermaat & Grünbaum (1986). It is motivated by an effort to understand and extend a remarkable phenomenon in Fourier analysis on the real line: the operator of time-and-band limiting is an integral operator admitting a second order differential operator with simple spectrum in its commutator. This property, which gives a good numerical way to compute the eigenfunctions of the integral operator, was put to good use in a series of papers by D. Slepian, H. Landau, and H. Pollak at Bell Labs back in the 1960's, see (3; 5; 6; 4).

If one tries to extend this property beyond the Fourier case by adding a potential $V(x)$ to the operator $-\left(\frac{d}{dx}\right)^2$ and replacing an expansion in exponentials by an expansion in terms of the eigenfunctions $\psi(x,z)$ of $-\left(\frac{d}{dx}\right)^2+V(x)$, it appears plausible that a certain property of these eigenfunctions $\psi(x,z)$ could play a useful role. This property is now known as the bispectral property.

The version of the bispectral problem that we discuss in this presentation is a noncommutative one, obtained by allowing all objects in the original formulation to be matrix-valued. A first noncommutative version of the bispectral problem was considered in J. Zubelli's Ph.D. thesis at Berkeley, see also (10; 11; 12), in the situation where both the physical space and spectral operators act on the same side of the eigenfunction and the eigenvalues are both scalar-valued. Later on, several other versions were considered, see (1) and references therein.

In this current contribution, we take the bi-module structure of the problem into account and let the operators act on different sides as well as allow both eigenvalues to be matrix valued. We consider triplets (L,ψ,B) satisfying the equations:

$$L\psi(x,z)=\psi(x,z)F(z) \qquad (\psi B)(x,z)=\theta(x)\psi(x,z) \tag{1}$$

with $L=L(x,\frac{d}{dx})$ and $B=B(z,\frac{d}{dz})$ linear matrix differential operators, i.e., $L\psi=\sum_{i=0}^{l}a_i(x)\cdot\left(\frac{d}{dx}\right)^i\psi$ and $\psi B=\sum_{j=0}^{m}\left(\frac{d}{dz}\right)^j\psi\cdot b_j(z)$. The functions $a_i:U\subset\mathbb{C}\to M_N(\mathbb{C})$, $b_j:V\subset\mathbb{C}\to M_N(\mathbb{C})$, $F:V\subset$

$\mathbb{C} \to M_N(\mathbb{C})$, $\theta : U \subset \mathbb{C} \to M_N(\mathbb{C})$ and the nontrivial common eigenfunction $\psi : U \times V \subset \mathbb{C}^2 \to M_N(\mathbb{C})$ are compatible sized meromorphic matrix-valued functions defined in suitable open subsets $U, V \subset \mathbb{C}$. A triplet (L, ψ, B) satisfying (1) is called a bispectral triplet.

The study of the structure of the algebra of possible $\theta(x)$ going with a fixed bispectral $\psi(x, z)$ was analyzed in (2; 7). See also (13). We consider now the examples and conjectures given in (1) as well as their validation and further description given in (8) and (9).

References

[1] Grünbaum, F. A. (2014). Some noncommutative matrix algebras arising in the bispectral problem. *SIGMA, Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.* 10:paper 078, 9.

[2] Grünbaum, F. A., Tirao, J. (2007). The algebra of differential operators associated to a weight matrix. *Integral Equations Oper. Theory.* 58(4):449–475.

[3] Slepian, D. (1964). Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty. IV: Extensions to many dimensions; generalized prolate spheroidal functions. *Bell Syst. Tech. J.* 43:3009–3057.

[4] Slepian, D. S. (1976). On bandwidth. *Proceedings of the IEEE.* 64:292–300.

[5] Slepian, D. (1978). Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis, and uncertainty - V: The discrete case. *Bell Syst. Tech. J.* 57:1371–1430.

[6] Slepian, D. (1983). Some comments on Fourier analysis, uncertainty and modeling. *SIAM Review.* 25(3):379–393.

[7] Tirao, J. (2011). The algebra of differential operators associated to a weight matrix: a first example. *Groups, algebras and applications. XVIII Latin American algebra colloquium, Proceedings.* 291–324. American Mathematical Society (AMS), Providence, RI.

[8] Vasquez Campos, B. D., Zubelli, J. P. (2022a). Matrix bispectrality of full rank one algebras. *Physica D.* 438:23. Id/No 133358.

[9] Vasquez Campos, B. D., Zubelli, J. P. (2022b). Noncommutative bispectral algebras and their presentations. *Symmetry.* 14(10).

[10] Zubelli, J. P. (1990). Differential equations in the spectral parameter for matrix differential operators. *Physica D: Nonlinear Phenomena.* 43(2-3):269–287.

[11] Zubelli, J. P. (1992a). On a zero curvature problem related to the ZS-AKNS operator. *J. Math. Phys.* 33(11):3666–3675.

[12] Zubelli, J. P. (1992b). Rational solutions of nonlinear evolution equations, vertex operators, and bispectrality. *J. Differ. Equations.* 97(1):71–98.

[13] Zurrián, I. (2017). The algebra of differential operators for a matrix weight: an ultraspherical example. *Int. Math. Res. Not.* 2017(8):2402–2430.

A Pushforward Structure In K-theory

Cristian Sarmiento[1]

[1] Universidad Nacional de Colombia, Bogota, Colombia

✉ cdsarmientos@unal.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Abstract. In this talk we want to present an example of a pushforward structure associated to a cohomology, which is an assignment of wrong way (a covariant sense) group homomorphisms between the cohomology groups related. This structures are of interest because it is possible to construct dualized homology theories from them. In the case of the K-theory of the C^*-algebras associated to locally compact spaces X, it is possible to define a wrong way homomorphism $f! : K^*(X) \to K^*(Y)$ to any continuous map $f : X \to Y$. The definition of this maps is constructed as a composition of some applications of the K-theory functors to homomorphisms of the C^*-algebras of some groupoids constructed from the map f. This construction is strongly dependent on the groupoid C^* algebras, which are in general non commutative algebras. We will discuss how the assignment $f!$ produces a pushforward structure associated to the cohomology K^*, and this could be used to recover the geometrical K-homology. This is a joint work with M. Velasquez and P. Carrillo Rouge.

Keywords. Groupoid, Non commutative algebra, (Co)Homology.

Given a compactly supported cohomology, a pushforward structure is an assignment $f! : H(X) \to H(Y)$ for any map $f : X \to Y$ in the base category, in such a way that it satisfy an axiomatization that led define an homology related in a geometrical way (see [1]). We define a pushforward structure over the locally compact smooth manifolds considering the cohomology the K-theory of the $C*$-algebra attached to the manofolds. We required the (noncommutative) C^* algebra of groupoids to describe our pushforward (see [3]).

Definition 1. Consider the maximal norm $||f||_{max} = \sup_\pi ||\pi(f)||_{B(\mathcal{H})}$ for $f \in C_c^\infty(\mathcal{G})$, where π is any representation in a Hilbert space $\pi : C_c^\infty(\mathcal{G}) \to B(\mathcal{H})$ and define $C^*(\mathcal{G} \rightrightarrows \mathcal{G}^0) := \overline{C_c^\infty(\mathcal{G})}_{||\cdot||_{max}}$.

The product that we will consider is given by convolution: if $f, g \in C^*(\mathcal{G} \rightrightarrows \mathcal{G}^0)$, then $f * g \in C^*(\mathcal{G} \rightrightarrows \mathcal{G}^0)$ with

$$(f * g)(\gamma) := \int_{\gamma_1 \circ \gamma_2 = \gamma} f(\gamma_1) g(\gamma_2) d\mu = \int_{\gamma_2 \in \mathcal{G}_{s(\gamma)}} f(\gamma \circ \gamma_2^{-1}) g(\gamma_2) d\mu.$$

An important fact to construct our pushforward is that there exist isomorphisms related to the K-theory of evaluations (restrictions) in groupoid C^* algebras of a particular class of deformations as follows

Definition 2. Given an embedding $j : M \to P$, the deformation to the normal cone is given by the manifold $DNC(P, M, j) = N(P, M) \sqcup P \times (0, 1]$.

This deformation defines a functor in such a way that when it is applied to a groupoid, a groupoid structure is recovered. In this way, for a map $f : M \to N$ we define the pushforward $f!$ as the composition

$$K^*(M) \xrightarrow{Th} K^*(N_f) \xrightarrow{ev_0^{-1}} K^*(D_f) \xrightarrow{ev_1} K^*(M^2 \times N) \xrightarrow{Mor} K^*(N)$$

In this talk we will present in a kind way the involved functor, groupoid, and deformed notions that are related, and we will give details on how the algebraic properties of the K-theory let that this pushforward assignment determines a pushforward structure (see [2]).

References

[1] Baum, P., Higson, N. and Schick, T. (2007). On the equivalence of geometric and analytic K-homology, arXiv:0701484.

[2] Carrillo, P. and Karegar Q. (2026). Gysin maps and wrong way functoriality via geometric deformation groupoids, arXiv:2605.03584.

[3] Williams, D. P. (2019). A Tool Kit for Groupoid C-Algebras (Vol. 241). American Mathematical Soc..

N-matrices y operaciones asociadas a Hiper-grafos

David Santiago Cuartas Gómez[1], Ivon Andrea Dorado Correa[1]

[1] Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia
Semillero de representaciones de estructuras algebraicas REAl.
✉ dcuartas@unal.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Abstract. Ponencia referente a mi actual trabajo de grado de maestría. Una N-matriz vista como un arreglo multi índice sobre el campo $\mathbb{F}$ se puede asociar a una hiper-arista dentro de un hiper-grafo dirigido. Así, se definen 3 operaciones fundamentales entre hiper-aristas determinadas por un único vértice compartido. Mediante estas y determinadas por la forma del hiper-grafo, se hace una correspondencia a las N-matrices que induce operaciones entre ellas. Las operaciones más relevantes que se definen son n-arias con $n \neq 2$.
En particular considerando los hiper-grafos 3-uniformes conectados se llega a una gran cantidad de operaciones cerradas de aridad 3 entre matrices de dimensión 3, operaciones hasta donde sabemos la gran mayoría nuevas y además exploradas desde el punto de vista de los hiper-grafos. La existencia de propiedades de "identidad" con el fin de dejar fija una de las 3 matrices son una herramienta adicional para el estudio de estas operaciones de alta aridad.

Keywords. Hiper-grafo, hiper-arista, N-matriz, alta aridad.

Sea V un conjunto de vértices, una hiper-arista dirigida es una n-tupla ordenada o un elemento de V^n, en este sentido existe un orden de los vértices dentro de cada hiper-arista. Entonces, un hiper-grafo dirigido es (V, E), donde E es también una tupla $(e_1, \ldots, e_k)$ donde cada entrada es una hiper-arista, en este sentido también existe un orden entre hiper-aristas dentro de E.

Sea A una n-matriz vista como un arreglo multi-indice de la forma $[a_{i_1,i_2,\ldots,i_n}]$ donde $i_j \in I_j = \{1, \ldots, N_n\}$, recordando $(N_1, \ldots, N_n)$ como el tamaño de la n-matriz, A resulta ser un elemento del conjunto $\mathbb{F}^{N_1 \times \cdots \times N_n} = \mathbb{F}^{N_1} \times \cdots \times \mathbb{F}^{N_n}$.

Definición 1. Sea H un hiper-grafo dirigido $(V, E = (e_1, \ldots, e_n))$ y un campo $\mathbb{F}$, a cada vértice $v_j^i \in V$ se le hace corresponder el espacio vectorial

$$v_j^i \approx \mathbb{F}^{N_j^i},$$

donde $N_j^i \in \mathbb{N}$, ademas a cada hiper-arista e_i se le hace corresponder una ℓ_i-matriz,

$$A_j \approx e_j \qquad A_j = [a_{i_1,\ldots,i_{\ell_j}}]$$

con tamaño

$$(N_1^i, N_2^i, \ldots, N_{\ell_i}^i),$$

donde $i_r \in \{1, \ldots, N_r^i\}$.

Entonces, se dice que la colección $A = (A_1, \ldots, A_n)$ es una **representación** de H.

Se definen 3 operaciones entre hiper-aristas llamadas incidencia Γ, contracción Ω y la operación $\circledast$ determinadas por un único vértice compartido. También se definen estas operaciones sobre N-matrices. Al asociar una representación a un hiper-grafo, si se realiza alguna operación sobre algunas hiper-aristas

y a su vez sobre las N-matrices asociadas, la N-matriz resultante es una representación de la hiper-arista obtenida.

Las propiedades que se demuestran para la composición de estas operaciones, nos permiten plantear el siguiente procedimiento, para obtener operaciones entre N-matrices inducidas por la forma del hiper-grafo (V, E) y un subconjunto V' de vértices.

- Primero, realizar la operación $\circledast$ sobre todas las N-matrices.
- Segundo, una serie de incidencias sobre todos los vértices compartidos por las hiper-aristas.
- Por ultimo, una serie de contracciones sobre los vértices en $V - V'$.

En particular considerando los hiper-grafos 3-uniformes conectados, se describen en totalidad todas las operaciones ternarias cerradas entre matrices de dimensión inducidas por estos hiper-grafos, operaciones hasta donde sabemos la gran mayoría nuevas y además exploradas desde el punto de vista de los hiper-grafos. Algunas de estas están descritas en [1].

La existencia de propiedades de "identidad" con el fin de dejar fija una de las 3 matrices son una herramienta adicional para el estudio de estas operaciones de alta aridad.

References

[1] Zapata-Carratala, C., Arsiwalla, X. (2022). An Invitation to Higher Arity Science. arXiv:2201.09738. DOI: 10.48550/arXiv.2201.09738.

Relaciones entre funciones Dynkin y configuraciones de Brauer

Miguel Kratzer[1], Verónica Cifuentes[1]

[1] Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia

✉ mkratzerg@udistrital.edu.co, vcifuentesv@udistrital.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. Las funciones Dynkin asignan sucesiones e invariantes numéricos enteros a cada diagrama de la clasificación de Killing-Cartan: $\mathbb{A}_n$, $\mathbb{B}_n$, $\mathbb{C}_n$, $\mathbb{D}_n$, $\mathbb{E}_6$, $\mathbb{E}_7$, $\mathbb{E}_8$, $\mathbb{F}_4$ y $\mathbb{G}_2$. Entre estos invariantes se destacan el número de Coxeter h y el orden del grupo de Weyl $|W|$, cuyos valores, expresados como descomposiciones en factores primos, exhiben una regularidad aritmética profunda que Ringel describió como *caídas del cielo*. En el presente trabajo se construyen álgebras de configuración de Brauer a partir de dichas funciones Dynkin. A cada configuración Γ se le asocia un carcaj Q_Γ y un álgebra cociente $\Lambda_\Gamma = \mathbb{K}Q_\Gamma/I_\Gamma$, con el propósito de estudiar tres propiedades estructurales: la conexidad del carcaj Q_Γ, la dimensión de Λ_Γ y la dimensión de su centro $Z(\Lambda_\Gamma)$. Los resultados muestran que la aritmética prima de los invariantes h y $|W|$ determina de manera precisa la arquitectura algebraica de las álgebras inducidas.

Palabras claves. Álgebras de configuración de Brauer, configuraciones de Brauer, Funciones Dynkin, grupos de Coxeter , grupos de Weyl.

En matemáticas, la teoría de álgebras de dimensión finita constituye uno de los pilares para el estudio de la estructura y la representación de objetos algebraicos complejos. De esta forma, la interacción entre la combinatoria y el álgebra ha demostrado ser muy provechoso: datos discretos y combinatorios que permiten codificar la arquitectura interna de objetos, sus propiedades, invariantes y la organización de estructuras subyacentes. Bajo esta perspectiva, los invariantes numéricos de la teoría de Lie, asociados a los grupos de Weyl y a los sistemas de raíces desde los trabajos de Cartan y Coxeter, actúan como descriptores que condensan propiedades profundas en un único números entero y sucesiones de enteros.

Las funciones Dynkin, formalizadas por Ringel en [1], representan una intersección clave en este diálogo entre lo combinatorio y lo algebraico. Una función Dynkin es una regla que asigna un valor entero a cada uno de los diagramas de la clasificación de Killing-Cartan —las familias $\mathbb{A}_n$, $\mathbb{B}_n$, $\mathbb{C}_n$, $\mathbb{D}_n$ y los tipos excepcionales $\mathbb{E}_6$, $\mathbb{E}_7$, $\mathbb{E}_8$, $\mathbb{F}_4$, $\mathbb{G}_2$— de manera que dicho número condense propiedades globales de objetos en categorías de módulos, como módulos de inclinación o sucesiones excepcionales [1]. Lo notable de este fenómeno es que los valores resultantes exhiben descomposiciones primas que obedecen a regularidades que el propio Ringel describió como *caídas del cielo*: su precisión aritmética parece reflejar un orden estructural cuya explicación aún no es completamente comprendida, lo que motiva activamente investigaciones como la presente.

Dentro del amplio espectro de las funciones Dynkin, dos invariantes ostentan la mayor relevancia histórica y estructural: el número de Coxeter h y el orden del grupo de Weyl $|W|$ [3]. Derivados de la teoría de grupos de reflexión finitos, estos valores sintetizan propiedades algebraicas complejas en un único entero: h cuantifica el orden de los elementos de Coxeter —transformaciones fundamentales del sistema de raíces—, mientras que $|W|$ mide la totalidad de las simetrías del sistema [4]. En el presente trabajo, estos valores no se tratan como meros datos aritméticos, sino como la información mínima necesaria para reconstruir algebraicamente la arquitectura interna del sistema que los genera. Este cambio de perspectiva es el punto de partida de nuestra construcción.

La herramienta central de este trabajo son las álgebras de configuración de Brauer, introducidas por Green y Schroll en [2] como generalización de las álgebras de grafos de Brauer. Una configuración de Brauer Γ consiste en un conjunto de vértices, un multiconjunto de polígonos cuyos lados son vértices, una función de multiplicidad y una orientación cíclica local. A partir de Γ se construye de forma canónica un carcaj con relaciones (Q_Γ, I_Γ), y el álgebra cociente resultante $\Lambda_\Gamma = \mathbb{K}Q_\Gamma/I_\Gamma$ hereda propiedades estructurales directamente codificadas en la combinatoria de Γ. Esta familia de álgebras ha mostrado ser extraordinariamente versátil: en [5] se emplearon para construir álgebras de Brauer inducidas por particiones de enteros en el contexto de recubrimientos ramificados.

Este estudio se centra en tres propiedades estructurales de las álgebras Λ_Γ obtenidas. En primer lugar, la *conexidad* del carcaj Q_Γ, que determina si el álgebra es indescomponible como módulo sobre sí misma y que resulta estar controlada por su factorización prima. En segundo lugar, la *dimensión* de Λ_Γ, que puede calcularse explícitamente a partir de las multiplicidades y la estructura de los polígonos de la configuración, de acuerdo con las fórmulas establecidas en [2, 6]. En tercer lugar, la *dimensión del centro* $Z(\Lambda_\Gamma)$ [7], permite detectar propiedades homológicas finas del álgebra. Los resultados obtenidos para los nueve tipos de diagramas Dynkin muestran patrones regulares y coherentes: la aritmética de h y $|W|$, lejos de ser accidental, determina de manera precisa la complejidad algebraica de las álgebras inducidas, ofreciendo así una explicación —al menos parcial— de las regularidades que Ringel señaló en [1].

Referencias

[1] C. M. Ringel. The Catalan combinatorics of the hereditary artin algebras. *Contemporary Mathematics; Recent Developments in Representation Theory*, 673:51–177, 2016. https://doi.org/10.1090/conm/673.

[2] E. L. Green and S. Schroll. Brauer configuration algebras: A generalization of Brauer graph algebras. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 141(6):539–572, 2017. https://doi.org/10.1016/j.bulsci.2017.06.001.

[3] J. E. Humphreys. *Reflection Groups and Coxeter Groups*. Cambridge University Press, 1990. https://doi.org/10.1017/cbo9780511623646.

[4] R. W. Carter. *Lie Algebras of Finite and Affine Type*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2005.

[5] A. M. Cañadas, J. G. Rodríguez-Nieto, and O. P. S. Díaz. Brauer configuration algebras induced by integer partitions and their applications in the theory of branched coverings. *Mathematics*, 12(22):3626, 2024. https://doi.org/10.3390/math12223626.

[6] R. P. Stanley. *Enumerative Combinatorics*, Vol. 2. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1999.

[7] A. C. Sierra. The dimension of the center of a Brauer configuration algebra. *Journal of Algebra*, 510:289–318, 2018. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2018.06.002.

Estructura Exacta en Complejos de Cocadenas sobre un Endofuntor

Felipe Gallego-Olaya[1], Germán Benítez[2], Pedro Rizzo[1]

[1] Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia

[2] Universidade Federal do Amazonas, Manaus, Brazil

✉ cristianf.gallego@udea.edu.co, gabm@ufam.edu.br, pedro.hernandez@udea.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026

San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. Recientemente en [2], G. Benítez y P. Rizzo introdujeron la categoría $\mathfrak{L}_F(\mathcal{C})$ asociada a un endofuntor F sobre una categoría aditiva $\mathcal{C}$, proporcionando un marco unificado para estructuras tales como los objetos graduados, las categorías de complejos o los módulos sobre el álgebra repetitiva. Motivados por estas generalizaciones y siguiendo las ideas desarrolladas por R. Bautista, M.J.S Salorio y R. Zuazua en [1] para categorías de complejos, en esta charla presentaremos la construcción de una estructura exacta sobre $\mathfrak{L}_F(\mathcal{C})$ en el sentido de D. Quillen [4] o equivalentemente en el sentido de P. Gabriel y A. Roiter [3]. Así mismo, demostraremos que si F preserva epimorfismos, se obtiene una categoría exacta $(\mathfrak{L}_F(\mathcal{C}), \mathcal{E})$ cuyos pares exactos están determinados por secuencias localmente escindidas. Esto nos permitirá, mediante el uso de un par adjunto de endofuntores y la propiedad universal de la counidad, construir objetos $\mathcal{E}$-proyectivos y $\mathcal{E}$-inyectivos en $\mathfrak{L}_F(\mathcal{C})$, probando que ambas clases coinciden. Finalmente, mostraremos que $(\mathfrak{L}_F(\mathcal{C}), \mathcal{E})$ constituye una categoría de Frobenius, proporcionando así una estructura homológica adecuada para futuros estudios de la teoría de Auslander–Reiten en este contexto.

Palabras claves. Complejos sobre un endofunctor; estructuras exactas; $\mathcal{E}$-Frobenius.

Referencias

[1] Bautista, R., Salorio, M. J. S., Zuazua, R. (2005). Almost split sequences for complexes of fixed size. *J. Algebra.* 287(1): 140–168. DOI: 10.1016/j.jalgebra.2005.01.032.

[2] Benítez, G., Rizzo, P. (2024). Cochain complexes over a functor, 27 pp. arXiv: 2403.18834.

[3] Gabriel, P., Roiter, A. V. (1997). Representations of finite-dimensional algebras. *Encyclopaedia Math. Sci.* 73. Springer-Verlag, Berlin.

[4] Quillen, D. (1973). Higher algebraic K-theory I. *Lecture Notes Math.* 341: 85–147. DOI: 10.1007/BFb0067053.

Inmersión canónica de semigrupos numéricos en semigrupos casi-simétricos con el mismo número de Frobenius

Olmer Folleco Solarte[1]

[1] Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales, Colombia

✉ ofollecos@unal.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. Sea S un semigrupo numérico con número de Frobenius g. Demostramos que todo semigrupo numérico puede ser inmerso canónicamente en un semigrupo casi-simétrico con el mismo número de Frobenius. La construcción es algorítmica: partiendo de S, se agregan iterativamente subconjuntos del conjunto de huecos de segundo tipo $L_2(S)$ para producir una cadena $S = S_0 \subseteq S_1 \subseteq \cdots \subseteq S_k$ donde S_k es casi-simétrico y todos los semigrupos comparten el número de Frobenius g. Esto generaliza un resultado de Estrada–Morales–Soler sobre inmersiones en semigrupos simétricos o seudosimétricos, eliminando la restricción de que el semigrupo inicial sea casi-simétrico. Se ilustra la construcción con ejemplos y se presentan observaciones computacionales sobre la distribución de semigrupos casi-simétricos con número de Frobenius fijo.

Palabras claves. semigrupo numérico, semigrupo casi-simétrico, número de Frobenius, anillo de Gorenstein, inmersión canónica.

Introducción

Un *semigrupo numérico* S es un submonoide cofinito de $(\mathbb{N}, +)$. El *número de Frobenius* $g(S)$ es el mayor entero que no pertenece a S. Por el teorema de Kunz [4], el anillo semigrupal $k[S]$ es Gorenstein si y solo si S es simétrico. La clase más amplia de semigrupos *casi-simétricos* corresponde exactamente a los anillos *casi-Gorenstein* en el sentido de Barucci–Fröberg [1].

Preliminares

Para un semigrupo numérico S con número de Frobenius g, definimos:

$$H(S) = \{g - x \mid x \in S,\, x > 0\}, \quad L(S) = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \notin S \text{ y } g - x \notin S\},$$

$$T(S) = \{z \in \mathbb{Z} \setminus S \mid z + \mathcal{M}(S) \subseteq \mathcal{M}(S)\},$$

donde $\mathcal{M}(S) = S \setminus \{0\}$. El *tipo* de S es $t(S) = |T(S)|$.

Definición 1. S se llama *casi-simétrico* si $T(S) = \{g\} \cup L(S)$. Los semigrupos simétricos ($L(S) = \emptyset$) y seudosimétricos ($L(S) = \{g/2\}$) son casos particulares de tipo 1 y tipo 2, respectivamente.

Denotamos por $\mathcal{A}_g$ el conjunto de todos los semigrupos numéricos con número de Frobenius g. Escribimos $L_2(S) = \{x \in L(S) \mid x > g/2\}$.

Resultado principal

Definición 2. Un subconjunto $\varphi \subseteq L_2(S)$ se llama *conveniente para* S si consiste en r enteros consecutivos con mayor elemento el máximo de $L(S)$.

Lema 3 ([3]). *Si $S \in \mathcal{A}_g$ y $\varphi \subseteq L_2(S)$ es conveniente, entonces $S \cup \varphi \in \mathcal{A}_g$.*

Corolario 4 ([2]). *Para todo $S \in \mathcal{A}_g$, el semigrupo $S \cup L_2(S)$ es simétrico o seudosimétrico y pertenece a $\mathcal{A}_g$.*

Lema 5 ([3]). *Sea $\varphi' \subseteq L_2(S)$ y $S' = \langle S \cup \varphi' \rangle$. Entonces $S' \in \mathcal{A}_g$, y además $L(S') \subseteq L(S)$, $T(S') \subseteq T(S)$ y $L(S') \subseteq T(S)$.*

Teorema 6 (Resultado principal, [3]). *Para todo $S \in \mathcal{A}_g$ existe un semigrupo casi-simétrico $S' \in \mathcal{A}_g$ con $S \subseteq S'$. Se construye la cadena $S = S_0 \subseteq S_1 \subseteq \cdots \subseteq S_k$ definiendo $S_{i+1} = \langle S_i \cup \varphi_{i+1} \rangle$ con $\varphi_{i+1} = \{x \in L_2(S_i) \mid x \notin T(S_i) \text{ o } g - x \notin T(S_i)\}$. El proceso termina en finitely many pasos pues $|L_2(S)| < \infty$, y el Lema 5 garantiza $S_k \in \mathcal{A}_g$ con $L(S_k) \subseteq T(S_k)$, es decir, S_k es casi-simétrico.*

Observación 7. El Corolario 4 es el caso extremo: tomar $\varphi = L_2(S)$ produce un semigrupo simétrico o seudosimétrico (máximos de $\mathcal{A}_g$). El Teorema 6 es estrictamente más general: parte de cualquier $S \in \mathcal{A}_g$ y puede producir semigrupos casi-simétricos que *no* son simétricos ni seudosimétricos.

Ejemplos

Ejemplo 1 (una iteración). $S = \{0, 11, 14, 17, 20, 22, 23, 25, 26, \ldots\}$, $g = 24$. Se tiene $\varphi_1 = \{16, 19\}$ y $S_1 = \{0, 11, 14, 16, 17, 19, 20, 22, 23, 25, \ldots\}$. Como $T(S_1) = \{g\} \cup L(S_1)$, S_1 es casi-simétrico de tipo 8, sin ser simétrico ni seudosimétrico.

Ejemplo 2 (dos iteraciones). $S = \{0, 11, 15, 19, 22, 23, 26, 27, \ldots\}$, $g = 25$. La primera iteración produce S_1 con $L(S_1) = \{4, 8, 17, 21\} \not\subseteq T(S_1)$. La segunda iteración da S_2 con $L(S_2) = \emptyset$, es decir, S_2 es simétrico.

Observaciones sobre $\mathcal{A}_g$

Sea $C(g)$ el número de semigrupos casi-simétricos con número de Frobenius g. Los datos computacionales muestran que $C(g)$ es mayor para g impar (por ejemplo, $C(7) = 7$, $C(9) = 11$, $C(11) = 20$, $C(13) = 32$, $C(25) = 494$) y sugieren la conjetura: $\lim_{g\to\infty} \frac{C(g-2)+C(g)}{C(g+2)} = 1$, es decir, $C(g)$ crece asintóticamente como la sucesión de Fibonacci.

References

[1] Barucci, V., Fröberg, R. (1993). One-dimensional almost Gorenstein rings. *Reporte, Universidad de Estocolmo.*

[2] Estrada, M., Morales, M., Soler, E. (1999). Some remarks on almost symmetric semigroups. *Reporte ICIMAF 99-81.*

[3] Folleco Solarte, O. (2006). Álgebras monomiales, anillos Gorenstein y semigrupos numéricos. Proyecto de investigación, Maestría en Matemáticas, Universidad de Antioquia, Colombia.

[4] Kunz, E. (1974). Almost complete intersections are not Gorenstein rings. *J. Algebra.* 28(1): 111–115.

Gavillas y Pregavillas en Categorías Reflexivas

Julio César Hernández Arzusa

Universidad de Cartagena, Cartagena, Colombia
✉ jhernandeza2@unicartagena.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. En esta charla se estudia la relación entre la teoría de haces y las subcategorías reflectivas desde una perspectiva categórica. La teoría de haces proporciona un marco para reconstruir estructuras globales a partir de información local compatible, y en este trabajo se desarrolla una realización explícita de la gavificación mediante productos, colímites y subobjetos, destacando su comportamiento en contextos algebraicos y topológico-algebraicos. Asimismo, se demuestra que, si $\mathcal{C}$ es una subcategoría reflectiva de una categoría $\mathcal{A}$, entonces la categoría de prehaces $\mathrm{Psh}(X,\mathcal{C})$ es reflectiva en $\mathrm{Psh}(X,\mathcal{A})$. También se estudia la interacción entre los procesos de reflexión y gavificación, obteniendo condiciones naturales bajo las cuales ambas construcciones resultan naturalmente isomorfas. Estos resultados permiten extender técnicas categóricas clásicas a categorías de grupos topológicos, semigrupos topológicos y espacios compactos de Hausdorff, entre otras estructuras de interés[a].

[a]Esta charla es producto del trabajo de grado de Samir Castro Rivero, codirigido con Hernán Giraldo

Palabras claves. gavillas, pregavillas, reflexión, subcategoría reflectiva, grupo topológico.

Referencias

[1] Agore, A. *A First Course in Category Theory*. Springer, 2023.

[2] Barbosa, R. S., and Heunen, C. Sheaf representation of monoidal categories. *Advances in Mathematics* 416 (2023), 108900.

[3] Barnes, D., and Sugrue, D. Equivariant sheaves for profinite groups. *Topology and its Applications* 319 (2022), 108215.

[4] Bunk, S. Homotopy sheaves on generalised spaces. *Applied Categorical Structures* 31, 6 (2023), 49.

[5] Castillo, A. C., and Hernández Arzusa, J. C. El dual de la reflexión de un grupo topológico. *Revista Integración, Temas de Matemáticas* 39, 1 (2021), 23–40.

[6] Cortés-Izurdiaga, M., Crivei, S., and Saorín, M. Reflective and coreflective subcategories. *Journal of Pure and Applied Algebra* 227, 5 (2023), 107267.

[7] Engelking, R. *General Topology*, Vol. 60. PWN, Warszawa, 1977.

[8] Godement, R. *Topologie Algébrique et Théorie des Faisceaux*. Hermann, Paris, 3rd revised edition, 1973.

[9] Goodbody, I. Approximable triangulated categories and reflexive DG-categories I. *Applied Categorical Structures* 34, 3 (2026), 19.

[10] Gray, J. Sheaves with values in a category. *Topology* 3 (1965), 1–18.

[11] Hernández Arzusa, J. C. *Una Introducción a Grupos y Semigrupos Topológicos*. Universidad de Cartagena, 2023.

[12] Hernández Arzusa, J. C., and Hofmann, K. H. A note on locally compact subsemigroups of compact groups. In *Semigroup Forum*, Vol. 103, 2021, pp. 291–294.

[13] Hernández-Arzusa, J., and Hernández, S. Reflections in topological algebraic structures. *Topology and its Applications* 281 (2020), 107204.

[14] Hernández Arzusa, J. C. The group of characters of a pseudocompact locally compact semitopological semigroup. *Applied General Topology* 26, 2 (2025), 681–689.

[15] Hušek, M., and De Vries, J. Preservation of products by functors close to reflectors. *Topology and its Applications* 27, 2 (1987), 171–189.

[16] Kashiwara, M., and Schapira, P. *Categories and Sheaves*. Springer, 2006.

[17] Mac Lane, S., and Moerdijk, I. *Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory*. Springer, 2012.

[18] Tennison, B. R. *Sheaf Theory*. Cambridge University Press, 1975.

[19] Tkachenko, M. Axioms of separation in semitopological groups and related functors. *Topology and its Applications* 161 (2014), 364–376.

Funciones continuas como herramienta para caracterizar espacios y estructuras algebraico-topológicas

Julio César Hernández Arzusa[1], Heidy Lorena Gonzalez Manjarres[1]

[1]Universidad de Cartagena, Cartagena, Colombia

✉ jhernandeza2@unicartagena.edu.co, hgonzalezm3@unicartagena.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. Las funciones continuas constituyen una herramienta fundamental para estudiar espacios topológicos. En esta exposición se analiza el espacio C(X) de funciones continuas y se muestra cómo sus propiedades algebraicas y analíticas permiten obtener información sobre el espacio donde están definidas. En particular, se presentan los teoremas de Banach–Stone y Gelfand–Kolmogorov, que establecen que, bajo ciertas condiciones, la estructura de C(X) determina completamente la topología de un espacio compacto. También se discuten resultados relacionados con grupos topológicos compactos y la manera en que sus características pueden describirse mediante álgebras de funciones continuas. Finalmente, se estudian acciones continuas de semigrupos topológicos y la acción inducida sobre C(X). En conjunto, estos resultados evidencian la estrecha relación entre topología, álgebra y análisis funcional, y muestran el papel central de las funciones continuas en la comprensión de estructuras algebraico-topológicas.

Palabras claves. Funciones continuas; espacios compactos; espacios de Banach; álgebras de funciones; teorema de Banach–Stone; teorema de Gelfand–Kolmogorov; grupos topológicos; semigrupos topológicos; acciones continuas.

Referencias

[1] Banach, S. (1932). *Théorie des opérations linéaires*. integral equations, etc., Hafner Publishing Company, 170.

[2] Deshpande, M., Ghorpade, S. (1991). *Algebraic characterization of compact Abelian groups*. Amer. Math. Monthly 98, 235–237.

[3] Gelfand, I., Kolmogoroff, A. (1939). *On Rings of Continuous Functions on Topological Spaces*. The Mathematical Legacy of Eduard Čech. Katětov, Miroslav and Simon, Petr, 62–66.

[4] Gillman, L., Jerison, M. (1960). *Rings of Continuous Functions*. Van Nostrand.

[5] Semadeni, Z. (1971). *Banach spaces of continuous functions* (Vol. 1). PWN Polish Scientific Publishers.

Pósteres Álgebra

Comité Científico: Paula Cadavid (Universidade Federal Rural de Pernambuco, Brasil), German Benítez (Universidade Federal do Paraná, Brasil), Alexander Holguín Villa (Universidad Industrial de Santander, Colombia).

- ⋆ **Curvas de dragón revisitadas**, Alejandro Manrique Roca, Pontificia Universidad Javeriana, Juan Esteban Huertas Serrano, Universidad Nacional de Colombia, Colombia.
- ⋆ **La homología como funtor: una perspectiva categórica de los axiomas de Eilenberg-Steenrod**, Juan Pablo Ramírez Castrillón, Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales, Colombia.
- ⋆ **Caracterización algebraica de los anillos de Schur**, Andrés Javier Sepúlveda Vesga, Universidad Industrial de Santander, Colombia.
- ⋆ **Cuerpos de géneros de extensiones de Kummer**, Alexandra Albarracín Mantilla, Edwin José Ávila Landazabal, Universidad Industrial de Santander, Colombia.
- ⋆ **Construcciones densas de conjuntos Sidon en grupos finitos**, Daniel Esteban Vega Florez, Universidad del Cauca, Colombia.
- ⋆ **El efecto Mateo en redes de citación: un análisis mediante álgebras de configuración de Brauer**, Juan David Gaitán Zamudio, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia.
- ⋆ **Estudio categórico de pares de relaciones lineales**, Santiago Gallego Hurtado, Universidad Nacional de Colombia sede Manizales - Semillero REAl, Colombia.
- ⋆ **Un enfoque matricial para la clasificación de las representaciones indescomponibles para un conjunto ordenado de tipo manso**, Juan Buitrago, Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales, Semillero REAl, Colombia.
- ⋆ **Una componente preproyectiva para una categoría de Krull-Schmidt apropiada**, Estefania Alzate Rincón, Universidad Nacional de Colombia, Semillero REAl, Colombia.
- ⋆ **Subgrupos normales en grupos metacíclicos finitos**, Diego Diaz, Jhon Chamorro, Wilson Mutis, Universidad de Nariño, Colombia.
- ⋆ **La teoría de Auslander-Reiten en la caracterización de álgebras de tipo de representación finita**, Ivan David Parra Mayorga, Jhon Sebastián Rojas Valderrama, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia.
- ⋆ **Superquivers y sus representaciones**, Juan Camilo Marín Castañeda, Pedro Hernández Rizzo, Universidad de Antioquia, Colombia.
- ⋆ **Matemáticas del cubo de Rubik**, Sebastián Martinez Arcos, Wilson Mutis, Universi-

- ⋆ **Introducción al problema de representación algebraica de reticulos finitos para M_n**, Faiber Esteban Cortes Santamaria, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia.
- ⋆ **Dominios de Dedekind y la geometría de curvas algebraicas**, Juan Manuel Poloche Rios, Universidad Nacional de Colombia, Colombia.
- ⋆ **Una introducción a las representaciones matriciales en anillos de grupo**, Juan Pablo Ordoñez Agudelo, Erlinton F. Bolaños Ordoñez, John H. Castillo, Universidad de Nariño, Colombia.
- ⋆ **Complejos sobre endofuntores**, Angie Isaza Jaramillo, Universidad de Antioquia, Colombia.
- ⋆ **Estructuras algebraicas de caminos composicionales sobre hipergrafos dirigidos**, Sergio Quiroga Sandoval, Ivon Dorado, Universidad Nacional de Colombia, Colombia.
- ⋆ **Estudio algebraico de grafos a través de álgebras de evolución**, Manuela Bocanegra Quigua, Universidad de Antioquia, Colombia.

Curvas del Dragón revisitadas

Juan Esteban Huertas Serrano[1], Alejandro Manrique Roca[2]

[1] Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia
[2] Pontificia Universidad Javeriana, Bogotá, Colombia
✉ juanestebanhu@gmail.com, alejandro.manrike.roca@gmail.com

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. En la ponencia se aborda el plegado de papel y la relación con generación de fractales, revisitado desde una perspectiva categórica. Se introduce la *palabra del dragón*, una secuencia que modela la sucesión de pliegues que se generan en una tira de papel al doblarse repetidamente. A continuación, se enuncian ciertas propiedades de la *curva del dragón*, el fractal generado por dicha secuencia, como su no autointersección, semillas generadoras y la teselación del plano. Siguiendo el trabajo de Leinster [4], se introducen las nociones básicas de Teoría de Categorías para precisar el sentido en que un espacio auto-similar (como la curva del dragón) puede realizarse como una *coálgebra* que soluciona un *sistema ecuacional discreto* para un *endofuntor* en la categoría de espacios topológicos. Durante la ponencia, se emplean herramientas computacionales para visualizar el proceso que transforma la palabra del dragón en la curva del dragón, que apoyan el curso de toda la exposición.

Palabras claves. Curva del dragón, Fractal, Teoría de Categorías, Endofuntor, Palabra.

Introducción

El estudio de los fractales ha proporcionado un marco robusto para comprender estructuras complejas a partir de reglas iterativas simples. Uno de los ejemplos clave es la curva del dragón. Esta curva, investigada inicialmente por John Heighway, Bruce Banks y William Harter [3], se origina a partir de un proceso simple: el plegado sucesivo de una tira de papel por la mitad, y siempre en la misma dirección. Se explora y reinterpreta dicho proceso desde una óptica algebraica y categórica.

La Palabra del Dragón

Para visualizar la curva del dragón, se debe tomar una larga tira de papel y doblarla por la mitad tantas veces como se pueda, siempre en el mismo sentido, aplastando bien cada pliegue. Al desdoblar los segmentos forman un patrón fractal. La secuencia de pliegues "montaña" (*Up*) y "valle" (*Down*) se modela mediante el estudio de palabras sobre un alfabeto binario $\Sigma = \{U, D\}$. La denominada **palabra del dragón** (S_n) se define a través de una construcción recursiva: $S_{n+1} = S_n D \overline{(S_n)^R}$. Esta representación permite generar la curva, parte de un punto y cada U gira 90° a la izquierda y cada D a la derecha.

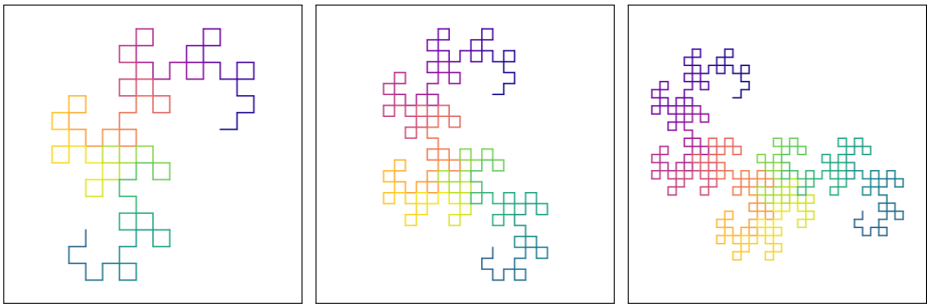
Ejemplo de construcción de la palabra del dragón

Con esta definición obtenemos las primeras palabras del dragón:

$$S_0 = D$$
$$S_1 = DD\overline{D^R} = DDU$$
$$S_2 = S_1 D \overline{S_1^R} = (DDU)D\overline{(DDU)^R} = DDUDDUU$$

A continuación se muestra un ejemplo visual del patrón de pliegues correspondiente: [1]

7 dobleces (S_7) **8 dobleces (S_8)** **9 dobleces (S_9)**



Propiedades y Características de la Curva del Dragón

Se enuncian cuatro propiedades relevantes: semillas generadoras, teselaciones del plano, no autointersección y palabra infinita de plegado.

Tratamiento categórico de la auto-similaridad

Considere la categoría Top de espacios topológicos. Con las herramientas categóricas, se define la *coálgebra* asociada a un endofuntor G: un par (X, ξ) donde X es un espacio y $\xi : X \to G(X)$ es una función continua. El *Lema de Lambek* garantiza la existencia de una *coálgebra terminal*, cuyo mapa de estructura ξ es un homeomorfismo, evidenciando la autosimilaridad del espacio como $X \cong G(X)$. En el caso de la Curva del Dragón, se considera un *sistema ecuacional discreto* (la categorificación de la idea de sistema de ecuaciones) en Top, cuya solución universal es el intervalo $[0, 1]$ (por el Teorema de Freyd). Se muestra que la curva del dragón D, vista como espacio topológico, admite una estructura de coálgebra, compatible con su descomposición autosimilar, precisando así el sentido en que D es una realización de dicha solución universal.

Referencias

[1] Chang, A., & Zhang, T. (1999-2000). The Fractal Geometry of the Boundary of Dragon Curves. *Journal of Recreational Mathematics*, 30(1), 9–22.

[2] Gamboa Higuera, D. F. (2020). Sobre la curva del dragón [Trabajo de grado, Universidad Industrial de Santander]. Repositorio Institucional UIS.

[3] Davis, C., & Knuth, D. E. (1970). Number Representations and Dragon Curves. *Journal of Recreational Mathematics*, 3, 66–81.

[4] Leinster, T. (2011). A general theory of self-similarity. *Advances in Mathematics*, 226(4), 2935–3017. DOI: 10.1016/j.aim.2010.10.009

[1] Código y visualizaciones (software propio) en repositorio. Fundamental para reproducibilidad

La homología como funtor: una perspectiva categórica de los axiomas de Eilenberg–Steenrod

Juan Pablo Ramírez Castrillón

Universidad Nacional de Colombia, Manizales, Colombia
✉ jramirezcas@unal.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. Este póster presenta una visión axiomática y categórica de la homología a través de los axiomas de Eilenberg–Steenrod. El objetivo principal es mostrar cómo la topología algebraica puede entenderse como un proceso de traducción functorial desde la categoría de espacios topológicos hacia categorías algebraicas, particularmente la categoría de grupos abelianos. En lugar de enfocarse en construcciones específicas, como la homología singular o simplicial, se enfatizan las propiedades abstractas que toda teoría de homología debe satisfacer.

Se analizará el papel de la functorialidad, la invariancia homotópica y las sucesiones exactas largas como estructuras algebraicas fundamentales en la formulación moderna de la topología. Los axiomas de Eilenberg–Steenrod serán interpretados desde una perspectiva categórica, destacando cómo proporcionan un marco unificador para distintas teorías de homología. Asimismo, se discutirá la importancia conceptual de la exactitud y la naturalidad en la interacción entre topología y álgebra.

La exposición busca ilustrar cómo el enfoque axiomático refleja la filosofía estructural de las matemáticas contemporáneas, donde los objetos son caracterizados mediante propiedades universales y morfismos más que por construcciones explícitas.

Palabras claves. Functorialidad, exactitud, categorías abelianas, invariancia homotópica, sucesiones exactas largas

Introducción

En la topología algebraica moderna, una de las ideas fundamentales consiste en asociar estructuras algebraicas a objetos topológicos con el fin de estudiar propiedades geométricas mediante herramientas algebraicas. Desde esta perspectiva, las teorías de homología pueden entenderse no solo como construcciones concretas, sino como funtores definidos entre categorías que satisfacen determinadas propiedades estructurales. En este trabajo se presentará una visión categórica y axiomática de la homología a partir de los axiomas de Eilenberg–Steenrod, enfatizando el papel de la teoría de categorías en la formulación moderna de la topología algebraica.

El objetivo principal del póster es interpretar la homología como un funtor covariante

$$H_n : \mathbf{Top}_2 \longrightarrow \mathbf{Ab},$$

donde $\mathbf{Top}_2$ denota la categoría de pares topológicos y $\mathbf{Ab}$ la categoría de grupos abelianos. Se resaltará cómo propiedades como la functorialidad, la invariancia homotópica y la exactitud permiten codificar información topológica de manera algebraica. En particular, se estudiará la propiedad de invariancia homotópica

$$f \simeq g \implies H_n(f) = H_n(g),$$

la cual muestra que la homología depende únicamente del tipo de homotopía del espacio.

Asimismo, se discutirá la importancia algebraica de la sucesión exacta larga asociada a un par topológico (X, A):

$$\cdots \to H_n(A) \to H_n(X) \to H_n(X, A) \to H_{n-1}(A) \to \cdots,$$

interpretándola como un mecanismo algebraico que relaciona la información homológica de un espacio con la de sus subespacios.

El póster incluirá la formulación de los axiomas de homotopía, exactitud, escisión y dimensión, junto con interpretaciones categóricas de cada uno de ellos. En particular, se analizará el axioma de dimensión

$$H_n(*) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0, \\ 0, & n > 0, \end{cases}$$

como condición de normalización de la teoría.

Además, se mencionará el teorema de unicidad de Eilenberg–Steenrod para complejos CW, el cual establece que toda teoría de homología que satisface dichos axiomas es naturalmente isomorfa a la homología singular. Esto permitirá ilustrar cómo distintas construcciones homológicas quedan unificadas dentro de un mismo marco axiomático.

Finalmente, se busca mostrar cómo el enfoque propuesto por Eilenberg y Steenrod constituye un ejemplo representativo de la filosofía estructural de las matemáticas contemporáneas, donde los objetos matemáticos son caracterizados por relaciones, propiedades universales y comportamientos functoriales más que por construcciones explícitas particulares.

Referencias

[1] Hatcher, A. (2002). *Algebraic Topology*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

[2] Munkres, J. R. (1984). *Elements of Algebraic Topology*. Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Company.

[3] Rotman, J. J. (2009). *An Introduction to Algebraic Topology*. New York, NY: Springer.

[4] Deo, S. (1975). *Algebraic Topology: A First Course*. New Delhi, India: McGraw–Hill Education.

Caracterización algebraica de los anillos de Schur

Andrés Javier Sepúlveda Vesga[1], Alexander Holguín Villa[1]

[1] Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia
Semillero de Investigación "Curvas Algebraicas y Aplicaciones".
✉ andres2230649@correo.uis.edu.co, aholguin@uis.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. Sean G un grupo multiplicativo finito, $\mathbf{F}$ un campo y $\mathbf{F}G$ su álgebra de grupo. En este póster, usando el producto de Hadamard, presentamos caracterizaciones netamente algebraicas de las subálgebras $A \subseteq \mathbf{F}G$ que son S-anillos y sus isomorfismos.
Palabras claves. Anillos de Schur; Isomorfismos; Producto de Hadamard.

Introducción

Los anillos de Schur o S-anillos son sub-estructuras algebraicas de las álgebras de grupos finitas $\mathbf{F}G$, los cuales se caracterizan por ser determinados a partir de una partición del grupo base. Estos fueron introducidos en 1933 por el matemático I. Schur [1] con la intención de estudiar grupos de permutaciones y su teoría fue principalmente desarrollada por H. Wielandt [2]. Más exactamente:

Sea $\mathbf{F}G$ la álgebra de grupo del grupo finito G sobre el campo $\mathbf{F}$. Si $C \subseteq G$, al elemento $\overline{C} = \sum_{g\in C} g \in \mathbf{F}G$ se le denomina una cantidad simple de $\mathbf{F}G$. Una subálgebra A de $\mathbf{F}G$ se le llama anillo de Schur o S-anillo, si existen subconjuntos disjuntos no-vacíos $T_1, T_2, \ldots, T_n$ de G que verifican:

1. $\overline{T}_1, \ldots, \overline{T}_n$ forman una $\mathbf{F}$-base para A,
2. Para todo i, existe algún j tal que $T_j = T_i^{(-1)} = \{t_i^{-1} : t_i \in T_i\}$,
3. $T_1 = \{e\}$ y $G = T_1 \cup T_2 \cup \cdots \cup T_n$.

A los conjuntos $T_1, T_2, \ldots, T_n$ se les denomina *conjuntos básicos* y a los respectivos elementos de $\mathbf{F}G$ $\overline{T}_1, \ldots, \overline{T}_n$, cantidades básicas. De forma similar, se define un isomorfismo entre S-anillos $\phi : A_1 \to A_2$ como un isomorfismo de $\mathbf{F}$-álgebras que envía cantidades básicas a cantidades básicas.

Dada la naturaleza combinatorial de los conjuntos básicos, se han propuesto caracterizaciones algebraicas de los S-anillos que facilitan su estudio. Con ese fin se define el producto de Hadamard "$\circ$" de la siguiente forma: para $\alpha = \sum_{g\in G} \alpha_g g, \quad \beta = \sum_{g\in G} \beta_g g \in \mathbf{F}G$, tal producto viene dado por:

$$\alpha \circ \beta = \sum_{g\in G} \alpha_g \beta_g g.$$

En este póster presentaremos las caracterizaciones de los S-anillos y sus isomorfismos utilizando este último producto.

Referencias

[1] Schur, I. (1933). *Zur Theorie der einfach transitiven Permutationsgruppen*. Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., Phys-math, pp. 598–623.

[2] Wielandt, H. (1964). *Finite permutation groups*. Academic press, Inc, pp. 340–360.

Cuerpos de géneros de extensiones de Kummer

Edwin José Avila Landazábal[1], Alexandra Albarracín Mantilla[1]

[1] Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia
Semillero de Investigación "Curvas Algebraicas y Aplicaciones"
✉ edwin2212512@correo.uis.edu.co, alealbam@uis.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. En esta charla se fijan cuerpos K, k de tal forma que se define el cuerpo de género de una extensión finita de Kummer de grado potencia de un número primo sobre un cuerpo de funciones racionales que expresan explícitamente, tanto el cuerpo de género K_* de K sobre k como el cuerpo de género de p extensiones abelianas arbitrarias. Si k es un cuerpo de números algebraicos y K su extensión normal de grado finito, entonces el cuerpo de género K_* de K sobre k se define como la extensión maximal no ramificada de K, la cual se obtiene de K vía composición con una extensión abeliana sobre k, [1]. Además, se muestra que debido a que el cuerpo de género de una composición de dos extensiones abelianas de un cuerpo de funciones racionales global es igual a la composición de sus respectivos cuerpos de género, se obtiene el género de una extensión de Kummer de un cuerpo de funciones racionales global. ver [2].

Palabras claves. Cuerpos de géneros, Cuerpos de funciones global, Extensiones de Kummer, Cuerpos de funciones ciclotómicos.

Se fija el cuerpo de funciones racionales $k = \mathbb{F}_q(T)$ donde $\mathbb{F}_q$ es un cuerpo finito con $q = p^n$ elementos y se considera una extensión finita K de k. Sean $R_T = \mathbb{F}_q[T]$ y R_T^{-1} el conjunto de elementos mónicos irreducibles de R_T. Para $N \in R_T, K(\Lambda_N)$ denota el N- ésimo cuerpo de funciones ciclotómico donde (Λ_N) es el N -ésimo módulo de torsión de Carlitz [3]. Para $D \in R_T$ se denota por $D^* := (-1)^{grad(D)}D$. Un cuerpo de funciones F es ciclotómico si existe $N \in R_T$, tal que $F \subseteq k(\Lambda_N)$. Cuando K/k es una extensión finita abeliana, por Teorema de Kronecker-Weber, existe $N \in R_T$ con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $m \in \mathbb{N}$ tal que $K \subseteq_n k(\Lambda_N)_m$, donde para cualquier cuerpo de funciones ciclotómico F, $F_m := F\mathbb{F}_{q^m}(T)$ y ${}_nF = FL_n$ con L_n el subgrupo maximal de $K(\Lambda_{1/T^n})$, donde $\mathfrak{p}_\infty$ es totalmente y salvajemente ramificado, entonces $E := K\mathcal{M} \cap k(\Lambda_N)$, con $\mathcal{M} = L_n k_m$, entonces $K_* = E_*^H K$, donde H es el grupo de descomposición de los infinitos primos en KE_*/K, [2].

El siguiente resultado caracteriza las extensiones débilmente ramificadas.

Lema de Abhyankar: Sea L/K una extensión separable del cuerpo de funciones global. Suponga que $L = K_1K_2$ con $K \subseteq K_i \subseteq L$, para $1 \leqslant i \leqslant 2$. Sea $\mathfrak{p}$ un divisor primo de K y β un divisor primo de L que cae sobre $\mathfrak{p}$. Sea $\beta_i = \beta \cap K_i$, para $i = 1, 2$. Si al menos una de las extensiones K_i/K es débilmente ramificada en $\mathfrak{p}$, entonces $e_{L/K}(\beta|\mathfrak{p}) = mcm[e_{K_1/K}(\beta_1|\mathfrak{p}), e_{K_2/K}(\beta_2|\mathfrak{p})]$, donde $e_{L/K}(\beta|\mathfrak{p})$ denota el índice de ramificación. [4]

Ahora, se definen las extensiones de cuerpos con las cuales se trabajará.

Extensiones de Kummer de grado potencia de un primo: Sean l un número primo donde $l^n|q-1$, entonces K/k es una extensión de Kummer de exponente l^n. De la teroía de Kummer se tiene que

K es la composición $K = K_1 \cdots K_s$, donde $K_1, \cdots, K_s$ son extensiones disjuntas cíclicas de Kummer. Por lo anterior,

$$K = k\left(\sqrt[l^{n_1}]{\gamma_1 D_1}, \cdots \sqrt[l^{n_s}]{\gamma_s D_s} \right) = K_1 \cdots K_s,$$

donde $K_\varepsilon = k\left(\sqrt[l^{n_\varepsilon}]{\gamma_\varepsilon D_\varepsilon} \right),\ 1 \leqslant \varepsilon \leqslant s$.

Referencias

[1] Hasse, H., (1951), Zur Geschlechhtertheorie in quadratischen Zahlkorpern, J. Math. Soc. Japan, 3, 45-51.

[2] Rzedowski-Calderón, M., Villa-Salvador, G.,(2022), Genus fields of Kummer extensions of rational functions fields, Finite Fields and Their Applications 77.

[3] Villa-Salvador, G.,(2006), Topics in the Theory of Algebraic Functions Fields, Math Teory & Applications, Boston, M.A.

[4] Stichtenoth H. (1993) , Algebraic Function Fields and Codes,Springer-Verlag, Berlin.

Construcciones densas de conjuntos Sidon en grupos finitos

Daniel Esteban Vega Florez[1], Alexis Guacheta Yandy[1],
Carlos Alberto Trujillo Solarte[1]

[1] Universidad del Cauca, Popayán, Colombia

✉ danielvega@unicauca.edu.co,alexisgy@unicauca.edu.co, trujillo@unicauca.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. Un conjunto Sidon en un grupo conmutativo (notado aditivamente) es un subconjunto A del grupo tal que todas las sumas de dos elementos en A son distintas. Si el grupo es de orden N y A tiene k elementos, decimos que A es ¨denso" si $k \approx \sqrt{N} \pm c$, c-constante. En esta ponencia presentamos cinco construcciones de conjuntos Sidon densos en sus respectivo grupo ambiente. Además, mostramos algunas observaciones y propiedades relacionadas con el origen y las versiones "modernas" de dichas construcciones.

Palabras claves. Conjuntos Sidon. Conjuntos B_2. reglas Golomb.

Un subconjunto A de G es un conjunto Sidon o conjunto B_2 (en G) si para todo $a, b, c, d \in A$

$$(a + b = c + d) \Longrightarrow \{a, b\} = \{c, d\}.$$

Es decir, las sumas con dos elementos de A, no necesariamente diferentes, son todas distintas. En el caso finito,[6], el problema más importante consiste en investigar el máximo número de elementos que puede tener un conjunto Sidon en G:

$$S(G) := \text{máx } \{|A|\colon A \text{ es Sidon en } G\}.$$

Sabemos que si G es de orden n y $k = S(G)$, entonces

$$k(k-1) \leq n - 1.$$

Estamos interesados en investigar grupos finitos en los cuales esta cota superior se alcanza. En particular, investigaremos el caso de grupos cíclicos y grupos producto.

Construcciones Clasicas.

- **Construcción 1** ([2]). Sea $\mathbb{F}_q$ el campo finito con q elementos, q impar. La "parábola"

  $$C := \{(x, x^2) : x \in \mathbb{F}_q\},$$

  es un conjunto Sidon con q elementos en el grupo $(\mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q, +)$, de orden q^2.

- **Construcción 2**.([3]), ([4]). Sea $\mathbb{F}_q$ el campo finito con q elementos. La "diagonal"sin un punto

  $$I_0 := \{(x, x) : x \in \mathbb{F}_q, x \neq 0\},$$

  es un conjunto Sidon con $q - 1$ elementos en el grupo $(\mathbb{F}_q, +) \times (\mathbb{F}_q^*, \cdot)$, de orden $q(q-1)$.

- **Construcción 3**.([5]). Sea $\mathbb{F}_q$ el campo finito con q elementos. La "diagonal"sin dos puntos

  $$C := \{(x, x-1) : x \in \mathbb{F}_q, x \neq 0, 1\},$$

  es un conjunto Sidon con $q - 2$ elementos en el grupo $(\mathbb{F}_q^*, \cdot) \times (\mathbb{F}_q^*, \cdot)$, de orden $(q-1)^2$.

- **Construcción4.**([1]),([4]). Sea $\alpha \in \mathbb{F}_{q^2}$, $\alpha \notin \mathbb{F}_q$. El conjunto

$$B(\alpha) := \alpha + \mathbb{F}_q := \{\alpha + a : a \in \mathbb{F}_q\},$$

  es un conjunto Sidon con q elementos en el grupo multiplicativo $(\mathbb{F}_q^*(\alpha), \cdot)$ de orden $q^2 - 1$.

- **Construcción 5.**([7]), ([4]) Sea $\beta \in \mathbb{F}_{q^3}$, $\beta \notin \mathbb{F}_q$, $H = (\mathbb{F}_q^*, \cdot)$, $G = (\mathbb{F}_{q^3}^*, \cdot)$; el conjunto módulo H.

$$S(\beta) := \{\overline{\beta + a} : a \in \mathbb{F}_q\} \cup \{1\},$$

  es un conjunto Sidon con $q+1$ elementos en el grupo $(G/H, \cdot)$ de orden $(q^3-1)/(q-1) = q^2+q+1$.

La tabla siguiente resume las cosntrucciones densas

Grupo	**Construcción**	$S(Grupo)$	**Atribuido a**
$(G/H, \cdot)$	$S(\beta)$	$q+1$	Singer
$(\mathbb{F}_q^*(\alpha), \cdot)$	$B(\alpha)$	q	Bose
$(\mathbb{F}_q^*, \cdot) \times (\mathbb{F}_q, +)$	$\{(x, x) : x \in \mathbb{F}_q,\ x \neq 0\}$	$q-1$	spencer $(q = p)$
$(\mathbb{F}_q, +) \times (\mathbb{F}_q, +)$	$\{(x, x^2) : x \in \mathbb{F}_q\}$	q	Erdős y Turán
$(\mathbb{F}_q^*, \cdot) \times (\mathbb{F}_q^*, \cdot)$	$\{(x, x-1) : x \in \mathbb{F}_q,\ x \neq 0, 1\}$	$q-2$	Hughes

Referencias

[1] R. C. Bose, *An affine analogue of Singer's theorem*, J. Indian Math. Soc. (N.S.) **6** (1942), 1–15.

[2] P. Erdős and P. Turán, *On a problem of Sidon in additive number theory and on some related problems*, J. London Math. Soc. (1941) s1-16 (4) 857–871.

[3] M. J. Ganley, *Direct product difference sets*, J. Combinatorial Theory Ser. A **23** (1977), No. 3, 321–332.

[4] Alexis Gómez and Carlos Trujillo, *Una nueva construcción de conjuntos B_h modulares*, Matemáticas Enseñanza Universitaria, Vol. XIX, No. 1, Junio 2011, 53–62.

[5] D. R. Hughes, *Planar divisions neo-rings*, Trans. Amer. Math. Soc. **80** (1955), 502–527.

[6] OEIS Foundation Inc., *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, https://oeis.org.

[7] James Singer, *A theorem in finite projective geometry and some applications to number theory*, Trans. Amer. Math. Soc. **43** (1938), No. 3, 377–385.

El Efecto Mateo en redes de citación: Un análisis mediante álgebras de configuración de Brauer

Juan David Gaitán Zamudio [1]

[1] Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá D.C., Colombia

✉ jdgaitanz@udistrital.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. El Efecto Mateo describe el fenómeno de ventaja acumulativa en la ciencia, donde trabajos altamente citados tienen mayor probabilidad de recibir nuevas citas. Este trabajo presenta dicho efecto desde su origen sociológico hasta su formalización matemática como apego preferencial a través de una metodología novedosa para analizar este fenómeno en una red concreta de 17 artículos mediante álgebras de configuración de Brauer. Se construye una configuración de Brauer a partir de los artículos y sus autores citados, y se calculan indicadores como la dimensión del álgebra y la entropía por autor para cuantificar la concentración del reconocimiento y la asimetría en la red de citas, proporcionando una perspectiva algebraica del Efecto Mateo.

Palabras claves. Álgebras de configuración de Brauer, Álgebra de caminos, Fenomeno Mateo, entropía, redes de citación.

Introducción

El *Efecto Mateo* es un mecanismo fundamental en la sociología de la ciencia que explica la distribución desigual del reconocimiento. Acuñado por el sociólogo Robert K. Merton en 1968 [3], toma su nombre del Evangelio de San Mateo: *"Porque a todo el que tiene, se le dará más, y tendrá en abundancia"*. Merton observó que los científicos de renombre reciben un crédito desproporcionado por contribuciones similares a las de investigadores desconocidos.

En el ámbito de las redes de citación, este principio se traduce en el proceso de **ventaja acumulativa** o **apego preferencial**: la probabilidad de que un artículo reciba una nueva cita es directamente proporcional al número de citas que ya posee. Esta dinámica genera distribuciones de citas de tipo ley de potencia, donde unos pocos artículos concentran la mayoría de las citas mientras la gran mayoría permanece en el olvido [4].

Más allá de la modelización teórica, el estudio de Larivière y Gingras (2010) [2] aportó una prueba empírica concluyente. Utilizando un *experimento natural* con pares de artículos publicados en revistas de alto y bajo factor de impacto, demostraron que los artículos en revistas de prestigio reciben en promedio el doble de citas que su contraparte idéntica, aislando así el efecto de la calidad intrínseca y revelando una ventaja acumulativa asociada al contenedor (la revista).

Para estudiar el Efecto Mateo desde una perspectiva algebraica, en este trabajo empleamos la metodología de las **álgebras de configuración de Brauer** [1]. La idea central es codificar la red de citas como una configuración de Brauer, donde los *vértices* son los autores que aparecen en las referencias y los *multiconjuntos* son los propios artículos.

Se considerarán 17 artículos como multiconjuntos $M_1, M_2, \ldots, M_{17}$ publicados por un grupo de investigación. A partir de la configuración Γ se construye el **carcaj de Brauer** $Q_{\mathfrak{m}}$, cuyo conjunto de vértices Q_0 está en biyección con los 17 artículos y cuyas flechas en Q_1 son inducidas por la secuencia de sucesores definida por una orientación O; por cada vértice v que aparece en dos artículos consecutivos, se obtiene una flecha en el carcaj. Los *ciclos especiales*, únicos salvo permutación cíclica, están determinados por las apariciones de cada autor en los distintos artículos. El **álgebra de configuración de Brauer** Λ_Γ se define entonces como el álgebra de caminos cociente

$$\Lambda_\Gamma = {}^{KQ_{\mathfrak{m}}}/_{I_\Gamma}.$$

Las álgebras de configuración de Brauer ofrecen un marco algebraico preciso y novedoso para cuantificar el Efecto Mateo en redes de citación. La valencia de un autor en la configuración es una medida directa de su acumulación de reconocimiento; la dimensión del álgebra captura la magnitud global de esa concentración; y la entropía por autor permite identificar, de forma individual, a aquellos investigadores cuyo reconocimiento está desproporcionadamente concentrado en unos pocos artículos. La aplicación de esta metodología a la red de 17 artículos citados permitirá verificar empíricamente la presencia de este fenónemo y cuantificar su intensidad desde una perspectiva algebraica.

Referencias

[1] Green, E. L., Schroll, S. (2017). *Brauer configuration algebras: A generalization of Brauer graph algebras*. Bulletin des Sciences Mathématiques, 141(6): 539–572.

[2] Larivière, V., Gingras, Y. (2010). The impact factor's Matthew effect: A natural experiment in bibliometrics. *Journal of the American Society for Information Science and Technology*, 61(2): 424–427.

[3] Merton, R. K. (1968). The Matthew effect in science. *Science*, 159(3810): 56–63.

[4] Price, D. J. de Solla (1976). A general theory of bibliometric and other cumulative advantage processes. *Journal of the American Society for Information Science*, 27(5): 292–306.

Estudio categórico de pares de relaciones lineales

Santiago Gallego Hurtado

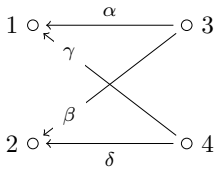
Universidad Nacional de Colombia, Manizales, Colombia
Semillero REAl
✉ sgallegohu@unal.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. Si tomamos un par de k-espacios vectoriales sobre un campo arbitrario k, podemos definir el concepto de par de relaciones lineales sobre los espacios; al considerar la colección de todos estos objetos junto a morfismos adecuados, formamos la categoría $\mathrm{lrel}_2^2(k)$. Esta categoría puede inyectarse, por medio de un funtor fiel y pleno, en la categoría de representaciones del carcaj formado por cuatro puntos separados en dos pares, con aristas de cada punto del primer par hacia cada uno de los del segundo. Esto motiva problemas de clasificacion de objetos indescomponibles, proyectivos, inyectivos y simples y otras cuestiones categóricas y homológicas.

Palabras claves. Relación lineal, Objetos indescomponibles, Objetos proyectivos, Objetos inyectivos, Categoría de Krull-Schmidt.

Las relaciones lineales fueron introducidas por MacLane en [1] bajo el nombre de «relaciones aditivas». Este concepto resulta una generalización del concepto de transformación lineal. En efecto, toda transformación k-lineal $T : V \to W$ se puede ver como una tripla $(V, W; T)$ en donde $T \subseteq V \oplus W$ resulta un subespacio lineal en virtud de la linealidad de T. Sin embargo, existen objetos de la forma $(V, W; R)$ en donde $R \subseteq V \oplus W$ resulta un subespacio lineal que no proviene de una transformación k-lineal. En [4], Towber estudió la categoría asociada a una relación lineal y dio la clasificación de los objetos indescomponibles en esta categoría. En este trabajo extenderemos los resultados de Towber y mostraremos propiedades adicionales, desde los puntos de vista categórico y homológico, de la categoría $\mathrm{lrel}_2^2(k)$ de pares de relaciones lineales, en donde los objetos ahora serán cuádruplas de la forma $(V_1, V_2; R_1, R_2)$ con V_i k-espacios vectoriales y $R_i \subseteq V_1 \oplus V_2$ subespacios k-lineales, para $i \in \{1,2\}$. Veremos en particular que la categoría que estudiamos no es abeliana, pero que sin embargo, está dotada de otras propiedades categóricas que le dan gran riqueza; en particular, probaremos que $\mathrm{lrel}_2^2(k)$ es de Krull-Schmidt. Estudiaremos la existencia de núcleos, imágenes y conúcleos, lo que nos permitirá plantear problemas de carácter homológico. También, definiremos un funtor de $\mathrm{lrel}_2^2(k)$ a la categoría $\mathrm{rep}_k(\mathcal{S})$ de representaciones sobre k del carcaj $\mathcal{S}$ (cuyas representaciones indescomponibles fueron estudiadas por Nazarova en [2]) dado por



Estudiaremos propiedades de este funtor que nos permitirán ver a $\mathrm{lrel}_2^2(k)$ como subcategoría plena de $\mathrm{rep}_k(\mathcal{S})$. Como consecuencia de las propiedades funtoriales obtendremos también, de manera sencilla, la clasificación completa de los indescomponibles en $\mathrm{lrel}_2^2(k)$. Adicionalmente, obtendremos una caracterización intrínseca de los objetos de la subcategoría de $\mathrm{rep}_k(\mathcal{S})$ que es equivalente a $\mathrm{lrel}_2^2(k)$ y usaremos esta caracterización para probar que $\mathrm{lrel}_2^2(k)$ es una categoría exacta. Por último mostraremos la existencia y clasificación de los objetos proyectivos e inyectivos en $\mathrm{lrel}_2^2(k)$, con la intención de establecer la relación que hay entre los carcajes de Auslander-Reiten asociados a $\mathrm{lrel}_2^2(k)$ y a $\mathrm{rep}_k(\mathcal{S})$ (ver [3]).

Referencias

[1] MacLane, S. (1961). An Algebra of Additive Relations. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, Vol. 47, Nº 7, pp. 1043–1051. http://www.jstor.org/stable/71127

[2] Nazarova, L. A. (1967) Representations of a tetrad. Izv. (Traducción al inglés en *Math. USSR Izv.* 1) *Akad. Nauk. SSSR*, Ser. Mat., Vol. 31, pp. 1361–1377.

[3] Schiffler, R. (2014). *Quiver Representations.* CMS Books in Mathematics. Springer-Verlag.

[4] Towber, J. (1971). Linear relations. *Journal of Algebra*, Vol. 19, Nº 1, pp. 1–20. https://doi.org/10.1016/0021-8693(71)90112-8

Un enfoque matricial para la clasificación de las representaciones indescomponibles para un conjunto ordenado de tipo manso

Juan Camilo Buitrago Cruz[1]

[1]Universidad Nacional de Colombia, sede Manizales, Colombia
Semillero REAl
✉ jbuitragocr@unal.edu.co

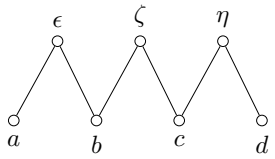
ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. A partir del resultado ya conocido para el caso del conjunto ordenado formado por la tetrada (es decir, cuatro puntos mutuamente incomparables) junto con un maximal apropiado, se procederá de forma matricial para obtener la clasificación completa de todas, salvo isomorfismo, las representaciones indescomponibles para el conjunto ordenado obtenido al añadir tres puntos maximales a la tetrada. Este objeto es de especial relevancia ya que su comportamiento es muy distinto según se estudie como carcaj o como conjunto parcialmente ordenado.

Palabras claves. Conjunto ordenado de tipo manso, carcaj, representación indescomponible, presentación matricial.

El presente trabajo es una continuación del presentado en la versión anterior del encuentro ALTENCOA. En aquella ocasión se presentaron resultados asociados a una fase inicial del análisis; en esta oportunidad se presentarán los avances recientes con los cuales se termina el estudio planteado y se establecen los resultados finales.

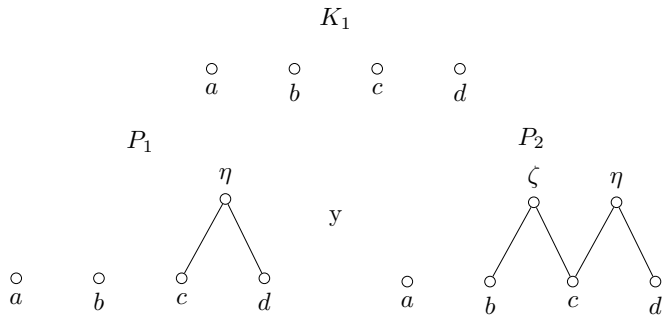
El siguiente objeto, que se denominará P_3, puede verse como carcaj o como conjunto ordenado:



El estudio de este objeto resulta especialmente interesante debido a la diferencia en el comportamiento de sus representaciones según la perspectiva desde la cual se lo considere. Si se lo analiza como carcaj, asignando cualquier orientación a las aristas, tiene finitas (salvo isomorfismo) representaciones indescomponibles; en cambio, si se lo considera como conjunto parcialmente ordenado, tiene infinitas representaciones indescomponibles. Como carcaj, el diagrama de Dynkin asociado a P_3 es A_7, así que el teorema de Gabriel (ver [3, Teorema 8.12]) dice que tiene finitas representaciones indescomponibles, salvo isomorfismo. Por otro lado, ya que P_3 contiene como subconjunto ordenado a $K_1 = (1, 1, 1, 1)$, entonces tiene infinitas representaciones indescomponibles. Estas, sin embargo, se pueden describir totalmente, pues P_3 es de tipo manso. Obtener entonces la clasificación completa de todas las representaciones indescomponibles del objeto P_3 permitirá una comprensión más profunda de las relaciones entre las categoría de representaciones del objeto, visto ya sea como carcaj o como conjunto ordenado.

Para obtener la clasificación de las representaciones indescomponibles de P_3, como conjunto parcialmente ordenado, se procederá matricialmente y se considerarán los siguientes conjuntos parcialmente

ordenados auxiliares:



K_1, uno de los conjuntos ordenados críticos de Kleiner (ver [1]), es subconjunto ordenado de P_1, que a su vez es subconjunto ordenado de P_2 y este último lo es de P_3. El paso de cada uno de ellos al supraconjunto ordenado correspondiente se hace agregando un punto maximal, junto con ciertas relaciones de orden. A partir de esta estructura jerárquica, es posible obtener las representaciones indescomponibles de P_1 a partir de las del poset crítico K_1 (ver [2]). Siguiendo esta misma estrategia, se determinan las representaciones indescomponibles de P_2, y, conociendo estas últimas, se derivan finalmente las correspondientes a P_3

Referencias

[1] Kleiner, M. M. (1972). Partially ordered sets of finite type. *Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)* 28: 32–41. English translation in *J. Soviet Math.* 23(5) (1975).

[2] Medina, G., Zavadskij, A. G. (2004). The four subspace problem: An elementary solution. *Linear Algebra Appl.* 392: 11–23.

[3] Schiffler, R. (2014). *Quiver Representations*. CMS Books in Mathematics.

Una componente preproyectiva para una categoria de Krull-Schmidt apropiada

Estefania Alzate Rincón[1]

[1]Universidad Nacional de Colombia, Manizales, Colombia
Semillero REAl
✉ ealzater@unal.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. Considere una categoría de Krull-Schmidt $\mathcal{A}$, no necesariamente abeliana, con una estructura exacta, suficientes proyectivos e inyectivos, sucesiones que casi se dividen y que satisface las siguientes propiedades:

*A*1 Existe un objeto proyectivo indescomponible $\hat{S} \in \mathcal{A}$ tal que $\mathrm{Hom}(\hat{S}, X) \neq 0$ para todo $X \in \mathcal{A}$ y si $f : X \to \hat{S}$ es un morfismo no nulo, entonces f es una retracción.

*A*2 Si $X \to Q$ y $Y \to Q$ son morfismos irreducibles con Q proyectivo indescomponible y X, Y indescomponibles, entonces $X \cong Y$.

Se introducen los objetos proyectivos pseudo hereditarios para construir un conjunto de secciones que permiten describir la componente preproyectiva del carcaj de Auslander-Reiten.

Palabras claves. Categoria de Krull-Schmidt, objetos proyectivos pseudo hereditarios, componente preproyectiva

Este trabajo está basado en el articulo [1].
Consideremos una categoría de Krull-Schmidt $\mathcal{A}$, con una estructura exacta dada por una clase de sucesiones $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$, de modo que la categoría exacta $(\mathcal{A}, \mathcal{E}_{\mathcal{A}})$ tenga suficientes proyectivos e inyectivos. Siguiendo a [2], diremos que esta categoría tiene *sucesiones que casi se dividen* si cada objeto indescomponible $X \in \mathcal{A}$ o bien posee un morfismo sumidero o bien existe una sucesión que casi se divide que termina en X, y además, o bien X posee un morfismo fuente o bien existe una sucesión que casi se divide que comienza en X. De hecho, X no es un objeto $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$-proyectivo si es el término final de una sucesión que casi se divide y no es un objeto $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$-inyectivo cuando existe una sucesión casi escindida que comienza en X.

A lo largo de este trabajo, si M es un objeto indescomponible de $\mathcal{A}$ y existe una sucesión que casi se divide x que termina en M, denotamos por τM al extremo izquierdo de x. De manera similar, si y es una sucesión que casi se divide que comienza en M, denotamos por $\tau^{-1}M$ al extremo derecho de y. Supondremos que $\mathcal{A}$ es una categoría de Krull–Schmidt con una estructura exacta, con suficientes proyectivos e inyectivos, que posee sucesiones que casi se dividen y que satisface las siguientes propiedades:

A1 Existe un objeto proyectivo indecomponible $\hat{S} \in \mathcal{A}$ tal que $\mathrm{Hom}(\hat{S}, X) \neq 0$ para todo $X \in \mathcal{A}$, y si $f : X \to \hat{S}$ es un morfismo no nulo, entonces f es una retracción.

A2 Si $X \to Q$ y $Y \to Q$ son morfismos irreducibles en $\mathcal{A}$, con Q proyectivo indecomponible y X, Y objetos indecomponibles de $\mathcal{A}$, entonces $X \simeq Y$.

Usando el siguiente resultado se puede construir un conjunto de secciones para una categoría como la que acabamos de describir, dentro de la componente de Auslander–Reiten del objeto $\hat{S}$.

Teorema 1. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría de Krull–Schmidt con una estructura exacta, con suficientes proyectivos e inyectivos, que posee suseciones que casi se dividen y que satisface A1 y A2 y sea C la componente de Auslander–Reiten de $\hat{S}$, el objeto de $\mathcal{A}$ descrito en A1. Entonces existe un conjunto de secciones $\{S_i\}_{i\in I}$ en C, donde I es o bien el conjunto de los números naturales o bien*

$$I = \{1, 2, \ldots, n\},$$

con las siguientes cinco propiedades:

1. *Si $X \in S_i$ y X no es proyectivo, entonces $i > 1$ y $\tau X \in S_{i-1}$.*
2. *Si $X \in S_i$ y X no es inyectivo, entonces $\tau^{-1}X \in S_{i+1}$.*
3. *Si $X \to Y$ es un morfismo irreducible con $Y \in S_i$ proyectivo, entonces $X \in S_i$.*
4. *Si $i \neq j$, entonces $S_i \cap S_j = \varnothing$.*
5. *$C = \bigcup_{i\in I} S_i$.*

Además, si $\{S'_i\}_{i\in J}$ es una familia de secciones contenidas en C que satisface las condiciones (1), (2), (3) y (4), entonces $J = I$ y

$$S'_i = S_i$$

para todo $i \in J$.

Para probar el resultado anterior se utilizó la siguiente definición

Definición 2. Sea $\mathcal{A}$ una categoría de Krull–Schmidt con una estructura exacta que posee suficientes proyectivos y suficientes inyectivos. Diremos que un objeto proyectivo indecomponible $M \in \mathcal{A}$ es *pseudo hereditario* si para toda cadena de morfismos irreducibles en $\mathcal{A}$

$$X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_l \longrightarrow M,$$

los objetos

$$X_1, \ldots, X_l$$

son proyectivos en $\mathcal{A}$.

Referencias

[1] Bautista, R., Dorado, I. (2022). A preprojective Auslander-Reiten component for the socle projective modules of some right-peak algebras. *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana.* 28(1):15. DOI: 10.1007/s40590-021-00407-2.

[2] Liu, S. (2010). Auslander–Reiten theory in a Krull–Schmidt category. *São Paulo Journal of Mathematical Sciences.* 4(3):425–472. DOI: 10.11606/issn.2316-9028.v4i3p425-472.

Subgrupos normales en grupos metacíclicos finitos

Jhon Chamorro[1], Diego Diaz[1], Wilson Mutis[1]

[1] Universidad de Nariño, Pasto, Colombia

✉ jjchamorro22B@udenar.edu.co, dfdiaz22a@udenar.edu.co, wfmutis@udenar.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. Los grupos metacíclicos constituyen una familia clásica dentro de la teoría de grupos finitos. Un grupo finito K es **metacíclico** si contiene un subgrupo normal H, tal que H y K/H son cíclicos. Esta estructura permite representar al grupo K mediante dos generadores y tres relaciones, como lo establece el **Teorema de Hölder**:

$$K = \langle \tau, \eta \mid \tau^n = 1,\ \eta^m = \tau^g,\ \eta\tau\eta^{-1} = \tau^h \rangle,$$

en la cual m, n, g y h son números naturales que cumplen ciertas condiciones de compatibilidad.

Los grupos metacíclicos han sido abordados desde diversas perspectivas en la literatura especializada. [2] los emplean en el análisis del problema de los conjuntos producto pequeños. [3] utilizaron estos grupos para determinar el género mínimo de las superficies de Riemann sobre las cuales estos grupos actúan de manera fiel. En el ámbito del estudio de estructuras de grupos finitos, destaca la clasificación de los grupos p-metacíclicos realizada por [4], la cual sentó las bases para investigaciones posteriores, como la de [5], quien desarrolló un nuevo enfoque basado en un algoritmo de generación de p-grupos. No obstante, sus resultados fueron únicamente anunciados para el caso de p impar, sin que se proporcionaran demostraciones completas. Este vacío fue abordado por [6], quienes ofrecieron una nueva demostración para el caso $p = 2$, independiente del algoritmo de generación. Por otra parte, [7] estudió el grupo de automorfismos de grupos p-metacíclicos no escindidos (nonsplit), profundizando en la estructura de estos grupos desde una perspectiva diferente. Recientemente, [1] estableció una parametrización completa de todos los subgrupos de un grupo metacíclico finito y caracterizó aquellos que son normales, resultados que constituyen un avance significativo en el área.
En este póster se presentan y discuten los resultados centrales de [1] sobre la parametrización de subgrupos de grupos metacíclicos finitos, se explicitan las condiciones de compatibilidad de la representación de Hölder y se presentan algunos ejemplos concretos de grupos metacíclicos no triviales.

Palabras claves. Grupos metacíclicos, tupla de Hölder, subgrupos normales, subgrupos cíclicos, parametrización de subgrupos

Referencias

[1] Yang, Y. (2020). Subgroups of finite metacyclic groups. *Journal of Algebra*, 545, 203–225.

[2] Benavides, J. (2025). Minimal product sets in metacyclic groups. *Proceedings of the AMS*, 153(1), 45–59.

[3] May, C. L. (1995). Symmetric groups as Galois groups. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 97(2), 167–180.

[4] King, B. W. (1973). Presentations of metacyclic p-groups. *Canadian Journal of Mathematics*, 25(3), 456–467.

[5] Newman, M. F. (1988). Metacyclic groups of prime-power order. *Lecture Notes in Mathematics*, 1352, 124–135.

[6] Xu, M. (2006). Classification of metacyclic 2-groups. *Algebra Colloquium*, 13(2), 245–258.

[7] Curran, P. M. (2008). Automorphisms of non-split metacyclic p-groups. *Glasgow Mathematical Journal*, 50(1), 87–96.

La teoría de Auslander-Reiten en la caracterización de álgebras de tipo representación finito

Ivan David Parra Mayorga[1], Jhon Sebastián Rojas Valderrama[1]

[1]Universidad distrital Francisco José de Caldas, Bogota D.C, Colombia

✉ idparram@udistrital.edu.com, jhsrojasv@udistrital.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. La teoría de representaciones tiene como idea fundamental el estudio de estructuras algebraicas mediante representaciones que permitan comprender de manera mas clara su naturaleza y propiedades. En este contexto, en esta charla se estudia la representación de álgebras finito-dimensionales a través de carcajes y de la categoría de representaciones asociada a ellos. Para ello, se emplearan herramientas provenientes de la teoría de Auslander–Reiten, las cuales permiten describir la estructura de sus módulos y representaciones, así como las relaciones a través de morfismos. Se hará especial énfasis en el carcaj de Auslander–Reiten, objeto que muestra todas las representaciones indescomponibles, salvo isomorfismo, y las conecta mediante morfismos irreducibles. Además como aplicación principal se analizará la clasificación de álgebras a través de la primera conjetura de Brauer–Thrall.

Palabras claves. Álgebras finito-dimensionales, Carcaj de Auslander-Reiten, Conjetura de Brauer-Thrall, Morfismos irreducibles, Representaciones indescomponibles

Introducción

La teoría de representaciones contemporánea surge como un esfuerzo por describir estructuras algebraicas mediante herramientas del álgebra lineal y la homología [1]. A principios de la década de 1970, el área experimentó un desarrollo fundamental gracias a dos vertientes complementarias: la introducción de técnicas diagramáticas basadas en carcajes por P. Gabriel [5], y el desarrollo de métodos homológicos por M. Auslander e I. Reiten [2].

En su trabajo fundamental de 1975, Auslander y Reiten [2] propusieron y demostraron la existencia de las sucesiones que casí se dividen. Este resultado supuso un cambio de paradigma, ya que permitió comprender la estructura de la categoría de módulos a partir de relaciones entre objetos (morfismos irreducibles), en lugar de limitarse al análisis de su estructura interna aislada [3]. Al fijar un campo algebraicamente cerrado k y un carcaj Q, se establece una equivalencia entre la categoría de representaciones de Q y la categoría de módulos finitamente generados sobre el álgebra de caminos kQ [1, 5].

Bajo este contexto, es posible identificar representaciones especiales asociadas al carcaj, tales como las proyectivas, inyectivas y simples. Mediante el uso del funtor de Nakayama ν, se establece una correspondencia biunívoca entre las representaciones proyectivas e inyectivas [1], lo cual es importante para definir isoclases que permiten construir el carcaj de Auslander-Reiten.

El objetivo principal de este trabajo es ilustrar la construcción del carcaj de Auslander-Reiten; donde los vértices corresponden a la isoclases de representaciones indescomponibles y las flechas a los morfismos irreducibles entre ellas, a través de la teoría de Auslander-Reiten, estudiando las sucesiones que casi se dividen, la traslación de Auslander-Reiten y la transformación de Coxeter.

Finalmente, apoyados en esta maquinaria y en el Teorema de Gabriel, mostraremos cómo esta equivalencia categórica permite clasificar las álgebras de tipo de representación finito, abordando la primera conjetura de Brauer-Thrall [1].

Referencias

[1] Assem, I., Simson, D., Skowroński , A. (2006). *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras, Vol. 1: Techniques of Representation Theory*. London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, Cambridge.

[2] Auslander, M., Reiten, I. (1975). *Representation Theory of Artin Algebras III almost split sequences*. Communications in Algebra, 239-294. https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/00927877508822046

[3] Auslander, M., Reiten, I., Sverre, O. (1995). *Representation Theory of Artin Algebras*. Cambridge University Press, 224.

[4] Derksen, H., Weyman, J. (2014). *An Introduction to Quiver Representations*. American Mathematical Society, Providence, RI.

[5] Schiffler, R. (2014). *Quiver Representations*. Springer, Cham.

Superquivers y sus representaciones

Juan Camilo Marín Castañeda[1], Pedro Hernández Rizzo[1]

[1] Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia

✉ juanc.marin1@udea.edu.co, pedro.hernandez@udea.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. En esta charla corta presentaremos la definición de un superquiver, de su superálgebra de caminos asociada y de los supermódulos sobre esta. Así mismo, presentaremos lo que entendemos por una súperrepresentación de un superquiver. Extenderemos a este contexto la correspondencia entre supermódulos y superrepresentaciones y estableceremos algunas propiedades básicas de estas categorías.

Palabras claves. Superquivers, superálgebras, supermódulos, álgebra de caminos, representaciones.

El objeto de estudio del álgebra lineal elemental consiste en describir la acción de una transformación lineal sobre un espacio vectorial, un enfoque que resulta limitado cuando se pretende analizar múltiples transformaciones actuando simultáneamente. Históricamente, esta necesidad motivó la transición desde el estudio aislado de matrices hacia el análisis estructural de las álgebras subyacentes, consolidando la teoría de representaciones de álgebras de dimensión finita gracias a los trabajos de pioneros como Noether, Artin y Brauer. El desarrollo homológico y categórico de esta teoría alcanzó un punto de inflexión en la década de 1970 con la introducción del concepto de quiver o carcaj por Pierre Gabriel, quien demostró que el problema de clasificar las representaciones podía traducirse al estudio combinatorio de grafos dirigidos. La estructura de un quiver Q permite construir una k-álgebra natural, denominada álgebra de caminos kQ, estableciendo una equivalencia categórica fundamental donde el estudio de las representaciones de un quiver equivale al análisis de los módulos sobre su álgebra de caminos. Para extender este marco a contextos más generales, se introducen las álgebras de Artin sobre anillos conmutativos artinianos centrales, previniendo que los módulos se descompongan infinitamente.

Paralelamente, la física teórica introdujo la supersimetría, un concepto formalizado matemáticamente mediante la incorporación de una graduación sobre $\mathbb{Z}_2$ que divide los objetos en partes pares e impares, dando origen a superálgebras y superespacios. En la literatura reciente ha surgido un marcado interés por articular esta perspectiva graduada con la teoría de representaciones de quivers. No obstante, los enfoques actuales, tales como los trabajos de Bovdi y Zubkov [1], se limitan a asignar superespacios vectoriales a los vértices de un quiver clásico. Esta aproximación extrínseca superpone una estructura graduada sobre un objeto combinatorio que no la posee de forma intrínseca, planteando interrogantes respecto al comportamiento de propiedades geométricas como los semiinvariantes polinomiales utilizados en la construcción de espacios de moduli.

Este panorama insuficiente para abordar problemas estructurales motiva una perspectiva construida desde la base. En lugar de imponer una graduación sobre grafos estándar, en este proyecto se propone definir formalmente la noción de *superquiver*, incorporando la estructura $\mathbb{Z}_2$-graduada intrínsecamente en su combinatoria misma. A partir de esta definición, se pretende describir rigurosamente su categoría de representaciones y explorar de manera general la teoría de supermódulos sobre superálgebras de Artin. El trabajo se justifica en la necesidad de establecer bases categóricas primarias firmes para identificar objetos indecomponibles e investigar si teoremas clásicos fundamentales (como el Teorema de Estructura de Gabriel o el de Krull-Schmidt) admiten una extensión natural en el contexto graduado. De este modo, la investigación no solo resolverá un vacío conceptual en el tratamiento de los grafos graduados, sino que servirá como soporte algebraico robusto para proyectos orientados a la geometría algebraica

no conmutativa, la simetría especular homológica y la construcción rigurosa de espacios de moduli de super-haces coherentes sobre supervariedades [2].

Referencias

[1] Bovdi, V. A., Zubkov, A. N. (2020). Super-representations of quivers and related polynomial semi-invariants. *International Journal of Algebra and Computation.* 30(04): 883–902. DOI: 10.1142/S0218196720500241.

[2] Hernández Rizzo, P., et al. (2024). *Propuesta de investigación: Moduli de representaciones de supercarcajes y sus categorías derivadas.* Proyecto sometido a la convocatoria CODI, Universidad de Antioquia.

[3] Lam, T.-Y. (2001). *A First Course in Noncommutative Rings.* Graduate Texts in Mathematics, Springer.

[4] Schiffler, R. (2014). *Quiver Representations.* Springer International Publishing. DOI: 10.1007/978-3-319-09204-1.

[5] Skowroński, A., Yamagata, K. (2011). *Frobenius Algebras I: Basic Representation Theory.* European Mathematical Society. DOI: 10.4171/102.

[6] Westra, D. B. (2009). *Superrings and Supergroups.* Dissertation, Universität Wien.

Las matemáticas del cubo de Rubik

Sebastián Martínez[1], Wilson Mutis[1]

[1] Universidad de Nariño, Pasto, Colombia

✉ arcossebastian562@email.com, wilsonmutis@udenar.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. El Cubo de Rubik, inventado por Ernő Rubik en 1974, es uno de los rompecabezas más estudiados desde el punto de vista matemático debido a las estructuras algebraicas y combinatorias involucradas en su resolución. Sus movimientos pueden describirse mediante un grupo de permutaciones que actúa sobre el conjunto de configuraciones del cubo.

El primer estudio registrado de las matemáticas del cubo de Rubik, fué el realizado por Singmaster [4] en 1981, en el cual se desarrolló la modelación matemática de los movimientos del cubo de Rubik y la notación para las caras del mismo. Otros estudios como los de Chen [1] y Martínez [2], explican los conceptos de grupo, subgrupo, generadores y homomorfismos en el cubo de Rubik. Por su parte, Qiu [3], hace un estudio del número de configuraciones validas alcanzables en el cubo de Rubik, haciendo uso de conceptos de teoría de grupos y combinatoria.

Investigaciones posteriores han revelado resultados matemáticos interesantes, por ejemplo, se ha demostrado que el grupo del cubo es un producto semidirecto de subgrupos que preservan orientación y posición y se estableció computacionalmente que cualquier configuración del cubo puede resolverse en un máximo de 20 movimientos.

En este póster se presentan de forma didáctica los principales resultados obtenidos en el estudio matemático del Cubo de Rubik, mostrando cómo la teoría de grupos, la combinatoria y los métodos computacionales permiten comprender su estructura y complejidad.

Palabras claves. Permutaciones, grupos, acción de grupos, homomorfismos

Referencias

[1] Chen, J. (2004) *Group Theory and the Rubik's Cube*, notes from Texas State Honors Summer Math Camp.

[2] Martínez, J. (2024). *Una mirada matemática al cubo de Rubik (A mathematical view of the Rubik cube)*. Trabajo de Fin de Grado. Universidad de Cantabria, Santander, España.

[3] Qiu, S. (2023). *Group theory behind Rubik's Cube.* Proceedings of the 3rd International Conference on Computing Innovation and Applied Physics (pp. 151?156). https://doi.org/10.54254/2753-8818/9/20240732.

[4] Singmaster, D. (1981). *Notes on Rubik's Magic Cube*. First American edition. Enslow Publishers, Hillside, New Jersey, USA.

Introducción al problema de representación algebraica para $\mathbb{M}_n$

Faiber Esteban Cortés Santamaria[1]

[1] Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá D.C., Colombia

✉ fecortess@udistrital.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. En este póster se introduce el problema de representación algebraica de los retículos finitos $\mathbb{M}_n$, los cuales corresponden a retículos de longitud dos con n átomos. Se revisan resultados relacionados con sus representaciones, las clases de equivalencia asociadas y las cotas para la cardinalidad mínima de las álgebras que las representan.

Palabras claves. Álgebra, clase de equivalencia, congruencia, intervalo de subgrupos, representación, retículo finito, grupo diédrico, cota, grafo, cardinalidad.

Introducción

Una de las preguntas fundamentales de la teoría de retículos consiste en determinar cuáles retículos pueden representarse como retículos de congruencias de álgebras. Dada un álgebra A, el conjunto de sus congruencias, denotado por $\mathrm{Con}(A)$, posee estructura de retículo. Surge entonces el siguiente problema de representación: determinar si un retículo dado es isomorfo al retículo de congruencias de alguna álgebra. En 1963, Grätzer y Schmidt demostraron que todo retículo algebraico es isomorfo al retículo de congruencias de alguna álgebra [2]. Dado que todo retículo finito es algebraico, resulta natural preguntarse si todo retículo finito puede representarse como el retículo de congruencias de una álgebra finita. Esta cuestión constituye el denominado problema de representación algebraica de retículos finitos. Posteriormente, Pálfy y Pudlák demostraron que este problema es equivalente a determinar si todo retículo finito es isomorfo a un intervalo en el retículo de subgrupos de algún grupo finito [4]. Esta equivalencia ha permitido abordar el problema mediante herramientas provenientes de la teoría de grupos.

En este póster se estudian los retículos $\mathbb{M}_n$, los cuales constituyen una familia natural para el estudio del problema de representación de retículos.. Se presentan resultados sobre su representación mediante retículos de congruencias de álgebras finitas, las clases de equivalencia asociadas y cotas para la cardinalidad mínima de las álgebras que los representan. El objetivo es ofrecer una introducción a las principales ideas y técnicas de la representación algebraica de estos retículos, destacando las conexiones entre teoría de retículos, teoría de grupos y teoría de congruencias.

Un resultado fundamental establece que, para todo primo $p \geq 3$, el retículo de congruencias del álgebra unaria $D_p = (D_p, T(D_p))$ es isomorfo al retículo de subgrupos $\mathrm{Sub}(D_p)$, el cual a su vez es isomorfo a $\mathbb{M}_{p+1}$ [3]. Aquí D_p denota el grupo diédrico de orden $2p$ y $T(D_p) = \{f_x : D_p \to D_p \mid f_x(a) = xa,\ x \in D_p\}$.

Los resultados sobre las clases de equivalencia asociadas a las representaciones de $\mathbb{M}_n$ utilizan el concepto de representación finita introducido por Stone y Weedmark [1]. A partir de una representación finita L_A se construye una estructura relacional cuyos homomorfismos permiten estudiar imágenes inducidas, representaciones irreducibles y subgrafos característicos. Estas herramientas permiten describir las clases de equivalencia asociadas a dichas representaciones.

Por otra parte, las cotas para la cardinalidad mínima de las álgebras que representan a $\mathbb{M}_{p+1}$ se obtienen mediante el estudio de grafos asociados a pares de congruencias. En particular, dadas congruencias $\theta_1, \theta_2 \in \mathrm{Con}(A)$ tales que $\theta_1 \wedge \theta_2 = 0$, y cuyas clases de equivalencia tienen cardinalidad 2, se considera el grafo $\Gamma(A, \theta_1, \theta_2)$, cuyos vértices están dados por las clases de equivalencia de θ_1 y θ_2. Las propiedades estructurales de este grafo y su relación con el grupo diédrico permiten establecer cotas para la cardinalidad mínima de las álgebras que representan a $\mathbb{M}_{p+1}$, optimizando así el tamaño de los representantes algebraicos.

Referencias

[1] Stone, M. G. and Weedmark, R. H.(1980).On Representing M_n''s by Congruence Lattices of Finite Algebras. *Discrete Mathematics.* 44:299–308.

[2] Grätzer, G and Schmidt, E. T(1963). Characterizations of Congruence Lattices of Abstract Algebras. *Acta Scientiarum Mathematicarum.* TOMUS XXIV. Fasc.1-2.

[3] Bunn, R. Grow, D. Insall, M .and Thiem, P.(2020) A Minimal congruence lattice representation for $\mathbb{M}_{p+1}$. *Journal of the Australian Mathematical Society.* 108: 332–340. DOI:10.1017/S1446788720000014.

[4] Pálfy, P. and Pudlák, P.(1980) Congruence lattices of finite algebras and intervals in subgroup lattices of finite groups. *Algebra universalis.* 11: 22–27.

Dominios de Dedekind y la geometría de curvas algebraicas

Juan Manuel Poloche Ríos

Universidad Nacional de Colombia, Manizales
✉ jpoloche@unal.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. Los dominios de Dedekind constituyen una de las clases más importantes de anillos en álgebra conmutativa y teoría algebraica de números. Un dominio de Dedekind es un dominio noetheriano, íntegramente cerrado y de dimensión de Krull uno. Entre sus propiedades fundamentales destaca la factorización única de ideales no nulos como productos de ideales primos.
Más allá de su relevancia algebraica, los dominios de Dedekind poseen una profunda interpretación geométrica. Los anillos de coordenadas de curvas algebraicas afines suaves constituyen ejemplos naturales de dominios de Dedekind, estableciendo un puente entre la teoría de ideales y la geometría algebraica. En este contexto, los ideales primos no nulos corresponden a puntos cerrados de la curva, mientras que la factorización de ideales refleja la descomposición de divisores en términos de dichos puntos y sus multiplicidades.
El propósito de este trabajo es presentar a los dominios de Dedekind como análogos algebraicos de curvas algebraicas suaves. Se explicará cómo conceptos geométricos tales como puntos, divisores y grupos de clases pueden interpretarse mediante herramientas puramente algebraicas. Asimismo, se discutirán ejemplos provenientes tanto de la teoría algebraica de números como de la geometría algebraica, mostrando cómo estas estructuras proporcionan un marco unificado para el estudio de fenómenos aritméticos y geométricos.

Palabras claves. Dominios de Dedekind, curvas algebraicas, ideales primos, divisores, grupo de clases

Introducción

Los dominios de Dedekind ocupan un lugar central en el álgebra conmutativa debido a la riqueza de su estructura ideal. Un dominio integral R es un dominio de Dedekind si es noetheriano, íntegramente cerrado y de dimensión de Krull igual a uno. Estas condiciones garantizan que todo ideal no nulo de R pueda factorizarse de manera única como producto de ideales primos.

Desde una perspectiva geométrica, los dominios de Dedekind aparecen de forma natural como anillos de coordenadas de curvas algebraicas afines suaves. Esta observación permite interpretar propiedades algebraicas en términos geométricos y viceversa. En particular, los ideales primos no nulos corresponden a puntos cerrados de la curva, mientras que la dimensión uno del anillo refleja que los subconjuntos cerrados irreducibles propios de una curva son precisamente sus puntos.

La teoría de divisores proporciona una conexión aún más profunda entre ambas perspectivas. La descomposición de un ideal en potencias de ideales primos puede interpretarse como un divisor formal sobre la curva, donde cada ideal primo determina un punto y cada exponente registra una multiplicidad. De esta manera, la factorización única de ideales adquiere un significado geométrico natural.

Otro invariante fundamental es el grupo de clases, que mide la obstrucción a la factorización única de elementos. Este grupo desempeña un papel esencial tanto en teoría algebraica de números como en geometría algebraica y puede interpretarse geométricamente mediante clases de divisores.

En esta ponencia se mostrará cómo los dominios de Dedekind constituyen un modelo algebraico de las curvas algebraicas suaves y cómo esta correspondencia permite comprender fenómenos geométricos a través del lenguaje de los ideales.

Referencias

[1] Atiyah, M. F., Macdonald, I. G. (1969). *Introduction to Commutative Algebra*. Addison-Wesley.

[2] Eisenbud, D. (1995). *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*. Springer. DOI: 10.1007/978-1-4612-5350-1.

[3] Hartshorne, R. (1977). *Algebraic Geometry*. Springer.

[4] Liu, Q. (2002). *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves*. Oxford University Press.

[5] Matsumura, H. (1989). *Commutative Ring Theory*. Cambridge University Press.

Una introducción a las representaciones matriciales en anillos de grupo

Juan P. Ordoñez Agudelo[1], Erlinton F. Bolaños Ordoñez[1], John H. Castillo[1]

[1] Universidad de Nariño, Pasto, Colombia

✉ agudelojuanp28@gmail.com - erlintonordonez123@gmail.com - jhcastillo@udenar.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. Sea RG el anillo de grupo conformado por un grupo G sobre un anillo R, este trabajo analiza el isomorfismo existente entre RG y los anillos de matrices con entradas en R. Este vínculo se fundamenta en los planteamientos desarrollados por Ted Hurley en su artículo "Group rings and rings of matrices", ver [2]. Durante la charla, se ilustra dicha relación algebraica mediante el análisis de familias particulares, tales como los grupos cíclicos, los 2-grupos y el grupo dihedral, resaltando los patrones estructurales que surgen en la conformación de sus matrices. Adicionalmente, se evidencia una utilidad práctica directa: bajo las condiciones de que el anillo R sea conmutativo, posea identidad y carezca de divisores de cero, esta representación matricial facilita la caracterización exacta de las unidades y los divisores de cero del anillo de grupo y, cuando sea apropiado, en términos del determinante de las matrices respectivas.

Palabras claves. Anillo de grupo, unidades, divisores de cero, representación matricial.

Sea G un grupo (no necesariamente finito) y R un anillo. Se puede construir un conjunto teniendo como base los elementos de G y R; luego, usando las operaciones tanto en G como en R, se define una estructura de anillo en él. Para esto, se denota con RG el conjunto de todas las combinaciones lineales formales dadas por

$$\alpha = \sum_{g\in G} a_g g,$$

donde $a_g \in R$ y es igual a cero en casi todas partes; es decir, sólo un número finito de coeficientes son diferentes de cero en estas expresiones.

Sean $\alpha = \sum_{g\in G} a_g g$ y $\beta = \sum_{g\in G} b_g g$ en RG. Se define la suma de α y β como

$$\alpha + \beta = \left(\sum_{g\in G} a_g g\right) + \left(\sum_{g\in G} b_g g\right) = \sum_{g\in G} (a_g + b_g) g. \tag{1}$$

Por otro lado, se define el producto de la siguiente manera:

$$\alpha\beta = \sum_{g,h\in G} a_g b_h gh = \sum_{u\in G} c_u u, \quad \text{donde} \quad c_u = \sum_{gh=u} a_g b_h. \tag{2}$$

Adicionalmente, se establece un producto escalar en RG de la siguiente manera: para $\lambda \in R$ y $\sum_{g\in G} a_g g \in RG$ se tiene que

$$\lambda \left(\sum_{g\in G} a_g g\right) = \sum_{g\in G} (\lambda a_g) g. \tag{3}$$

El conjunto RG con las operaciones dadas en las expresiones (1) y (2) se denomina *anillo de grupo de G sobre R*. Cuando R es un anillo conmutativo, RG con las operaciones de suma, producto y multiplicación por escalar dada en (3) también se llama *álgebra de grupo de G sobre R*.

Sean G un grupo finito de orden n y R un anillo. Considere un listado fijo $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ de los elementos de G. La *RG-matriz* de $\omega = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{g_i} g_i \in RG$ es la matriz dada por

$$M(RG, \omega) = [\alpha_{g_i^{-1} g_j}]_n = \begin{bmatrix} \alpha_{g_1^{-1}g_1} & \alpha_{g_1^{-1}g_2} & \alpha_{g_1^{-1}g_3} & \cdots & \alpha_{g_1^{-1}g_n} \\ \alpha_{g_2^{-1}g_1} & \alpha_{g_2^{-1}g_2} & \alpha_{g_2^{-1}g_3} & \cdots & \alpha_{g_2^{-1}g_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{g_n^{-1}g_1} & \alpha_{g_n^{-1}g_2} & \alpha_{g_n^{-1}g_3} & \cdots & \alpha_{g_n^{-1}g_n} \end{bmatrix}.$$

De esta manera, se tiene que $M(RG, \omega)$ es un elemento de $M_n(R)$, el anillo de matrices de tamaño $n \times n$ con entradas en R. Con $M(RG)$ se denota el conjunto de todas las RG-matrices del anillo de grupo RG.

Teorema 1. [2, Thm 1]. Dado un listado fijo de los elementos de un grupo G de orden n, existe un isomorfismo de anillos entre RG y $M(RG)$. Este isomorfismo está dado por:

$$\sigma : RG \longrightarrow M(RG)$$
$$\omega \longmapsto M(RG, \omega).$$

En este trabajo también se estudian algunos tipos particulares de anillos de matrices que se dan para determinadas clases de grupos, entre ellos se tienen los grupos cíclicos, los 2-grupos abelianos y los grupos dihedrales. A partir del isomorfismo dado por el Teorema se obtienen algunos casos especiales de matrices como son: matrices simétricas, matrices circulantes y matrices de Toeplitz, entre otras. Algunas de las propiedades estudiadas son consecuencias de resultados que se pueden encontrar en [1, 3].

Referencias

[1] Brown, W. C. (1993). *Matrices over commutative rings*. New York: Marcel Dekker, Inc.

[2] Hurley, T. (2015). Group rings for communications. *Int. J. Group Theory*. 4(4): 1–23.

[3] Polcino Milies, C., Sehgal, S. K. (2002). *An introduction to group rings, Vol. 1*. New York: Springer Science & Business Media.

Complejos sobre endofuntores

Angie Isaza Jaramillo

Universidad de Antioquia, Medellín Colombia
✉ angie.isaza@udea.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. Motivados por las similitudes entre objetos graduados, complejos de módulos (ver, e.g., [3]) y módulos sobre el álgebra repetitiva (ver, e.g., [2]), presentaremos la categoría de complejos sobre un endofunctor definido en una categoría aditiva. Se discutirán sus propiedades principales, caracterizaciones importantes y las implicaciones estructurales ligadas a las categorías que motivaron su estudio. Esta es una charla corta relacionada a mi problema de tesis y basado en el artículo [1]

Palabras claves. Categorias de complejos; Álgebra Repetitiva; Representaciones de álgebras.

Referencias

[1] Benitez, G. and Rizzo, P (2024). Cochain complexes over a functor. *arXiv preprint arXiv:2403.18834*

[2] Giraldo, Hernan (2018). Irreducible morphisms between modules over a repetitive algebras. *Algebras and Representation Theory* 21.4: 683-702.

[3] Rotman, Joseph. (2009). An introduction to homological algebra. Vol. 2. *New York: Springer Verlag*

Estructuras algebraicas de caminos composicionales sobre hipergrafos dirigidos

Sergio Quiroga Sandoval [1], Ivon Dorado[1]

[1] Universidad Nacional de Colombia, sede Bogotá
Semillero de Representaciones de Estructuras Algebraicas REAl
✉ squirogas@unal.edu.co, iadoradoc@unal.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. En este trabajo se presenta un método para construir estructuras algebraicas a partir de hipergrafos dirigidos, extendiendo el enfoque clásico de las álgebras de caminos en carcajes [6] hacia relaciones de mayor aridad [7]. A diferencia de la construcción usual, basada en la concatenación de flechas, el método propuesto introduce operadores composicionales que actúan sobre tuplas finitas y generalizan la composición de relaciones binarias a relaciones n-arias. La iteración de un operador fijo produce caminos composicionales y, al tomar el espacio vectorial generado por ellos con el producto inducido, se obtiene un álgebra de caminos composicionales asociada a un hipergrafo dirigido. El resultado principal muestra que toda álgebra de caminos de un carcaj es isomorfa al álgebra de caminos composicionales de un hipergrafo construido explícitamente. Además, el marco permite obtener ejemplos como álgebras polinomiales, álgebras de matrices triangulares y productos composicionales finitos no asociativos.

Palabras claves. Hipergrafos dirigidos, relaciones n-arias, álgebras de caminos, carcajes, caminos composicionales, no asociatividad.

Resumen extendido

Las álgebras de caminos sobre carcajes son una herramienta fundamental en la teoría de representaciones de álgebras de dimensión finita: sus generadores son caminos orientados y su producto está dado por concatenación cuando los extremos son compatibles [6]. Por otra parte, en sistemas complejos de física, biología y muchas otras ramas de las ciencias las interacciones relevantes no son solamente binarias, sino de orden superior [2, 7]. La ponencia propone un puente entre estas dos perspectivas: reemplazar la concatenación de flechas por operaciones de composición entre hiperaristas, vistas como tuplas dirigidas.

El punto de partida es la composición de relaciones binarias, un concepto clásico del cálculo de relaciones [4]. En el contexto de relaciones de mayor aridad no existe una única definición estándar de composición; de hecho, se han estudiado diferentes composiciones para relaciones ternarias y sus propiedades algebraicas [1, 3]. Motivados por esto, se define una familia de operadores $\triangle_{n,m}^{(i_k),(j_{k'})}$, que, dadas dos tuplas, preservan sus extremos compatibles y seleccionan ciertas coordenadas interiores de cada una para formar una nueva tupla. La condición de compatibilidad es análoga a la de los caminos usuales: el último vértice de la primera tupla debe coincidir con el primero de la segunda. La selección de coordenadas interiores permite controlar la aridad de la salida.

Fijado un hipergrafo dirigido $H = (V, E)$ y un operador composicional, se define recursivamente el conjunto de caminos composicionales: primero se toman las hiperaristas de H y luego se agregan todas las tuplas obtenidas mediante composiciones iteradas. Esta construcción generaliza la idea de clausura transitiva en grafos dirigidos, conservando información de alta aridad. El espacio vectorial generado por estos caminos, con el producto inducido por el operador fijo, da lugar a la estructura algebraica de caminos composicionales de H.

El resultado principal de la charla es un teorema de realización: para todo carcaj $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ se construye un hipergrafo dirigido explícito $\widehat{H}$ tal que el álgebra de caminos clásica kQ es isomorfa, como k-álgebra, a un álgebra de caminos composicionales $k\widehat{H}$.

La ponencia ilustra ejemplos concretos: Un hipergrafo con una única hiperarista y un operador que aumenta la aridad produce un álgebra isomorfa a un álgebra de polinomios. En el caso binario, ciertas composiciones recuperan álgebras asociadas a matrices triangulares superiores. En contraste, para hipergrafos de mayor aridad aparecen productos finitos no asociativos; estos ejemplos muestran que el formalismo permite explorar estructuras algebraicas que no surgen directamente de la concatenación usual de caminos. Esta perspectiva se relaciona además con el estudio de caminos etiquetados en grafos multirrelacionales [5], pero desplaza el énfasis desde etiquetas binarias hacia hiperaristas y operaciones de aridad variable.

Finalmente, se discuten líneas de trabajo futuro: clasificar condiciones iniciales y operadores que producen álgebras asociativas, estudiar familias sistemáticas de álgebras no asociativas de dimensión finita y determinar hasta qué punto las álgebras de caminos con relaciones pueden recuperarse mediante operaciones composicionales. El objetivo general es aportar un marco algebraico para estudiar estructuras de alta aridad y abrir nuevas conexiones entre teoría de representaciones, hipergrafos dirigidos y ciencia de altas aridades.

Referencias

[1] Bakri, N., Zedam, L., De Baets, B. (2021). Compositions of ternary relations. *Kybernetika*. 57(3):404–425. DOI: 10.14736/kyb-2021-3-0404.

[2] Battiston, F., Cencetti, G., Iacopini, I., Latora, V., Lucas, M., Patania, A., Young, J.-G., Petri, G. (2020). Networks beyond pairwise interactions: Structure and dynamics. *Physics Reports*. 874:1–92. DOI: 10.1016/j.physrep.2020.05.004.

[3] Boughambouz, H., Zedam, L., De Baets, B. (2024). A holistic approach to the composition of ternary relations. *Computational and Applied Mathematics*. 43(2). DOI: 10.1007/s40314-023-02562-w.

[4] Peirce, C. S. (1873). Description of a notation for the logic of relatives, resulting from an amplification of the conceptions of Boole's calculus of logic. *Memoirs of the American Academy of Arts and Sciences*. 9(2):317–378. DOI: 10.2307/25058006.

[5] Rodriguez, M. A., Neubauer, P. (2011). A path algebra for multi-relational graphs. In: *2011 IEEE 27th International Conference on Data Engineering Workshops*, pp. 128–131. DOI: 10.1109/ICDEW.2011.5767613.

[6] Schiffler, R. (2014). *Quiver Representations*. CMS Books in Mathematics. Cham: Springer International Publishing.

[7] Zapata-Carratala, C., Arsiwalla, X. D. (2022). An invitation to higher arity science. arXiv:2201.09738. DOI: 10.48550/arXiv.2201.09738.

Estudio algebraico de grafos a través de álgebras de evolución

Manuela Bocanegra Quigua[1]

[1] Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

✉ manuela.bocanegra@udea.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. En este póster estudiamos las álgebras de evolución asociadas a grafos, enfocándonos en una familia particular conocida como los grafos tipo tadpole. Nuestro objetivo principal es analizar el comportamiento del álgebra cuadrada asociada y determinar si esta conserva la estructura de álgebra de evolución. Para ello, nos basamos en criterios teóricos previamente establecidos en la literatura, los cuales proporcionan condiciones para caracterizar esta propiedad. A partir de estos resultados, desarrollamos herramientas computacionales que permiten automatizar los cálculos involucrados, facilitando así el análisis de ejemplos y la exploración de familias de grafos más amplias. Este enfoque combina técnicas algebraicas con apoyo computacional, permitiendo no solo verificar las condiciones teóricas de manera eficiente, sino también generar evidencia que orienta la formulación de nuevas conjeturas. En particular, se estudia cómo las propiedades estructurales de los grafos tipo tadpole influyen en la estructura del álgebra cuadrada.

Palabras claves. Grafo, Álgebra de evolución, Base natural, Matriz de estructura.

Las álgebras de evolución surgen originalmente como modelos algebraicos asociados a fenómenos en genética no mendeliana, proporcionando una estructura matemática para describir ciertos procesos de herencia [2, 3]. Sin embargo, más allá de esta motivación inicial, estas álgebras han adquirido interés propio dentro de las matemáticas debido a su rica estructura y a su estrecha relación con otras áreas como el álgebra lineal y la teoría de grafos.

En efecto, las álgebras de evolución se caracterizan por la existencia de una base natural que permite describir su estructura mediante matrices asociadas y grafos dirigidos, estableciendo un puente entre propiedades algebraicas y características estructurales del grafo subyacente. Este enfoque ha motivado el estudio de problemas internos al álgebra desde una perspectiva estructural.

Uno de estos problemas consiste en determinar si ciertas construcciones, como el álgebra cuadrada —generada por los productos de los elementos del álgebra—, conservan la estructura de álgebra de evolución. Criterios para abordar esta cuestión han sido desarrollados recientemente en la literatura [1], proporcionando condiciones en términos de matrices de estructura.

En este trabajo nos enfocamos en álgebras de evolución asociadas a grafos tipo *tadpole*, analizando cómo sus propiedades estructurales influyen en el comportamiento del álgebra cuadrada. Para ello, se implementan herramientas computacionales que permiten verificar de manera eficiente los criterios teóricos existentes y facilitar la exploración de esta familia de ejemplos.

Referencias

[1] Bustamante, M., Mellon, P., Velasco, M. V. (2020). Determining when an algebra is an evolution algebra. *Mathematics* 8:1349.

[2] Tian, J. P., Vojtěchovský, P. (2006). Mathematical concepts of evolution algebras in non-Mendelian genetics. *Quasigroups and Related Systems* 14:111–122.

[3] Tian, J. P. (2008). *Evolution Algebras and Their Applications*. Springer-Verlag, Berlin.

Teoría de Números

Ponencias Teoría de Números

Comité Científico: Mario Huicochea (Universidad Autónoma de Zacatecas, México), Amalia Pizarro Madariaga (Universidad de Valparaiso, Chile), Jhon Jairo Bravo (Universidad del Cauca, Colombia).

1. **El número de elementos en la imagen de un polinomio módulo n**, Jerson Borja, Universidad de Córdoba, Colombia.

2. **Una mirada anti-Ramsey al problema de Schur**, José Sinuhé Araujo Medrano, Universidad Autónoma de Zacatecas, México.

3. **Sobre una ecuación Diofántica que involucra números de Fibonacci y S-unidades**, Julieth Fernanda Ruiz Hoyos, Universidad del Cauca, Colombia.

4. **Explorando Topologías de Progresiones Aritméticas y Algunas Generalizaciones**, Kevin Stiven Carmona Aleman, Nidia Yadira Caicedo Bravo, Universidad de Tolima, Colombia.

5. **Cota superior para conjuntos B_3 y B_4 en grupos finitos**, Carlos Alberto Trujillo Solarte, Universidad del Cauca, Colombia.

6. **m-tuplas diofánticas en sucesiones lineales recurrentes**, Jhon Jairo Bravo Grijalba, Universidad del Cauca, Colombia.

7. **Conjuntos co-Sidon en grupos finitos**, Edward Felipe Fernandez Luna, Universidad del Cauca, Colombia.

8. **Avances en el problema de los conjuntos producto pequeños en grupos metácicos**, Laura Nathalia Eraso España, Universidad del Cauca, Fernando A. Benavides, Universidad de Nariño, Colombia.

9. **Estructura de conjuntos B_h de tipo Bose-Chowla mediante rectas afines y q-trinomios**, Carlos Alexis Gómez Ruiz, Universidad del Valle, Colombia.

10. **Sobre construcciones de conjuntos Bh en campos finitos**, Angie Marisol Cerón Pantoja, Carlos Alberto Trujillo Solarte, Universidad del Cauca, John H. Castillo, Universidad de Nariño, Colombia.

11. **Pell numbers as product of two generalized Fibonacci numbers**, Jose Luis Herrera Bravo, Jhon Jairo Bravo Grijalba, Universidad del Cauca, Colombia, Pranabesh Das, Xavier University of Louisiana, United States of America, John C. Saunders, Middle Tennessee State University, United States of America.

12. **Sobre el comportamiento asintótico de una torre de tipo Artin-Schreier**, Horacio Navarro, Universidad del Valle, Colombia.

13. **Valuación 3-ádica de los números de Padovan**, Sergio Luis Agredo Otero, Jose Luis Herrera Bravo, Jhon Jairo Bravo Grijalba, Universidad del Cauca, Colombia.

El número de elementos en la imagen de un polinomio módulo n

Jerson Borja[1]

[1] Universidad de Córdoba, Montería, Colombia

✉ jersonborjas@correo.unicordoba.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. Si $f(x_1,\dots,x_t)$ es un polinomio con coeficientes enteros y $n\in\mathbb{Z}^+$, definimos un conjunto A_n formado por todos los elementos $a\in\{0,1,\dots,n-1\}$ tales que la congruencia $f(x_1,\dots,x_t)\equiv a \pmod n$ tiene solución. Para cada $n\in\mathbb{Z}^+$ definimos $\alpha(n)$ como la cardinalidad del conjunto A_n. Esta función $\alpha:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{Z}^+$ resulta ser una función multiplicativa, por lo que para determinar α basta con determinar $\alpha(p^n)$, donde p es primo y $n\in\mathbb{Z}^+$. En [5] se trabajó con el polinomio x^2+y^2, y se clasificaron todos los $n\in\mathbb{Z}^+$ tales que $\alpha(n)=n$. Además, se propuso el problema de estimar la fracción $\alpha(n)/n$, para todo n, y este problema fue resuelto en [4]. Anteriormente, en [3] se había determinado la fracción $\alpha(n)/n$, asociada al polinomio x^3+y^3. En [1, 2] se propuso un método aplicable a polinomios más generales incluyendo polinomios homogéneos del tipo $x_1^k+x_2^k+\cdots+x_t^k$.
En este trabajo extendemos el método de [1, 2] una clase especial de polinomios llamados *polinomios admisibles* (que contienen a las *formas diagonales*, es decir, polinomios de la forma $c_1x_1^{k_1}+c_2x_2^{k_2}+\cdots+c_tx_t^{k_t}$) y para los cuales establecemos propiedades y algoritmos que permiten calcular $\alpha(p^n)$. Entre otras propiedades, mostramos una *propiedad de levantamiento*, que permite mostrar la existencia de soluciones de una congruencia del tipo $f(x_1,\dots,x_t)\equiv a \pmod{p^{n+1}}$ bajo ciertas condiciones sobre la congruencia $f(x_1,\dots,x_t)\equiv a \pmod{p^n}$. A partir de esto se deducen fórmulas recursivas para el cálculo de la función α en potencias de primos.
Los resultados y algoritmos son aplicados a formas diagonales particulares, y el cálculo explícito de los conjuntos A_{p^n} nos permitirá dar condiciones necesarias para que un entero tenga una forma particular, como como x^2+y^4, x^4+y^4, etc.

Palabras claves. Problema modular, Representación de Enteros, Polinomio, Cardinalidad

Introducción

Para todo $n\in\mathbb{Z}^+$, sea $I_n=\{0,1,\dots,n-1\}$ y consideremos un polinomio $f(x_1,\dots,x_t)$ con coeficientes enteros. Definimos un conjunto $A_n\subseteq I_n$, de la siguiente forma: $a\in A_n$ si y solo si la congruencia

$$f(x_1,x_2,\dots,x_t)\equiv a \pmod n$$

tiene solución. La función asociada a $f(x_1,\dots,x_t)$, denotada $\alpha:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{Z}^+$, está definida mediante $\alpha(n)=|A_n|$, para todo $n\in\mathbb{Z}^+$. Claramente se tiene que $A_1=\{0\}$, por lo que $\alpha(1)=1$.

Ahora, si n y m son enteros positivos y m divide a n, definimos un conjunto $A_n(m)=\{a+jm : a\in A_m, 0\le j<n/m\}$. En [2] se probó que siempre que $n=m_1m_2$, con m_1 y m_2 enteros positivos primos relativos, se tiene la igualdad $A_n=A_n(m_1)\cap A_n(m_2)$. Esto permite demostrar que la función α es una función multiplicativa.

La familia de conjuntos $\{A_n\}_n$ satisface que si $m\mid n$, entonces $A_n\subseteq A_n(m)$. En particular, si p es primo y $n\ge 1$, entonces $A_{p^n}\subseteq A_{p^n}(p^{n-1})$. Por tanto se puede definir, para cada entero positivo n, el conjunto $N_{p^n}=A_{p^n}(p^{n-1})\setminus A_{p^n}$. A los conjuntos N_{p^n} los llamamos *N-conjuntos asociados al primo p.*

De esta forma, $a \in N_{p^n}$ si y solo si $a = a_0 + jp^{n-1}$, donde $a_0 \in A_{p^{n-1}}$, $0 \leq j < p$, y $a \notin A_{p^n}$. Puesto que el conjunto $A_{p^n}(p^{n-1})$ tiene $p\alpha(p^{n-1})$ elementos obtenemos la igualdad

$$\alpha(p^n) = p\alpha(p^{n-1}) - |N_{p^n}|.$$

Si el polinomio $f(x_1, \ldots, x_t)$ satisface ciertas condiciones especiales, es posible determinar explícitamente los conjuntos N_{p^n} y sus cardinalidades, por lo que se obtiene una fórmula de recurrencia para calcular $\alpha(p^n)$.

En este trabajo extendemos resultados conocidos sobre los conjuntos A_{p^n} y N-conjuntos a una colección de polinomios llamados *polinomios admisibles*: $f(x_1, \ldots, x_t)$ es admisible si hay una variable que aparece en un único monomio de $f(x_1, \ldots, x_t)$; todo monomio que contenga la única ocurrencia de alguna variable x_j será llamado un *monomio admisible*. Si todos los monomios de $f(x_1, \ldots, x_t)$ son admisibles, decimos que el polinomio es *completamente admisible*.

Para enteros a, n y p, donde $n \geq 1$ y p es primo, diremos que la congruencia $f(x_1, \ldots, x_t) \equiv a \pmod{p^n}$ es *admisible* si $f(x_1, \ldots, x_t)$ es admisible y existen una solución $(m_1, \ldots, m_t)$ y un monomio admisible de la forma $cx_{j_1}^{k_1} \cdots x_{j_r}^{k_r}$ tal que p no divide a $m_{j_1}, \ldots, m_{j_r}$.

Probamos una propiedad de levantamiento para congruencias admisibles que mostrar que $\alpha(p^{n+1}) = p\alpha(p^n)$ bajo condiciones especiales.

Un entero positivo e es un *exponente de p para el polinomio* $f(x_1, \ldots, x_t)$, si se cumple la contenencia $\mathrm{R}(f) \cap p^e\mathbb{Z} \subseteq p^e\mathrm{R}(f)$. Mostramos que si e es un exponente de p para $f(x_1, \ldots, x_t)$, entonces $\{p^e a : a \in N_{p^{n-e}}\} \subseteq N_{p^n}$, para todo $n > e$. La contenencia contraria si $n > e + \mu_p$, $f(x_1, \ldots, x_t)$ es completamente admisible y $\{p^e a : a \in \mathrm{R}(f)\} \subseteq \mathrm{R}(f)$. Resulta así que para $n \geq 1 + \mu_p$, si r es el único entero tal que $1 + \mu_p \leq r \leq e + \mu_p$ y $n \equiv r \pmod{e}$, se tiene $N_{p^n} = \{p^{n-r}a : a \in N_{p^r}\}$, lo cual permite determinar los conjuntos N_{p^n}, $n \geq \mu_p + 1$. Si de define $h_r = |N_{p^r}|$, para $1 + \mu_p \leq r \leq e + \mu_p$, obtenemos fórmulas de recurrencia del tipo

$$\alpha(p^n) = p\alpha(p^{n-1}) - h_r, n \equiv r \pmod{e}.$$

Para formas diagonales $c_1x_1^{k_1} + \cdots + c_tx_t^{k_t}$ estudiamos la existencia de soluciones no triviales de la congruencia $c_1x_1^{k_1} + \cdots + c_tx_t^{k_t} \equiv 0 \pmod{p}$, donde p es primo, y condiciones bajo las cuales el mínimo común múltiplo de los exponentes $k_1, \ldots, k_t$ es un exponente para p en $c_1x_1^{k_1} + \cdots + c_tx_t^{k_t}$. Finalmente, determinamos explícitamente los conjuntos A_{p^n}, por ejemplo para el polinomio $x^2 + y^4$), y esto nos permite dar algunas condiciones necesarias para que un entero pueda representarse como suma de un cuadrado y una cuarta potencia.

Referencias

[1] Anaya, S., Arias, F., Borja, J. (2023). Counting integers representable as sums of k-th powers modulo n. *J. Integer Sequences.* **26**: Article. 23. 8. 1.

[2] Arias, F., Borja, J., Rubio, L. (2019). Counting integers representable as images of polynomial modulo n. *J. Integer Sequences.* **22**: Article. 19. 6. 7.

[3] Broughan, K. (2003) Characterizing the sum of two cubes. *J. Integer Sequences.* **6**: Article. 03. 4. 6.

[4] Burns, R. (2017). Representing numbers as the sum of squares and power in the ring $\mathbb{Z}_n$. 11 pp. arXiv: 1708.03939v2.

[5] Harrington, J., Jones, L., Lamarche, A. (2014) Representing integers as the sum of two squares in the ring $\mathbb{Z}_n$. *J. Integer Sequences.* **17**: Article. 14. 7. 4.

Una mirada anti-Ramsey al problema de Schur

José Sinuhé Araujo Medrano[1]

[1] Universidad Autónoma de Zacatecas, Zacatecas, México

✉ 38195555@uaz.edu.mx

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. En esta charla estudiaremos la versión anti-Ramsey del problema de Schur para 3−coloraciones de $\{1, 2, \ldots, n\} \subseteq \mathbb{Z}$. Nuestro objetivo será analizar la fracción máxima de tripletas de Schur que pueden ser heterocromáticas y presentar los primeros acotamientos no triviales conocidos para este problema: dicha fracción es asintóticamente al menos 0,4 y a lo más 0,66364.
Palabras claves. Schur, anti-Ramsey, Coloraciones heterocromáticas.

Introducción

El teorema clásico de Schur establece que toda k−coloración de $\{1, 2, \ldots, n\}$ contiene soluciones monocromáticas de la ecuación $x + y = z$, reflejando un fenómeno característico de la teoría de Ramsey, ver [5, 7, 11]. Más generalmente, el estudio de soluciones monocromáticas y heterocromáticas de $\mathbb{Z}$−polinomios en grupos conmutativos constituye una línea central dentro de la teoría aditiva de números y ha motivado numerosos problemas de tipo Ramsey y anti-Ramsey, ver [2, 4, 6, 9, 10]. En este contexto surge una variante natural del problema de Schur: en lugar de garantizar la existencia de soluciones monocromáticas, se busca maximizar la cantidad de soluciones heterocromáticas, es decir, aquellas cuyas entradas reciben colores distintos. Este enfoque conecta herramientas de combinatoria aditiva con ideas provenientes de la teoría extremal de grafos, ver [1].

Contenido

En esta charla estudiaremos la versión anti-Ramsey del problema de Schur para 3−coloraciones de $\{1, 2, \ldots, n\} \subseteq \mathbb{Z}$. Nuestro objetivo será analizar la fracción máxima de tripletas de Schur que pueden ser heterocromáticas y presentar los primeros acotamientos no triviales conocidos para este problema: dicha fracción es asintóticamente al menos 0,4 y a lo más 0,66364. Discutiremos la construcción que alcanza la cota inferior, basada en una combinación de particiones por intervalos y coloraciones modulares, así como las ideas detrás de la cota superior, vinculadas con resultados análogos sobre triángulos heterocromáticos en teoría de grafos. Finalmente, situaremos estos resultados dentro del panorama más amplio de la combinatoria aditiva y la teoría de Ramsey. La última parte de nuestra charla se basará en el trabajo reciente de Parczyk y Spiegel [8].

Referencias

[1] Alekseev, V. and Savchev S.; Problem M. 1014. *Kvant*, 4(23), 1987.

[2] Cameron, P. Cilleruelo, J. and Serra, O.; *On monochromatic solutions of equations in groups*, Revista Matemática Iberoamericana, 23(1):385–395, 2007.

[3] Chao, T. and Hans-Yu, H.; *Kruskal–Katona-type problems via the entropy method.* Journal of Combinatorial Theory Series B, 169:480–506, 2024.

[4] Datskovsky, B.; *On the number of monochromatic Schur triples*. Advances in Applied Mathematics, 31(1):193–198, 2003.

[5] Erdös, P. and Hajnal, A.; *On Ramsey like theorems. problems and results*. In Combinatorics (Proc. Conf. Combinatorial Math., Math. Inst., Oxford, 1972), 123–140, 1972.

[6] Graham, R. Rödl, V. and Ruciński, A.; *On Schur properties of random subsets of integers*. Journal of Number Theory, 61(2):388–408, 1996.

[7] Goodman, A.; *On sets of acquaintances and strangers at any party*. The American Mathematical Monthly, 66(9):778–783, 1959.

[8] Parczyk, O. and Spiegel, C. *An unsure note on an un-Schur problem*. Electron. J. Combin. 33 (1): Paper No. 1.45, 11 pp, 2026.

[9] Schoen., T.; *The number of monochromatic Schur triples*. European Journal of Combinatorics, 20(8):855–866, 1999.

[10] Rué, J. and Spiegel, C.; *The Rado multiplicity problem in vector spaces over finite fields*. Finite Fields and Their Applications, 111:102782, 2026.

[11] Neŝetřil, J. and Rödl, V.; *Mathematics of Ramsey theory*, volume 5. Springer Science and Business Media, 2012.

Sobre una ecuación Diofántica que involucra números de Fibonacci y S-unidades

Julieth Fernanda Ruiz[1], Jose Luis Herrera[1], Jhon Jairo Bravo[1]

[1] Universidad del Cauca, Popayán, Colombia

✉ jfrh@unicauca.edu.co, joseherrera@unicauca.edu.co, jbravo@unicauca.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. Sea S un conjunto finito no vacío de números primos. Diremos que un entero no nulo n es una *S-unidad* si puede escribirse como producto de potencias de los primos de S. Las relaciones entre potencias de números primos y términos de sucesiones lineales recurrentes han sido ampliamente estudiadas, lo que ha motivado diversos trabajos orientados a caracterizar estas conexiones para primos fijos y sucesiones específicas. En esta ponencia presentamos las ideas principales empleadas para determinar todas las *S-unidades* que pueden expresarse como suma o diferencia de números de Fibonacci, considerando el caso $S = \{2, 3, 5, 7\}$. Este trabajo extiende y generaliza resultados previos [1, 9, 3, 4], en los que se analizaron casos particulares con primos fijos como 2, 3 y 5.

Palabras claves. Número de Fibonacci, ecuación Diofántica, *S-unidad*.

Introducción

Los problemas Diofánticos que involucran sucesiones lineales recurrentes han sido objeto de un estudio profundo dentro de la teoría de números. En particular, han recibido especial atención aquellas ecuaciones que involucran términos de la *sucesión de Fibonacci*, definida por la recurrencia $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ para todo $n \geq 2$, junto con las condiciones iniciales $F_0 = 0$ y $F_1 = 1$. Para una exposición detallada de sus propiedades, se puede consultar [5] y [8, A000045].

Un resultado clásico en este contexto es el teorema del factor primitivo de Carmichael [2], el cual establece que, para todo $n > 12$, el n-ésimo número de Fibonacci posee un divisor primo que no divide a ningún término anterior de la sucesión. Como consecuencia, se deduce que las únicas soluciones (n, a) de la ecuación Diofántica $F_n = 2^a$ son $(1, 0), (2, 0), (3, 1)$ y $(6, 3)$. En esta misma línea, se han estudiado diversas variantes que involucran sumas y diferencias de números de Fibonacci. Por ejemplo, Bravo y Luca [1] determinaron todas las soluciones de $F_n + F_m = 2^a$ para $n \geq m \geq 2$, probando que las únicas ternas (n, m, a) son $(4, 2, 2)$, $(5, 4, 3)$ y $(7, 4, 4)$. De manera análoga, Şiar y Keskin [9] caracterizaron completamente las soluciones de $F_n - F_m = 2^a$ para $n > m \geq 0$ y $a \geq 0$. Asimismo, se han considerado extensiones a potencias de otros primos. Por ejemplo, Demirtürk y Keskin [3] estudiaron la ecuación $F_n - F_m = 3^a$, mientras que Erduvan y Keskin [4] analizaron el caso $F_n - F_m = 5^a$.

En un contexto más general, Pink y Ziegler [6] investigaron ecuaciones Diofánticas de la forma $u_n + u_m = wp_1^{z_1} \cdots p_s^{z_s}$, donde $(u_n)_{n \geq 0}$ es una sucesión lineal recurrente binaria no degenerada, $w \neq 0$ es un entero fijo, y $p_1, \ldots, p_s$ son primos distintos. En el caso particular de la sucesión de Fibonacci, demostraron que la ecuación $F_n + F_m = 2^{z_1} \cdot 3^{z_2} \cdot \ldots \cdot 199^{z_{46}}$ tiene exactamente 325 soluciones, todas ellas con $m \leq n \leq 59$ (véase [6, Theorem 4]).

Para formular nuestro problema, sea $S = \{p_1, \ldots, p_s\}$ un conjunto finito no vacío de primos distintos. Entonces todo entero no nulo n puede escribirse de manera única como $n = bp_1^{a_1} \cdots p_s^{a_s}$, donde $a_1, \ldots, a_s \geq 0$ y $\gcd(b, p_1 \cdots p_s) = 1$. Definimos la *$S$-parte* de n por

$$[n]_S := p_1^{a_1} \cdots p_s^{a_s}.$$

En particular, diremos que n es una *S-unidad* si $[n]_S = |n|$, es decir, si $n = \pm p_1^{a_1} \cdots p_s^{a_s}$.

En esta ponencia se presentan las ideas principales del trabajo conjunto con Jhon J. Bravo y José L. Herrera [7], en el cual se caracterizan todas las S-unidades que pueden expresarse como suma o diferencia de dos números de Fibonacci para $S = \{2, 3, 5, 7\}$. Más precisamente, se determinan todas las parejas de enteros (n, m) con $n > m \geq 2$ que satisfacen

$$\left[F_n + F_m\right]_S = F_n + F_m \qquad \text{y} \qquad \left[F_n - F_m\right]_S = \left|F_n - F_m\right|.$$

Nuestro resultado principal es el siguiente:

Teorema 1. *Sean n y m enteros positivos tales que $n > m \geq 2$. Entonces, las soluciones (n, m) de las ecuaciones*

$$\left[F_n + F_m\right]_S = F_n + F_m \qquad y \qquad \left[F_n - F_m\right]_S = \left|F_n - F_m\right|$$

son exactamente los elementos de los conjuntos $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$, respectivamente:

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ \begin{array}{c} (3,2),(4,2),(4,3),(5,2),(5,3),(5,4),(6,2),(6,3),(7,2),(7,3),(7,4) \\ (7,5),(7,6),(8,4),(9,2),(9,3)(9,6),(10,2),(10,5),(10,6),(11,2) \\ (11,10),(12,4)(13,10),(14,2),(14,10),(16,7),(16,8),(17,4),(18,6) \end{array} \right\}$$

y

$$\mathcal{S}_2 = \left\{ \begin{array}{c} (3,2),(4,2),(4,3),(5,2),(5,3),(5,4),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(7,2),(7,4),(7,5) \\ (7,6),(8,2),(8,4),(8,5),(8,7),(9,3),(9,7)(10,2),(10,5),(10,7),(10,9),(11,5) \\ (11,6),(13,6),(13,11),(14,3),(14,9),(14,11),(14,13),(15,9) \end{array} \right\}.$$

Referencias

[1] Bravo J. J., Luca F. (2016). On the Diophantine equation $F_n + F_m = 2^a$, *Quaestiones Mathematicae*, **39**, 391–400.

[2] Carmichael R. D. (1913). On the numerical factors of the arithmetic forms $\alpha_n \pm \beta_n$, *Ann. of Math.* (2)**1**, no. 1/4, 49–70.

[3] Demirtürk B., Keskin R. (2019). On solutions of the Diophantine equation $F_n - F_m = 3^a$, *Proc. Math. Sci.* 129, no. 5, 81. DOI: 10.1007/s12044-019-0524-6.

[4] Erduvan F., Keskin R. (2019). Nonnegative integer solutions of the equation $F_n - F_m = 5^a$, *Turk. J. Math.* 43 , no. 2, 1115–1123. DOI: 10.3906/mat-1810-83.

[5] Koshy T. (2001). *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*, Wiley-Interscience.

[6] Pink I., Ziegler V. (2018). Effective resolution of Diophantine equations of the form $u_n + u_m = wp_1^{z_1} \cdots p_s^{z_s}$, *Monatsh. Math.* 185, no. 1, 103–131.

[7] Ruiz J. F., Herrera J. L., Bravo J. J. (2026). On a Diophantine equation involving powers of Fibonacci numbers and S-units. Preprint 2026.

[8] Sloane N. (1996). The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS), OEIS Foundation.

[9] Şiar Z., Keskin R. (2018). On the Diophantine equation $F_n - F_m = 2^a$, *Colloq. Math.* 159, 119–126.

Explorando Topologías de Progresiones Aritméticas y Algunas Generalizaciones

Kevin Stiven Carmona Aleman[1], Nidia Yadira Caicedo Bravo[1], Jhonny Carpediem Gómez[2]

[1] Universidad del Tolima, Ibagué, Colombia

[2] Universidad del Valle, Cali, Colombia.

✉ kscarmonaa@ut.edu.co, nycaicedob@ut.edu.co, jhonny.gomez@correounivalle.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026

San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. Este trabajo se centra en el estudio de algunas topologías aritméticas construidas a partir de progresiones aritméticas y sus generalizaciones en dominios de integridad. Inicialmente, se presentan las topologías de Furstenberg, Golomb y Kirch, las cuales surgen al considerar familias particulares de progresiones aritméticas como base para definir estructuras topológicas sobre conjuntos numéricos. Estas topologías permiten establecer relaciones entre propiedades topológicas y resultados clásicos de la teoría de números, como la infinitud de los números primos. Posteriormente, se abordan las construcciones propuestas por Knopfmacher y Macías, que extienden este enfoque al contexto de los dominios de integridad mediante el uso de ideales y condiciones algebraicas asociadas. Esta comunicación busca describir las principales características de estos espacios, señalar algunas de sus propiedades básicas y mostrar cómo estas construcciones permiten conectar conceptos de topología, teoría de números y álgebra.

Palabras claves. Dominio de integridad, Topologías aritméticas, infinitud de los números primos.

Furstenberg, H [1] introduce la topología τ_F en $\mathbb{Z}$ generada a partir de todas las progresiones aritméticas de la forma

$$a\mathbb{Z} + b = \{an + b : n \in \mathbb{Z}\}$$

donde $a \in \mathbb{N}$,$b \in \mathbb{Z}$. El espacio $(\mathbb{Z}, \tau_F)$ es conocido como espacio de Furstenberg. Con este espacio fue presentada por primera vez la primera demostración topológica de la infinitud de números primos.
Golomb, S. W. [2] introduce la topología τ_G en $\mathbb{N}_0$ generada a partir de las progresiones aritméticas de la forma

$$a\mathbb{N}_0 + b = \{an + b : n \in \mathbb{N}_0\}$$

donde $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a, b \in \mathbb{N}$ con a, b primos relativos y se llama topología Golomb. En este espacio, Golomb presentó una nueva demostración de la infinitud de los números primos.
Kirch, A. M. [3] introduce la topología τ_K en $\mathbb{N}$

$$a\mathbb{N}_0 + b = \{an + b : n \in \mathbb{N}_0\}$$

donde $a, b \in \mathbb{N}$, a libre de cuadrados y a, b son primos relativos, se le conoce como topología de Kirch.

John Knopfmacher [4] introduce una generalización topológica sobre dominios de integridad, construidas a partir de colecciones $\mathcal{S}_a$ de ideales propios del anillo R diferentes de cero. La colección

$$\mathcal{C}_{\mathcal{S}} = \{a + \mathfrak{a} : a \in R, \mathfrak{a} \in \mathcal{S}_a\}$$

genera una sub-base para alguna topología, la anterior topología se conoce como topologia "Coset".

Jhixon Macías [5] ofrece una continuación natural en esta línea, proponiendo una nueva topología sobre dominios de integridad, a partir de la colección de conjuntos de la forma

$$\sigma_r := \{s \in R : \langle r \rangle + \langle s \rangle = R\}$$

genera una base para la topología de Macias.
Esta ponencia presenta propiedades básicas de los espacios topológicos de Furstenberg, Golomb y Kirch. Se profundiza en las topologías desarrolladas por Knopfmacher y Macías, que brindan una generalización del espacio de Golomb en el contexto de dominios de integridad.

Referencias

[1] Furstenberg, H. (1955). On the infinitude of primes. *The American Mathematical Monthly.* 62(5): 353–353. DOI: 10.2307/2307043.

[2] Golomb, S. W. (1959). A connected topology for the integers. *The American Mathematical Monthly.* 66(8): 663–665. DOI: 10.1080/00029890.1959.11989385.

[3] Kirch, A. M. (1969). A countable, connected, locally connected Hausdorff space. *The American Mathematical Monthly.* 76(2): 169–171. DOI: 10.1080/00029890.1969.12000163.

[4] Knopfmacher, J. y Porubský, S. (1997). Topologies related to arithmetical properties of integral domains. *Expositiones Mathematicae.* 15(2): 131–148.

[5] Macías, J. (2024). The Macías topology on integral domains. *Topology and its Applications.* 357: 109070. DOI: 10.1016/j.topol.2024.109070.

Cota superior para conjuntos B_3 y B_4 en grupos fnitos

Carlos A. Trujillo[1], Carlos A. Martos[1]

[1] Universidad del Cauca, Popayán, Colombia

✉ trujillo@unicauca.edu.co, cmartos@unicauca.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. Un subconjunto A de un grupo $(G,+)$ es un conjunto B_h si todas las sumas de h elementos de A son distintas. En esta ponencia presentamos los avances obtenidos durante el desarrollo del proyecto ID 6538, Vicerrectoría de Investigaciones de la Universidad del Cauca, cuya meta consiste en mejorar las cotas superiores para el máximo cardinal que puede tener un conjunto B_3 y un conjunto B_4 en un grupo de orden N, cuando N tiende a infinito.

Palabras claves. Conjuntos Sidon. Reglas Golomb. Conjuntos B_h

Sean $(G,+)$ un grupo conmutativo de orden N, A un subconjunto de G con k elementos y $h \geq 2$ un entero. A se llama conjunto B_h (en G) si todas las sumas de h elementos de A son distintas (excepto por la conmutatividad). Los conjuntos B_2 también se llaman conjuntos Sidon o reglas Golomb. El problema más importante sobre conjuntos B_h finitos consiste en investigar el comportamiento de la función

$$S_h(G) := max\{|A| : A \text{ es conjunto } B_h \text{ en } G\},$$

cuando el orden de G tiende a infinito. Si A es un conjunto B_h en G, entonces como hay $\binom{k+h-1}{h}$ variaciones con h elementos de A, se sigue que:

$$\frac{k^h}{h!} \leq \binom{k+h-1}{h} \leq N,$$

y se tiene la cota superior "trivial":

$$S_h(G)(h!N)^{1/h},$$
$$\limsup_{x\to\infty} \frac{S_h(G)}{N} \leq \sqrt[h]{h!} = (h!)^{1/h}.$$

En 1993, Xing-De Jia, (ver [3]), demostró que para $h = 2r$ y todo N:

$$S_{2r}(Z_N) \leq ((r!)^2 N)^{1/(2r)} + O(N^{1/(4r)}).$$

Un año después, Sheng Chen (ver [2]) probó que:

$$S_{2r}(Z_N) \leq ((r!)^2 N)^{1/(2r)} + O(1),$$
$$S_{2r-1}(Z_N) \leq ((r-1)!r!N)^{1/(2r-1)} + O(1).$$

En particular, ellos probaron que:

$$S(Z_N) \leq (2N)^{1/3} + O(1),$$
$$S(Z_N) \leq (4N)^{1/4} + O(1).$$

En 2012, Bravo, Ruíz y T. (ver [1]), mejoran los resultados de Jia y Chen:

$$\begin{aligned} S_{2r}(Z_N) &\leq ((r!)^2 N)^{1/(2r)} + 2r - 1, \\ S_{2r-1}(Z_N) &\leq ((r-1)!r!N)^{1/(2r-1)} + 2r - 2, \\ S(Z_N) &\leq (2N)^{1/3} + 2, \\ S(Z_N &\leq (4N)^{1/4} + 2. \end{aligned}$$

y conjeturan que

$$\limsup_{|G|\to\infty} \frac{S(G)}{|G|^{1/3}} \leq ((\frac{4}{3}))^{1/3}.$$

En esta ponencia hablaremos sobre nuestro trabajo en la búsqueda de una prueba de la conjetura anterior y de un resultado similar para el caso $h = 4$.

.

Referencias

[1] Bravo Jhon, Ruíz Diego,Trujillo, Carlos (2012). Cardinality of sets associated to B3 and B4 sets. *Revista Colombiana de Matemáticas*, Vol. 46 (1): 27-37.

[2] Chen Sheng (1994). On the size of finite Sidon sequences. *Proceedings of the American Mathematical Society*, Vol. 121 (2): 353-356.

[3] Jia Xing-De (1993). On finite Sidon sequences. *Journal of Number Theory*, Vol. 44 (1): 84-92.

m-tuplas diofánticas en sucesiones lineales recurrentes

Jhon J. Bravo[1]

[1] Universidad del Cauca, Popayán, Colombia

✉ jbravo@unicauca.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. En esta charla se introduce el concepto de m-tupla diofántica en el contexto de sucesiones lineales recurrentes. En particular, se considera la sucesión k-Pell, una generalización de la sucesión clásica de Pell obtenida al extender el orden de su recurrencia a un entero $k \geq 2$. Motivados por trabajos previos sobre m-tuplas diofánticas en sucesiones tipo Fibonacci, se estudia la posible existencia de cuádruplas de enteros positivos $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ tales que todos los productos $a_i a_j + 1$ (con $i \neq j$) pertenezcan a la sucesión k-Pell. Finalmente, se muestra que no existen tales cuádruplas, concluyendo así que no hay cuádruplas diofánticas con valores en la sucesión k-Pell para ningún $k \geq 2$. Trabajo conjunto con Andrés E. Dorado.

Palabras claves. m-tupla diofántica, sucesión lineal recurrente, número generalizado de Pell.

Introducción

La sucesión de Pell $(P_n)_{n\geq 0}$ es una sucesión lineal recurrente de segundo orden definida por la relación $P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$ para todo $n \geq 2$, con condiciones iniciales $P_0 = 0$ y $P_1 = 1$. Estrechamente relacionada con la sucesión de Fibonacci $(F_n)_{n\geq 0}$, ha sido ampliamente estudiada y ha inspirado numerosas generalizaciones. Para una exposición detallada de la belleza y las diversas aplicaciones de estos números y sus generalizaciones, remitimos al lector al libro de Koshy [9].

La sucesión de Pell admite una generalización natural al extender el orden de la recurrencia que la define de segundo orden a un orden superior $k \geq 2$. En esta charla, se considera la sucesión k-Pell $P^{(k)} := (P_n^{(k)})_{n\geq 2-k}$ definida por la recurrencia

$$P_n^{(k)} = 2P_{n-1}^{(k)} + P_{n-2}^{(k)} + \cdots + P_{n-k}^{(k)} \quad \text{para todo} \quad n \geq 2,$$

con condiciones iniciales $P_i^{(k)} = 0$ para $i \in [2-k, 0]$ y $P_1^{(k)} = 1$. Note que $P^{(2)} = (P_n)_{n\geq 0}$.

El estudio de sucesiones lineales recurrentes y sus propiedades diofánticas ha sido muy activo en las últimas décadas. En particular, se han obtenido diversos resultados sobre números que aparecen simultáneamente en distintas sucesiones de este tipo. Por ejemplo, Alekseyev [1] demostró que los únicos enteros comunes a las sucesiones de Fibonacci y de Pell son $0, 1, 2$ y 5, mientras que Bravo, Herrera y Luca [2] caracterizaron los enteros que aparecen simultáneamente en versiones generalizadas de las sucesiones de Pell y Fibonacci.

En paralelo, ha surgido una línea activa de investigación sobre m-tuplas diofánticas con valores en sucesiones lineales recurrentes. Este concepto se refiere a un conjunto de m enteros positivos $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ tal que $a_i a_j + 1$ es un término de la sucesión correspondiente para todo $1 \leq i < j \leq m$. Este sistema diofántico tiene su origen en la noción clásica de m-tupla diofántica, introducida por Diofanto de Alejandría, quien encontró el conjunto $\{1/16, 33/16, 17/4, 105/16\}$ con la propiedad de que el producto de cualesquiera dos de sus elementos más uno es el cuadrado de un número racional. Posteriormente, Fermat encontró el primer ejemplo de enteros con esta propiedad, a saber $\{1, 3, 8, 120\}$. En el caso entero, se han establecido diversos resultados. Por ejemplo, de los trabajos de Dujella, He, Togbé y Ziegler (ver [4, 7]) se deduce que a lo sumo cuatro enteros positivos pueden satisfacer esta propiedad.

En el estudio de m-tuplas diofánticas con valores en sucesiones lineales recurrentes, uno de los casos más analizados es el de $m = 3$, es decir, las triplas diofánticas. En este contexto, Irmak, Szalay y Luca (ver [8, 10]) obtuvieron diversos resultados para la sucesión de Fibonacci y para sucesiones binarias que satisfacen recurrencias de la forma $u_n = Au_{n-1} - u_{n-2}$, mostrando que no existen triplas diofánticas en estos casos.

El caso $m = 4$, es decir, las cuádruplas diofánticas, también ha recibido atención considerable. En 2015, Gómez y Luca [5] estudiaron la existencia de cuádruplas diofánticas con valores en la sucesión 3-Fibonacci (o sucesión de Tribonacci) y demostraron que no existen tales conjuntos. Posteriormente, en 2018, extendieron este resultado a todas las sucesiones k-Fibonacci con $k \geq 2$ (ver [6]). Esta última es una generalización de la sucesión de Fibonacci, definida tomando sus primeros k términos como $0, \ldots, 0, 1$, y cada término posterior como la suma de los k términos precedentes.

Motivados por estos trabajos, en esta ponencia se estudian las m-tuplas diofánticas con valores en la sucesión k-Pell, con especial énfasis en la existencia de cuádruplas diofánticas con valores en esta familia de sucesiones. Nuestro resultado principal, obtenido en [3], es el siguiente.

Teorema 1. *No existen enteros positivos $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ tales que $a_i a_j + 1$ sea un número k-Pell para todo $1 \leq i < j \leq 4$ y para todo $k \geq 2$. En otras palabras, no existen cuádruplas diofánticas con valores en la sucesión k-Pell para ningún $k \geq 2$.*

Corolario 2. *No existen cuádruplas diofánticas con valores en la sucesión de Pell.*

Referencias

[1] Alekseyev, M. (2011). On the intersections of Fibonacci, Pell, and Lucas numbers. *Electronic Journal of Combinatorial Number Theory, Integers*. 11: 239–259.

[2] Bravo, J., Herrera, J., Luca, F. (2021). Common values of generalized Fibonacci and Pell sequences. *J. Number Theory*. 226: 51–71.

[3] Dorado, A., Bravo, J. Diophantine quadruples with values in generalized Pell sequences. To appear in *Vietnam J. Math.*

[4] Dujella, A. (2004). There are only finitely many Diophantine quintuples. *J. Reine Angew. Math.* 566: 183–214.

[5] Gómez, C., Luca, F. (2015). Tribonacci Diophantine quadruples. *Glas. Mat. III.* 50(70): 17–24.

[6] Gómez, C., Luca, F. (2018). Diophantine quadruples with values in k-generalized Fibonacci numbers. *Math. Slovaca*. 68(4): 939–949.

[7] He, B., Togbé, A., Ziegler, V. (2019). There is no Diophantine quintuple. *Trans. Amer. Math. Soc.* 371(9): 6665–6709.

[8] Irmak, N., Szalay, L. (2014). Diophantine triples and reduced quadruples with the Lucas sequence of recurrence $u_n = Au_{n-1} - u_{n-2}$. *Glas. Mat. Ser. III.* 49: 303–312.

[9] Koshy, T. (2019). *Fibonacci and Lucas numbers with applications.* Vol. 2. John Wiley & Sons.

[10] Luca, F., Szalay, L. (2008). Fibonacci Diophantine triples. *Glas. Mat. Ser. III.* 43(2): 253–264.

Conjuntos co-Sidon en Grupos Finitos

Edward Felipe Fernández Luna[1], Carlos Andrés Martos Ojeda[2]

[1] Universidad del Cauca, Popayán, Colombia
[2] I. E. La Pamba, Popayán, Colombia
✉ edwardfer@unicauca.edu.co, cmartos@unicauca.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen.

Los conjuntos de Sidon y sus generalizaciones constituyen un objeto central en la teoría de números aditiva. En esta ponencia se estudiarán pares co-Sidon, definidos por la unicidad de representación en el conjunto suma $A + B$, así como los problemas de cardinalidad. A partir de construcciones clásicas de conjuntos B_2, se analizarán propiedades estructurales y cotas combinatorias para pares co-Sidon contenidos en intervalos enteros. Además, se introducirá la noción de pares co-Sidon en grupos abelianos y se estudiarán propiedades algebraicas del conjunto suma.
Palabras claves. Conjunto de Sidon, Par co-Sidon, Grupo abeliano

Los conjuntos de Sidon deben su nombre a S. Sidon, quien los introdujo en el estudio de problemas relacionados con series de Fourier.

Definición 1. Sea $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, con $a_1 < a_2 < \cdots < a_m$, un conjunto de enteros no negativos. Diremos que A es un *conjunto de Sidon* o un *conjunto* B_2 si todas las sumas $a_i + a_j, \qquad 1 \leq i \leq j \leq m$, son distintas.

La notación B_2 se generaliza naturalmente a conjuntos B_h, con $h > 2$, donde todas las sumas de h elementos son diferentes.

Uno de los principales problemas en el estudio de estos conjuntos consiste en determinar el máximo cardinal de un conjunto de Sidon contenido en el intervalo $[1, n] = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Una generalización natural de los conjuntos de Sidon se obtiene al considerar dos conjuntos A y B, y exigir que todas las sumas $a + b$, con $a \in A$ y $b \in B$, sean distintas. Para formalizar esta idea introducimos las siguientes definiciones.

Definición 2. La **función representación** para dos conjuntos $A, B \subseteq \mathbb{Z}^+$ está dada por

$$R_{A+B}(n) = |(a, b) \in A \times B : \ a + b = n|.$$

Definición 3. Dos conjuntos $A, B \subseteq \mathbb{Z}^+$ se llaman *co-Sidon* si $R_{A+B}(n) \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

Equivalentemente, (A, B) es un par co-Sidon si cada elemento de $A+B$ posee una única representación como suma de un elemento de A y un elemento de B.

Los pares co-Sidon fueron estudiados en [1] y [2], donde se demuestra el siguiente resultado.

Teorema 4. *Si $A, B \subseteq \{0, 1, \ldots, n\}$ son co-Sidon, entonces*

$$\text{mín}\{|A|, |B|\} \leq \lfloor \sqrt{2n} \rfloor.$$

Además, la igualdad se alcanza para infinitos valores de n.

Dado un conjunto $A \subseteq \mathbb{Z}^+$, resulta natural preguntarse por la existencia de subconjuntos $B \subseteq \mathbb{Z}^+$ con máxima cardinalidad y que cumpla con la propiedad de ser co-Sidon.

En esta ponencia estudiaremos la relación entre pares co-Sidon y propiedades de cardinalidad. En particular, utilizaremos construcciones conocidas de conjuntos B_2 para obtener pares co-Sidon contenidos en intervalos enteros. Además, dado que se han considerado generalizaciones de estos problemas a estructuras algebraicas más generales, estudiaremos pares co-Sidon en grupos abelianos.

Definición 5. Sea G un grupo abeliano escrito aditivamente y sean $A, B \subseteq G$. Diremos que (A, B) es un par *co-Sidon* en G si para cualesquiera $a_1, a_2 \in A, \quad b_1, b_2 \in B$, la igualdad $a_1 + b_1 = a_2 + b_2$ implica $a_1 = a_2 \quad$ y $\quad b_1 = b_2$.

Observe que esta definición preserva la idea fundamental de los pares co-Sidon en $\mathbb{Z}^+$: cada elemento del conjunto suma $A+B$ posee una única representación como suma de un elemento de A y un elemento de B.

A partir de esta generalización surgen naturalmente las siguientes preguntas, ¿se pueden caracterizar los subconjuntos $B \subseteq G$ tales que (A, B) forme un par co-Sidon en un grupo abeliano G? o también, ¿existen condiciones, propiedades estructurales o cotas para subconjuntos en grupos abelianos finitos?

Como un primer acercamiento a estos problemas, se obtienen propiedades elementales de los pares co-Sidon en grupos abelianos. En particular, si (A, B) es co-Sidon en un grupo abeliano finito G, entonces:

- la aplicación suma $\varphi : A \times B \to G, \qquad \varphi(a, b) = a + b$, es inyectiva;
- se cumple $|A + B| = |A||B|$;
- si $|G| = n$, entonces $|A||B| \leq |G|$, y por tanto $|B| \leq \left\lfloor \frac{|G|}{|A|} \right\rfloor$;
- la propiedad co-Sidon es invariante bajo traslaciones;
- y si $|A||B| = |G|$, entonces necesariamente $A + B = G$.

Estas propiedades permiten relacionar problemas de maximalidad con propiedades combinatorias y algebraicas del conjunto suma $A + B$. Finalmente, se presentarán resultados elementales sobre pares co-Sidon en grupos abelianos finitos, incluyendo propiedades del conjunto suma, cotas para cardinalidades y condiciones algebraicas derivadas de la unicidad de representación. Con ello, la ponencia busca mostrar cómo herramientas clásicas de teoría aditiva permiten formular y extender problemas combinatorios naturales al contexto de grupos abelianos.

Referencias

[1] Fabricio B. et al. Additive properties of a pair of sequences. Acta Aritheoremetica, 2009, vol. 139, no 2, p. 185-197.

[2] Artüras D. et al. Finding large co-Sidon subsets in sets with a given additive energy. European Journal of Combinatorics, 2013, vol. 34, no 7, p. 1144-1157.

[3] Erdös, P. and Turan, P. On a Problem of Sidon in Additive Number Theory and On Some Related Problems. Journal of the London Mathematical Society, 1941, vol. 16, p. 212-215.

Avances en el problema de los conjuntos producto pequeños en grupos metáciclicos

Laura N. Eraso[1], Fernando A. Benavides[2]

[1] Universidad Del Cauca, Popayán, Colombia
[2] Universidad De Nariño, Pasto, Colombia
✉ lauraeraso@unicauca.edu.co, fandresbenavides@udenar.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. Uno de los problemas de interés en teoría aditiva de números consiste en determinar la mínima cardinalidad del conjunto producto AB con A y B subconjuntos no vacíos de un grupo finito G. En grupos abelianos, este problema admite una descripción completa en términos de los órdenes de los subgrupos finitos de G. Sin embargo, en el contexto no abeliano no se dispone de una caracterización general, aunque se conocen resultados para diversas familias de grupos metacíclicos. Una estrategia para abordar este problema consiste en estudiar los pares (r, s) para los cuales coinciden las cotas inferiores y superiores conocidas para la mínima cardinalidad de conjuntos producto. En esta ponencia se presentan avances en el estudio de este problema para grupos metacíclicos no abelianos de orden $3p^2$ en el que p es un primo impar.

Palabras claves. Conjunto producto, grupos soluble, grupo metacíclico.

El estudio de los conjuntos producto analiza la mínima cardinalidad del conjunto $AB = \{ab : a \in A, b \in B\}$, donde A y B son subconjuntos no vacíos de un grupo G. El enfoque directo consiste en determinar la función

$$\mu_G(r, s) = \min\{|AB| : A, B \subseteq G, |A| = r, |B| = s\},$$

en términos de r y s. Por otra parte, el enfoque inverso busca describir la estructura y propiedades de los subconjuntos A y B para los cuales el conjunto producto AB alcanza dicho valor mínimo. En este contexto, Eliahou, Kervaire y Plagne [4, 5] demostraron que para cualquier grupo abeliano se tiene la igualdad $\mu_G(r, s) = \kappa_G(r, s)$, donde κ_G es la función aritmética dada por

$$\kappa_G(r, s) := \min_{d \in \mathcal{H}(G)} \left\{ \left(\left\lceil \frac{r}{d} \right\rceil + \left\lceil \frac{s}{d} \right\rceil - 1 \right) d \right\}$$

con $\mathcal{H}(G)$ el conjunto de órdenes de subgrupos finitos de G. Por otra parte, de acuerdo con los trabajos de Eliahou y Kervaire [6, 7], para todo grupo soluble finito G se satisface la desigualdad

$$\mathcal{D}\kappa_G(r, s) \leq \mu_G(r, s) \leq \mathcal{N}\kappa_G(r, s) \tag{1}$$

donde

$$\mathcal{D}\kappa_G(r, s) := \min_{d \in \mathcal{D}(G)} \left\{ \left(\left\lceil \frac{r}{d} \right\rceil + \left\lceil \frac{s}{d} \right\rceil - 1 \right) d \right\}, \quad \mathcal{N}\kappa_G(r, s) := \min_{d \in \mathcal{N}(G)} \left\{ \left(\left\lceil \frac{r}{d} \right\rceil + \left\lceil \frac{s}{d} \right\rceil - 1 \right) d \right\},$$

siendo $\mathcal{D}(G)$ y $\mathcal{N}(G)$ el conjunto de los divisores de $|G|$ y el conjunto de órdenes de subgrupos normales de G, respectivamente. La relación que se establece en el caso abeliano motiva el estudio de las condiciones bajo las cuales

$$\mu_G(r, s) = \kappa_G(r, s) \tag{2}$$

también se satisface para grupos no abelianos. Entre las clases más relevantes para este estudio se encuentran los grupos metacíclicos no abelianos, cuya estructura proporciona un marco adecuado para extender los resultados conocidos en el contexto abeliano.

Un grupo G se denomina metacíclico si posee un subgrupo normal cíclico N tal que el cociente G/N también es cíclico. Un resultado clásico de Hölder [9] establece que todo grupo metacíclico finito admite una presentación de la forma

$$G = \langle a, b \mid a^m = 1,\ b^n = a^t,\ bab^{-1} = a^s \rangle, \tag{3}$$

donde la tupla de enteros (m, n, t, s) satisface las condiciones $s^n \equiv 1 \pmod{m}$ y $t(s-1) \equiv 0 \pmod{m}$. La igualdad (2) se ha establecido para distintas familias de grupos metacíclicos, entre las cuales se encuentran: D_{2n} caracterizado por la tupla $(n, 2, 0, -1)$ [7], Q_{4n} caracterizado por $(2n, 2, n, -1)$ [1, 8], $U_{m,n}$ dado por la tupla $(2n, m, 0, -1)$ [1, 8], $K_{m,2n}$ definido por $(m, 2n, t, -1)$ [1].

La igualdad entre μ_G y κ_G no se satisface en general para grupos no abelianos. Un caso relevante corresponde a los grupos no abelianos de orden pq, con $p > q$ primos impares, los cuales son metacíclicos. En un trabajo inicial, Deckelbaum [3] estudió el caso $3p$, y posteriormente, Berchenko-Kogan [2] extendió este resultado describiendo la función $\mu_G(r, s)$ al caso general. Específicamente, se demostró que

$$\mu_G(r,s) = \begin{cases} \mathcal{N}_{\kappa_G}(r,s) & \text{si } r, s > q \text{ y } \left\lceil \frac{r}{q} \right\rceil + \left\lceil \frac{s}{q} \right\rceil < p, \\ \kappa_G(r,s) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Una estrategia para abordar este problema en familias de grupos metacíclicos consiste en utilizar la relación (1) y estudiar en qué pares (r, s) los extremos coinciden. En este sentido, el objetivo de la charla es presentar avances en el estudio de la función $\mu_G(r, s)$ en grupos metacíclicos no abelianos de orden $3p^2$.

Referencias

[1] Benavides, F. A., Mutis, W. F. (2025). Minimal product set in non-abelian metacyclic groups of even order. arXiv:2505.08887.

[2] Berchenko-Kogan, Y. (2012). Minimum product set sizes in nonabelian groups. *J. Number Theory* 132(10): 2316–2335. DOI: 10.1016/j.jnt.2012.04.015.

[3] Deckelbaum, A. (2009). Minimum product set sizes in nonabelian groups of order pq. *J. Number Theory* 129(6): 1234–1245. DOI: 10.1016/j.jnt.2008.11.008.

[4] Eliahou, S., Kervaire, M., Plagne, A. (2003). Optimally small sumsets in finite abelian groups. *J. Number Theory* 101(2): 338–348. DOI: 10.1016/S0022-314X(03)00078-4.

[5] Eliahou, S., Kervaire, M. (2006). Sumsets in dihedral groups. *European J. Combin.* 27(4): 617–628. DOI: 10.1016/j.ejc.2004.12.003.

[6] Eliahou, S., Kervaire, M. (2007). Bounds on the minimal sumset size function in groups. *Int. J. Number Theory* 3(4): 503–511. DOI: 10.1142/S179304210700109X.

[7] Eliahou, S., Kervaire, M. (2010). Minimal sumsets in finite solvable groups. *Discrete Math.* 310(3): 471–479. DOI: 10.1016/j.disc.2009.03.024.

[8] Kaur, R., Singh, S. (2024). Sumsets in dicyclic groups Q_{4n} and $U_{m,n}$. *Commun. Algebra* 52(3): 1255–1259. DOI: 10.1080/00927872.2023.2274744.

[9] Yang, X. (2020). The subgroups of finite metacyclic groups. *Chinese Ann. Math. Ser. B* 41(2): 241–266. DOI: 10.1007/s11401-020-0201-1.

Estructura de conjuntos B_h de tipo Bose–Chowla mediante rectas afines y q-trinomios

Carlos Alexis Gómez Ruiz

[1] Universidad del Valle, Cali, Colombia

✉ carlos.a.gomez@correounivalle.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. En esta charla se presentará una reinterpretación de la construcción clásica de Bose–Chowla de conjuntos B_h a través de rectas afines sobre cuerpos finitos y de trinomios de la forma $x^q - ax - b$. Este trabajo hace parte de una investigación en conjunto con H. Navarro y J. M. Velásquez.

Palabras claves. Conjuntos B_h; construcción de Bose–Chowla; Cuerpos finitos.

Los conjuntos B_h, también conocidos como conjuntos de Sidon cuando $h = 2$, constituyen un tema central en combinatoria aditiva. En términos generales, un subconjunto A de un grupo abeliano G (multiplicativo) se dice un conjunto B_h si todos los productos de h elementos de A son distintos salvo permutación. Este tipo de estructura ha sido ampliamente estudiada debido a sus conexiones con el análisis armónico y la teoría de códigos.

El punto de partida de esta presentación es observar que la construcción de Bose–Chowla [2] puede entenderse como el conjunto de exponentes asociado a una recta afín en el grupo multiplicativo de un cuerpo finito. Esta perspectiva permite relacionar la propiedad B_h con la estructura algebraica de las raíces de polinomios linealizados afines.

Uno de los resultados principales que se discutirá consiste en establecer condiciones suficientes para que el grado del producto de dos elementos algebraicos sobre un cuerpo finito sea exactamente el mínimo común múltiplo de sus grados. Este resultado algebraico sirve como herramienta para garantizar que ciertas rectas afines

$$\mathcal{H}_{\theta,\beta} = \theta + \mathrm{span}_{\mathbb{F}_q}(\beta)$$

posean estructura de conjunto B_h en el grupo multiplicativo correspondiente.

Además, se mostrará cómo los conjuntos de raíces de q-trinomios pueden dar lugar a conjuntos B_h, bajo condiciones explícitas en términos de norma, traza y grado.

Referencias

[1] Bose, R. C. (1942). An affine analogue of Singer's theorem. *Journal of the Indian Mathematical Society* 6: 1–15.

[2] Bose, R. C., Chowla, S. (1962). Theorems in the additive theory of numbers. *Commentarii Mathematici Helvetici* 37: 141–147.

[3] Lindström, B. (1998). Finding finite B_2 sequences faster. *Mathematics of Computation* 67:1173–1178.

Sobre construcciones de conjuntos B_h en cuerpos finitos

Angie M. Cerón P.[1], Carlos A. Trujillo S.[1], John H. Castillo[2]

[1] Universidad del Cauca, Popayán, Colombia

[2] Universidad de Nariño, Pasto, Colombia

✉ angieceron@unicauca.edu.co, trujillo@unicauca.edu.co, jhcastillo@udenar.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. En esta charla se estudian tres construcciones clásicas de conjuntos B_h y sus respectivas implementaciones en `SageMath`: J. Singer (1938), R.C. Bose and S. Chowla (1962) y I. Z. Ruzsa (1993). Adicionalmente, se exploran aspectos relacionados a las construcciones dadas por C. Gómez y C. Trujillo (2011) y V. Guerrero, J. Castillo y C. Trujillo (2024).

Palabras claves. Conjuntos B_h, cuerpos finitos, construcciones, `SageMath`.

Sean $(G,+)$ un grupo conmutativo con notación aditiva, $h \geq 2$ un entero y $A = \{g_1, g_2, \ldots, g_k\} \subset G$. Se dice que A es un conjunto B_h en G si todas las sumas de h elementos de A (no necesariamente distintos) son diferentes. Es decir, si todas las sumas de la forma

$$g_{i_1} + g_{i_2} + \cdots + g_{i_h}, \text{ con } 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_h \leq k,$$

producen elementos distintos en G.

Cuando $h = 2$, los conjuntos B_2 se conocen como *Conjuntos Sidon*. Si A es un conjunto B_h en G se escribe $A \in B_h(G)$ y si A es un conjunto B_h en $\mathbb{Z}_n$ se escribe $A \in B_h(mod\ n)$ y se llama *conjunto B_h módulo n*. En esta charla se estudia la implementación en `SageMath` de las tres construcciones clásicas de conjuntos B_h, que se basan en los siguientes resultados:

Teorema 1 (Construcción de Bose-Chowla, 1962)**.** *Para toda potencia prima q y todo $h \geq 2$ entero, existe un conjunto $B_h(\text{mód } q^h - 1)$ con q elementos.*

Teorema 2 (Construcción de Singer generalizada, Bose-Chowla, 1962)**.** *Para toda potencia prima q y todo $h \geq 2$ entero, existe un conjunto $B_h(\text{mód } m)$ con $q+1$ elementos, donde $m = (q^{h+1} - 1)/q - 1$.*

Teorema 3 (Construcción de Ruzsa, 1993)**.** *Para todo primo p, existe una colección $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$ de $p-1$ enteros, que es un conjunto de Sidon módulo $p^2 - p$.*

En la siguiente construcción se obtiene un conjunto B_h a partir de un conjunto B_{h-1} tipo Bose-Chowla. Considere el cuerpo finito $\mathbb{F}_{p^{h-1}}$, para $h \geq 3$ entero y θ un elemento primitivo de este. La siguiente construcción de conjuntos B_h es una construcción en dimensión dos en el grupo $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{p^{h-1}-1}$.

Teorema 4 (Un conjunto B_h a partir de un conjunto B_{h-1})**.** *Para todo primo p y todo $h \geq 3$ entero, existe una colección $x_1, x_2, \ldots, x_p$ de p enteros, que es conjunto B_h módulo $p^h - p$.*

Referencias

[1] Bose, R. C. (1942). An affine analogue Singer's theorem, *J. Ind. Math. Soc.* (new series), 6, pp. 1-15.

[2] Bose, R. C., Chowla, S. (1962). Theorems in the additive theory of numbers, *Comment. Math. Helv.*, 37(1962/1963), pp. 141-147.

[3] García, G., Trujillo, C., Velásquez, J. (2006). Construcción de conjuntos Bh módulo m y particiones, *Matemáticas: Enseñanza Universitaria*, 14, pp. 65-70.

[4] Guerrero Pantoja, V. C., Castillo, J. H., Trujillo Solarte, C. A. (2024). S_h-sets and linear codes over $\mathbb{F}_q$. 18 pp. arXiv: 2411.19413

[5] Gómez, C. A. (2008). Construcción de conjuntos B_h sobre grupos y códigos. Tesis de Maestría. Universidad del Valle, Cali, Colombia.

[6] Graham, R. L., Sloane, N. J. A. (1980). Lower bounds for constant weight codes, *IEEE Transations on Information Theory*, (1980), pp. 37-43.

Pell numbers as product of two generalized Fibonacci numbers

Jose L. Herrera[1], Jhon J. Bravo[1], Pranabesh Das[2], John C. Saunders[3]

[1] Universidad del Cauca, Popayán, Colombia
[2] Xavier University of Louisiana, Louisiana, United States of America
[3] Middle Tennessee State University, Tennessee, United States of America
✉ joseherrera@unicauca.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Abstract. For a fixed integer $k \geq 2$, the k-Fibonacci sequence generalizes the classic Fibonacci numbers by defining each term as the sum of the preceding k terms. In this talk, we determine all Pell numbers that can be written as the product of two k-Fibonacci numbers. Our proof employs lower bounds for linear forms in logarithms, continued fractions, and a variation of the Dujella-Pethő reduction method. This work generalizes a prior result of Alekseyev which dealt with determining the intersection of the Fibonacci and Pell sequences, a work of Ddamulira, Luca and Rakotomalala who searched for Pell numbers which are products of two Fibonacci numbers, and a result of Bravo, Gómez and Herrera who found all Pell numbers appearing in the k-Fibonacci sequence.

Keywords. k-Fibonacci sequence, Pell sequence, linear form in logarithms, reduction method.

Introduction

For an integer $k \geq 2$, we consider the k-generalized Fibonacci sequence or, for simplicity, the k-Fibonacci sequence $F^{(k)} = (F_n^{(k)})_{n \geq 2-k}$ which is a linear recurrence sequence of order k defined by the relation

$$F_n^{(k)} = F_{n-1}^{(k)} + F_{n-2}^{(k)} + \cdots + F_{n-k}^{(k)} \quad \text{for all} \quad n \geq 2,$$

with $F_{-(k-2)}^{(k)} = F_{-(k-3)}^{(k)} = \cdots = F_0^{(k)} = 0$ and $F_1^{(k)} = 1$ as initial conditions. We usually call $F_n^{(k)}$ the nth k-Fibonacci number. Observe that the famous Fibonacci sequence $(F_n)_{n \geq 0}$ coincides with $F^{(2)}$.

A wide range of recent studies have focused on the problem of determining all k-Fibonacci numbers that admit a special representation. For instance, in 2016, Bravo and Gómez [2] determined all terms in $F^{(k)}$ that are one less than a power of 2. In another work, Bravo, Gómez and Luca [6] identified all terms in $F^{(k)}$ that can be written as the sum of two repdigits, while Bravo and Luca [8] characterized all repdigits that can be expressed as the sum of two k-Fibonacci numbers. In addition, Bravo, Gómez and Luca [5] found all powers of 2 that are the sum of two k-Fibonacci numbers.

Another notable sequence in number theory is the Pell sequence $(P_\ell)_{\ell \geq 0}$, which is defined by the recurrence $P_\ell = 2P_{\ell-1} + P_{\ell-2}$ for all $\ell \geq 2$, with $P_0 = 0$ and $P_1 = 1$ as initial conditions. Extensive research has been dedicated to Diophantine equations involving Pell numbers and Fibonacci numbers of order k. For example, Alekseyev [1] proved that the only integers belonging to both the Fibonacci and Pell sequences are $0, 1, 2, 5$. Bravo, Gómez and Herrera [4] extended these findings to the Pell and k-Fibonacci sequences, showing that for every $k \geq 2$, the only nontrivial common terms are 5 and 29. Furthermore, Bravo, Herrera and Luca [7] provided a broader generalization by determining all integers that appear in both generalized Pell and generalized Fibonacci sequences.

This line of research has been extended to the broader problem of determining all terms in a given sequence that can be expressed as products of terms from another sequence. For instance, in 2016,

Ddamulira, Luca and Rakotomalala [9] proved that the only Fibonacci numbers that are the product of two Pell numbers are $1, 2, 5, 144$, and the only Pell numbers that are the product of two Fibonacci numbers are $1, 2, 5, 169$. Rihane, Akrour and Habibi [10] also found all Fibonacci numbers that are the product of three Pell numbers and all Pell numbers that are the product of three Fibonacci numbers. Moreover, Rihane [11] characterizes all terms in the k-Fibonacci sequences that are products of two terms in the Pell sequence.

In this talk, we consider the inverse of Rihane's problem and determine all Pell numbers that can be expressed as a product of two k-Fibonacci numbers. In this sense, our main result is as follows:

Teorema 1 (Bravo, Das, Herrera and Saunders [3])**.** *All positive integer solutions* (n, m, k, ℓ) *of the Diophantine equation*

$$F_n^{(k)} F_m^{(k)} = P_\ell,$$

with $k \geq 2$ *and* $n \geq m \geq 3$*, are* $(n, m, k, \ell) = (7, 7, 2, 7), (6, 6, 3, 7), (15, 3, 5, 12)$.

References

[1] Alekseyev, M. A. (2011). On the intersections of Fibonacci, Pell, and Lucas numbers. *Integers* 11(3): 239–259. DOI: 10.1515/integ.2011.021.

[2] Bravo, J. J., Gómez C. A. (2016). Mersenne k-Fibonacci numbers. *Glas. Mat. Ser. III* 51(2): 307–319. DOI: 10.3336/gm.51.2.02.

[3] Bravo, J. J., Das P., Herrera J.L., Saunders J. C. 13 pp. arXiv:2507.13674 (in press).

[4] Bravo, J. J., Gómez C. A., Herrera J.L. (2019). On the intersection of k-Fibonacci and Pell numbers. *Bull. Korean Math. Soc.* 56(2): 535–547. DOI: 10.4134/BKMS.b180417.

[5] Bravo, J. J., Gómez C. A., Luca F. (2016). Powers of two as sums of two k-Fibonacci numbers. *Miskolc Math. Notes* 17(1): 85–100. DOI: 10.18514/mmn.2016.1505.

[6] Bravo, J. J., Gómez C. A., Luca F. (2018). A Diophantine equation in k-Fibonacci numbers and repdigits. *Colloq. Math.* 152(2): 299–315. DOI: 10.4064/cm7149-6-2017.

[7] Bravo, J. J., Herrera J.L., Luca F. (2021). Common values of generalized Fibonacci and Pell sequences. *J. Number Theory* 226: 51–71. DOI: 10.1016/j.jnt.2021.03.001.

[8] Bravo, J. J., Luca F. (2015). Repdigits as sums of two k-Fibonacci numbers. *Monatsh. Math.* 176(1): 31–51. DOI: 10.1007/s00605-014-0622-6.

[9] Ddamulira M., Luca F., Rakotomalala M. (2016). Fibonacci numbers which are products of two Pell numbers. *Fibonacci Quart.* 54(1): 11–18. DOI: 10.1080/00150517.2016.12427833.

[10] Rihane S., Youssouf A., Habibi A. E. (2020). Fibonacci numbers which are products of three Pell numbers and Pell numbers which are products of three Fibonacci numbers. *Bol. Soc. Mat. Mex.* 26(3): 895–910. DOI: 10.1007/s40590-020-00296-x.

[11] Rihane S. (2024). On k-Fibonacci and k-Lucas numbers written as a product of two Pell numbers. *Bol. Soc. Mat. Mex.* 30(1): 1–20. DOI: 10.1007/s40590-024-00593-9.

Sobre el comportamiento asintótico de una torre de tipo Artin–Schreier

Horacio Navarro

Universidad del Valle, Cali, Colombia
✉ horacio.navarro@correounivalle.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. En esta charla respondemos al problema propuesto por Beelen, García y Stichtenoth en 2006 sobre el comportamiento asintótico de una torre de cuerpos de funciones de tipo Artin–Schreier sobre un cuerpo finito con 2^s elementos. En particular, determinamos el comportamiento asintótico de la torre en términos de la paridad de s.

Palabras claves. Torres de cuerpos de funciones recursivas, comportamiento asintótico, torres de tipo Artin–Schreier.

Una *torre* $\mathcal{F}$ (de cuerpos de funciones) sobre un cuerpo finito $\mathbb{F}_q$ con q elementos es una sucesión $\mathcal{F} = \{F_i\}_{i=0}^{\infty}$ de cuerpos de funciones sobre $\mathbb{F}_q$ tal que

1. $F_i \subsetneq F_{i+1}$ para todo $i \geq 0$.
2. La extensión F_{i+1}/F_i es finita y separable, para todo $i \geq 1$.
3. El cuerpo $\mathbb{F}_q$ es algebraicamente cerrado en F_i, para todo $i \geq 0$.
4. El género $g(F_i) \to \infty$ cuando $i \to \infty$.

Una torre $\mathcal{F} = \{F_i\}_{i=0}^{\infty}$ sobre $\mathbb{F}_q$ se denomina *recursiva* si existen una sucesión de elementos trascendentales $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ sobre $\mathbb{F}_q$ y un polinomio en dos variables $H(X,Y) \in \mathbb{F}_q[X,Y]$ tales que $F_0 = k(x_0)$ y

$$F_{i+1} = F_i(x_{i+1}),$$

donde $H(x_i, x_{i+1}) = 0$ para todo $i \geq 0$. El *género* $\gamma(\mathcal{F})$ de $\mathcal{F}$ sobre F_0 se define por

$$\gamma(\mathcal{F}) := \lim_{i\to\infty} \frac{g(F_i)}{[F_i : F_0]}\,.$$

la *tasa de descomposición* $\nu(\mathcal{F})$ de $\mathcal{F}$ sobre F_0 se define como

$$\nu(\mathcal{F}) := \lim_{i\to\infty} \frac{N(F_i)}{[F_i : F_0]}\,.$$

donde $N(F_i)$ denota el número de lugares racionales (de grado uno) de F_i.

Una torre $\mathcal{F}$ sobre $\mathbb{F}_q$ se denomina *asintóticamente buena* si $\nu(\mathcal{F}) > 0$ y $\gamma(\mathcal{F}) < \infty$. En caso contrario, $\mathcal{F}$ se denomina *asintóticamente mala*. Equivalentemente, una torre $\mathcal{F}$ es asintóticamente buena sobre $\mathbb{F}_q$ si y solo si el *límite* de la torre $\mathcal{F}$,

$$\lambda(\mathcal{F}) := \lim_{i\to\infty} \frac{N(F_i)}{g(F_i)} = \frac{\nu(\mathcal{F})}{\gamma(\mathcal{F})},$$

es positivo.

En 2006 [1] P. Beelen, A. Garcia y H. Stichtenoth iniciaron la clasificación, de acuerdo a su comportamiento asintótico, de torres recursivas de cuerpos de funciones sobre $\mathbb{F}_q$. Se enfocaron en torres recursivas

definidas por ecuaciones de la forma $f(y) = g(x)$, donde f y g son funciones adecuadas sobre $\mathbb{F}_q$. Las torres definidas de esta manera fueron llamadas torres (f, g) sobre $\mathbb{F}_q$. En particular, observaron que muchas torres (f, g) pueden definirse recursivamente mediante ecuaciones de la forma

$$h(y) = A \cdot h(B \cdot x)$$

para algún polinomio h sobre $\mathbb{F}_q$ y A, $B \in GL(2, \mathbb{F}_q)$. Aquí el símbolo $A \cdot u$ representa la acción usual de los elementos de $GL(2, \mathbb{F}_q)$ como transformaciones fraccionarias, es decir,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot u := \frac{au + b}{cu + d}.$$

Esta fue una observación clave que les permitió obtener resultados de clasificación en los importantes casos de torres recursivas de tipo Kummer y Artin–Schreier. Como aplicación de estos resultados, proporcionaron una lista completa de todas las torres (f, g) de tipo Artin–Schreier con $\deg f = \deg g = 2$ sobre el cuerpo finito $\mathbb{F}_2$. Verificaron que todos los casos posibles ya habían sido considerados en trabajos anteriores, excepto la siguiente torre de Artin–Schreier $\mathcal{H}$, definida recursivamente por la ecuación

$$y^2 + y = \frac{x}{x^2 + x + 1}, \tag{1}$$

sobre $\mathbb{F}_2$. Sobre esta torre plantearon como problema abierto determinar cuándo la ecuación anterior (1) define una torre asintóticamente buena sobre $\mathbb{F}_{2^s}$ con $s \geq 1$. El propósito de esta charla es mostrar que $\mathcal{H}$ es una torre asintóticamente buena sobre $\mathbb{F}_{2^s}$ para s par y asintóticamente mala sobre $\mathbb{F}_{2^s}$ para s impar; ver [2] y [3], respectivamente.

Referencias

[1] Beelen, P., A. Garcia, A., and Stichtenoth, H. (2006). Towards a classification of recursive towers of function fields over finite fields *Finite Fields Appl.* 12(1): 56–77.

[2] Chara, M., Navarro, H., and Toledano, R. (2018). A problem of Beelen, Garcia and Stichtenoth on an Artin–Schreier tower in characteristic two. *Acta Arith.* 182(4): 311–330.

[3] Navarro, H. (2020). On the splitting rate of a tower of Artin–Schreier type. *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.* 44(173): 1167–1173.

Valuación 3-ádica de los números de Padovan

Sergio Luis Agredo[1], Jose Luis Herrera[1], Jhon Jairo Bravo[1]

[1] Universidad del Cauca, Popayán, Colombia

✉ seragredo@unicauca.edu.co, joseherrera@unicauca.edu.co, jbravo@unicauca.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. El estudio de propiedades de divisibilidad de sucesiones lineales recurrentes ha despertado un creciente interés en los últimos años, particularmente desde la perspectiva de las valuaciones p-ádicas. La valuación p-ádica de un entero positivo n es el exponente de la mayor potencia de un primo p que divide a n. En esta línea, se han caracterizado las valuaciones p-ádicas de sucesiones clásicas como Fibonacci y Tribonacci, esta última una extensión de orden tres de la sucesión de Fibonacci. La sucesión de Padovan, definida por $P_n = P_{n-2} + P_{n-3}$ para todo $n \geq 3$, con $P_0 = 0$ y $P_1 = P_2 = 1$, también ha sido estudiada desde esta perspectiva. En particular, Irmak [3] determinó la valuación 2-ádica de sus términos. Motivados por este antecedente, en esta ponencia estudiamos la valuación 3-ádica de la sucesión de Padovan, describiendo patrones de divisibilidad por potencias de 3 y propiedades de periodicidad asociadas. Estos resultados amplían el conocimiento sobre las valuaciones p-ádicas de sucesiones recurrentes y sugieren nuevas líneas de investigación para otros primos y familias de sucesiones lineales recurrentes.

Palabras claves. Número de Padovan, valuación p-ádica, divisibilidad.

Introducción

Los números de Padovan forman una sucesión lineal recurrente de orden tres definida por $P_0 = 0$, $P_1 = P_2 = 1$, y por la relación

$$P_n = P_{n-2} + P_{n-3} \quad \text{para todo} \quad n \geq 3.$$

Los primeros términos de esta sucesión son

$$0, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21, 28, 37, 49, \ldots.$$

Las propiedades de divisibilidad de sucesiones lineales recurrentes han sido objeto de creciente interés en teoría de números. Una herramienta fundamental para estudiar dichas propiedades es la valuación p-ádica, también llamada orden p-ádico, la cual mide el grado de divisibilidad de un entero por las potencias de un primo p. Esta función se denota por $v_p(n)$ y se define mediante

$$v_p(n) = k \quad \Longleftrightarrow \quad p^k \mid n \quad \text{y} \quad p^{k+1} \nmid n.$$

En otras palabras, $v_p(n)$ es el exponente de la mayor potencia de p que divide a n.

El estudio de las valuaciones p-ádicas de términos de sucesiones lineales recurrentes ha permitido describir patrones de divisibilidad y abordar diversos problemas Diofánticos. Por ejemplo, Marques y Lengyel [4] caracterizaron la valuación 2-ádica de los números de Tribonacci y, como aplicación, determinaron todos los términos factoriales presentes en dicha sucesión. Posteriormente, Bravo, Díaz y Ramírez [2] estudiaron la sucesión Tripell, una extensión de orden tres de la sucesión de Pell, caracterizando sus valuaciones 2-ádica y 3-ádica y determinando también sus términos factoriales. Más recientemente,

Alahmadi y Luca [1] utilizaron resultados de esta naturaleza para caracterizar los números de Tribonacci que pueden expresarse como producto de factoriales.

En el caso de la sucesión de Padovan, Irmak [3] estudió la valuación 2-ádica de sus términos. Motivados por este antecedente, en este trabajo nos concentramos en la valuación 3-ádica de los números de Padovan, $v_3(P_n)$. Este análisis equivale a determinar el exponente de la mayor potencia de 3 que divide a cada término de la sucesión.

Nuestro objetivo es describir el comportamiento de la sucesión $(v_3(P_n))_{n\geq 0}$, estableciendo patrones de divisibilidad y propiedades de periodicidad. El siguiente teorema recoge los resultados principales obtenidos y demostrados por los autores en este trabajo.

Teorema 1. *La valuación 3-ádica del n-ésimo número de Padovan está dada por:*

$$v_3(P_n) = \begin{cases} 0, & si\ n \equiv 0,1,2,3,4,6,7,8,11 \pmod{13}, \\ v_3(n+8)+1, & si\ n \equiv 5 \pmod{13}, \\ 2, & si\ n \equiv 9,48,87 \pmod{117}, \\ 3, & si\ n \equiv 22,35,61,74 \pmod{117}, \\ v_3(n+17)+2, & si\ n \equiv 100 \pmod{117}, \\ v_3(n+4)+2, & si\ n \equiv 113 \pmod{117}, \\ v_3(n+3)+1, & si\ n \equiv 10 \pmod{13}, \\ v_3(n+1)+1, & si\ n \equiv 12 \pmod{13}. \end{cases}$$

El Teorema 1 muestra que la valuación 3-ádica de la sucesión de Padovan presenta una estructura periódica que puede describirse explícitamente en función del índice n. Esta caracterización proporciona información detallada sobre la divisibilidad de los términos de la sucesión por potencias de 3 y permite abordar problemas Diofánticos asociados a la sucesión de Padovan. En particular, los resultados obtenidos constituyen una herramienta eficaz para acotar el conjunto de posibles soluciones en este tipo de ecuaciones.

Referencias

[1] Alahmadi, A., Luca, F. (2023). On Tribonacci numbers that are products of factorials. *Journal of Integer Sequences*. 26, Article 23.2.2.

[2] Bravo, J., Díaz, M., Ramírez, J. (2020). *The 2-adic and 3-adic valuation of the Tripell sequence and an application*. Turkish Journal of Mathematics. 44(1): 131–141.

[3] Irmak, N. (2019). On factorials in Perrin and Padovan sequences. *Turkish Journal of Mathematics*. 43(5): 2602–2609.

[4] Marques, D., Lengyel, T. (2014). The 2-adic order of the Tribonacci numbers and the equation $T_n = m!$. *Journal of Integer Sequences*. 17, Article 14.10.1.

Pósteres Teoría de Números

Comité Científico: Mario Huicochea (Universidad Autónoma de Zacatecas, México), Amalia Pizarro Madariaga (Universidad de Valparaiso, Chile), Jhon Jairo Bravo (Universidad del Cauca, Colombia).

- ⋆ **Familias y funciones multiplicativas**, Mario José Mercado Guzmán, Gustavo Berrio Lee, Jerson Borja, Universidad de Córdoba, Colombia.
- ⋆ **Sobre la caracterización de los primos de Sophie Germain**, Luis Daniel Maya Zura, Wilson Mutis, Universidad de Nariño, Colombia.
- ⋆ **Patrones Golomb y la plataforma GRASP**, Claudia Alejandra Florez Solarte, John H. Castillo, Viviana C. Guerrero, Universidad de Nariño, Colombia.

Familias y Funciones Multiplicativas

Gustavo Berrio Lee[1], Mario Mercado Guzmán[1], Jerson Borja Soto[1]

[1] Universidad de Córdoba, Montería, Colombia

✉ gberriolee91@correo.unicordoba.edu.co, mariojmercado@correo.unicordoba.edu.co, jersonborjas@correo.unicordoba.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. Para familias de conjuntos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ tales que $A_n \subseteq \{0,1,\ldots,n-1\}$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, se introducen en [1, 2] las definiciones de familias multiplicativas, familias asociadas a un polinomio, y se establecen condiciones suficientes para que una familia sea multiplicativa. En este trabajo, mostramos que no toda familia multiplicativa está asociada a un polinomio, que ciertas condiciones suficientes para garantizar que una familia sea multiplicativa no son necesarias, y que para cada función multiplicativa α que toma valores enteros tal que $1 \leq \alpha(n) \leq n$, existen infinitas familias multiplicativas $\{A_n\}_n$ que cumplen $\alpha(n) = |A_n|$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

Palabras claves. Función Multiplicativa, Familia de Conjuntos, Congruencia

Introducción

Para una familia de conjuntos finitos no vacíos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ con $A_n \subseteq J_n = \{0,1,\ldots,n-1\}$, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, definimos la *función asociada* α mediante $\alpha(n) = |A_n|$, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Si $1 \leq m \leq n$, definimos

$$A_{n,m} = \{x \in J_n : x \equiv a(\text{mód}m) \text{ para algún } a \in A_m\}.$$

Si m divide a n, entonces

$$A_{n,m} = \{a + jm : 0 \leq j < n/m \; a \in A_m\}.$$

Decimos que $\{A_n\}_n$ es *multiplicativa* si se cumple

$$A_n = A_{n,m_1} \cap A_{n,m_2},$$

siempre que $n = m_1 m_2$ con $\text{mcd}(m_1, m_2) = 1$.

En [1, 2] se mostraron los siguientes resultados:

1. Si $\{A_n\}_n$ es multiplicativa, entonces la función asociada α es una función multiplicativa.
2. Si se cumplen las siguientes dos condiciones, entonces $\{A_n\}_n$ es multiplicativa:

   C1. Si $m|n$ y $a \in A_n$, entonces a $(\text{mód}m) \in A_m$, donde a $(\text{mód}m)$ es el residuo de a al dividirlo por m.

   C2. Sea $n = m_1 m_2$ donde $\text{mcd}(m_1, m_2) = 1$. Para cada $a_1 \in A_{m_1}$ y cada $a_2 \in A_{m_2}$, si a es la única solución en J_n del sistema de congruencias

   $$\begin{cases} x \equiv a_1(\text{mód}m_1), \\ x \equiv a_2(\text{mód}m_2), \end{cases}$$

   entonces $a \in A_n$.

3. Para un polinomio $f(x_1, x_2, \ldots, x_t)$ en t variables con coeficientes enteros se define $\{A_n^{(f)}\}_n$ de la siguiente manera:

$$A_n^{(f)} = \{a \in J_n : f(x_1, x_2, \ldots, x_t) \equiv a (\text{mód} m) \quad \text{tiene solución.}\}$$

Entonces, esta familia $\{A_n^{(f)}\}_n$ satisface $C1$ y $C2$.

Este trabajo se origina al intentar responder las siguientes tres preguntas:

1. ¿Existen familias multiplicativas que no satisfacen $C1$ o $C2$?
2. ¿Existen familias que satisfacen $C1$ y $C2$, pero no son iguales a la familia asociada a ningún polinomio?
3. ¿Para toda función multiplicativa α que toma valores enteros con $1 \leq \alpha(n) \leq n$, existe una familia multiplicativa $\{A_n\}_n$ tal que $\alpha(n) = |A_n|$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$?

Para la primera pregunta mostramos que toda familia multiplicativa satisface $C2$, pero existen familias multiplicativas que no satisfacen $C1$. Además, mostramos que existen familias que satisfacen $C2$ pero no son multiplicativas.

La respuesta a la segunda pregunta es afirmativa. De hecho, la familia $\{\Phi_n\}_n$, donde Φ_n es el conjunto de elementos $j \in J_n$ que son primos relativos con n, no es igual a la familia asociada a ningún polinomio. La función asociada a esta familia es la función φ de Euler, y veremos que los resultados acerca de familias multiplicativas nos permitirán obtener una prueba de la multiplicatividad de esta función.

La respuesta a la tercera pregunta es afirmativa. Más aún, logramos mostrar que que para cada función α con las características indicadas, existen infinitas familias que satisfacen la condición requerida en esta pregunta, las cuales quedan completamente determinadas por los subconjuntos A_{p^k} donde p es primo y $k \in \mathbb{Z}^+$.

Referencias

[1] Arias, F., Borja, J., Anaya, S. (2023). Counting integers representable as sums of k-th powers modulo n. *J. Integer Sequences.* 26: Article. 23. 8. 1.

[2] Arias, F., Borja, J., Rubio, L. (2019). Counting integers representable as images of polynomial modulo n. *J. Integer Sequences.* 22: Article. 19. 6. 7.

Sobre la caracterización de los primos de Sophie Germain

Luis Maya [1], Wilson Mutis [1]

[1] Universidad de Nariño, Pasto, Colombia

✉ ldmaya22A@udenar.edu.co, wilsonmutis@udenar.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. Un número primo p se denomina primo de Sophie si $2p+1$ también es primo. En ese caso, el número $2p+1$ recibe el nombre de primo seguro. Estos números tienen aplicaciones en criptografía de clave pública, generación de números pseudoaleatorios y pruebas de primalidad.
Los primos de Sophie fueron introducidos por la matemática francesa Sophie Germain $(1776-1831)$ en un estudio sobre el Último Teorema de Fermat. Ella demostró que si p y $2p+1$ son números primos, la ecuación

$$x^p + y^p = z^p$$

no tiene soluciones enteras no triviales cuando $p \nmid xyz$. El resultado es conocido como el primer caso del Último teorema de Fermat.
La conjetura de las k-tuplas primas de Hardy-Littlewood [1] está relacionada con la conjetura sobre la infinitud de los primos de Sophie. En particular, para los pares de primos $(p, 2p+1)$, se conjetura que

$$\pi_G(x) \sim 2C_2 \frac{x}{(\log x)^2}$$

donde $\pi_G(x) = \#\{p < x : p, 2p+1 \text{ son primos}\}$ y $C_2 \approx 0{,}6601618$ es la constante de los primos gemelos.
En [2], Leonetti relaciona los primos de Sophie con los enteros "agradables". Un entero n es agradable si existe una permutación $\sigma \in S_n$ tal que el conjunto

$$\left\{1^{\sigma(1)}, ..., n^{\sigma(n)}\right\}$$

es un sistema completo de residuos módulo n. Leonetti muestra que un entero impar n es agradable si, y solo si, n es un primo seguro.
En esta charla se presentarán los principales resultados sobre los primos de Sophie obtenidos por Leonetti en [2] y se expondrán los avances de nuestro trabajo de grado, en el cual estamos completando vacíos argumentativos, con el objetivo de redactar un artículo de divulgación que sirva como material de estudio en futuras investigaciones.

Palabras claves. Primos de Sophie, primo seguro, teoría de números, cuerpos finitos.

Referencias

[1] Fuentes, E. (2023). Affine convolutions, Ramanujan–Fourier expansions and Sophie Germain primes. *Bull. Aust. Math. Soc.* 108(1): 11–18. DOI: 10.1017/S0004972722001137.

[2] Leonetti, P. (2018). A characterization of Sophie Germain primes. *Int. J. Number Theory* 14(6): 1575–1582. DOI: 10.1142/S1793042118500409.

Patrones Golomb y la plataforma GRASP

Claudia A. Florez[1], John H. Castillo[1], Viviana C. Guerrero[1]

[1] Universidad de Nariño, Pasto, Colombia

✉ florezsolartealejandra@gmail.com, jhcastillo@udenar.edu.co, vivianaguerrero@udenar.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. En esta charla, se presentan los principales resultados del artículo "Golomb Patterns, Astrophysics, and Citizen Science Games", ver [4], de los autores Nargess Memarsadeghi, Ryan D. Joseph, John C. Kaufmann y Byung Suk Lee, mostrando la importancia de los patrones Golomb tales como reglas Golomb, rectángulos Golomb y arreglos Costas en aplicaciones relacionadas con la observación del universo. El objetivo principal es describir cómo estos patrones se utilizan en el desarrollo de la plataforma "Game and Repository for Aperture Solutions and Patterns" (GRASP). Para ello, se presentan conceptos básicos de las reglas Golomb y rectángulos Golomb, así como la matriz de auto-correlación, estableciendo la relación entre este tipo de matriz y los rectángulos Golomb. Posteriormente se describe la plataforma GRASP, enfatizando tanto en su funcionamiento como en sus aplicaciones. Por último, se presentan implementaciones realizadas en el software matemático `SageMath` para ilustrar los conceptos estudiados sobre reglas Golomb, rectángulos Golomb y matriz de auto-correlación.

Palabras claves. Reglas Golomb, rectángulos Golomb, arreglos Costas, matriz de auto-correlación, plataforma GRASP.

En matemáticas, los *patrones Golomb* consisten de un conjunto de marcas en una retícula, de tal manera que las distancias no nulas entre las marcas son todas distintas; esto significa que no hay ningún patrón repetido de marcas en tal patrón. Los patrones Golomb han jugado un papel muy importante tanto en los avances matemáticos que se han conseguido en las últimas décadas, como en diversas aplicaciones; tales como la radioastronomía, interferometría y misiones de radar. Otras aplicaciones incluyen radar, sincronización de sonar, etiquetado de redes de comunicación, cifrado, cristalografía de rayos X y teoría de codificación, ver [2, 3, 4]. El juego de ciencia ciudadana "Game and Repository for Aperture Solutions and Patterns (GRASP)" es una plataforma de juegos que tiene aplicaciones en interferometría y misiones espaciales de radar reemplazando un costoso telescopio o antena grande por varios más pequeños, menos costosos y mejor distribuidos.

Por este amplio número de aplicaciones, los patrones Golomb han sido objeto de estudio en diversas investigaciones. El artículo "Golomb Patterns, Astrophysics, and Citizen Science Games", ver [4], establece como base fundamental del juego GRASP a los patrones Golomb.

Los patrones Golomb en una retícula unidimensional se conocen como *reglas Golomb*. Como se indica en [1], estas se definen como un conjunto A de enteros con k elementos o con k marcas, donde las diferencias de la forma $a - a'$, con $a' \neq a$ y $a, a' \in A$, son todas distintas.

En una versión bidimensional los patrones Golomb se llaman *rectángulos Golomb*, estos se definen como una matriz binaria de tamaño $m \times n$, tal que los vectores que se forman entre sus marcas son todos distintos. Cuando el rectángulo Golomb es de tamaño $n \times n$ se conoce con el nombre de arreglo Costas.

Una forma de identificar cuando una matriz binaria es un rectángulo Golomb es a través del concepto de *matriz de auto-correlación*. Esta matriz se interpreta como aquella cuyas entradas se obtienen a partir de los desplazamientos aplicados a una matriz superpuesta en otra. Estas dos matrices corresponden a la matriz binaria y a su respectiva copia.

Por otro lado, la plataforma GRASP está específicamente diseñada para una tarea importante: el diseño de un arreglo de antenas de pequeña apertura, aprovechando la estructura matemática llamada patrón de Golomb. En esta aplicación de GRASP, un patrón de apertura óptimo permite obtener imágenes espaciales con la resolución espectral deseada utilizando un arreglo de antenas de menor costo a través de técnicas de imagen por interferometría. Encontrar patrones Golomb cercanos al óptimo es computacionalmente muy difícil. Los científicos ciudadanos de GRASP tienen la tarea de encontrar patrones Golomb (casi) óptimos seleccionando celdas en una retícula que cumpla con las reglas del juego, asegurando que se respeten las propiedades Golomb, ver [4].

Según [4], los objetivos de GRASP son:

1. Demostrar un enfoque de juego en línea para resolver un problema matemático complejo con soluciones aportadas por científicos ciudadanos.

2. Generar un impacto positivo en las posibles misiones de astrofísica y radar de la NASA, específicamente en el diseño de arreglos de apertura no redundante para obtener imágenes espaciales de alta resolución y bajo costo.

3. Construir un repositorio de todas las soluciones conocidas, tanto publicadas como aportadas por los usuarios, disponible para el público en general y, en particular, para científicos e investigadores.

4. Estimular la educación STEM proporcionando una plataforma para los estudiantes de STEM en educación secundaria y superior.

Por último, según [5], `SageMath` es un software matemático libre y de código abierto que apoya la investigación y la enseñanza en álgebra, geometría, teoría de números, criptografía, computación numérica y áreas relacionadas.

Referencias

[1] Anacona, E. B. (2006). Conjuntos de Sidon y reglas Golomb. Tesis de pregrado. Universidad del Cauca.

[2] Bloom, G. S., Golomb, S. W. (1977). Applications of numbered undirected graphs. *Proceedings of the IEEE.* 65(4): 562–570.

[3] Golomb, S. W., Taylor, H. (2005). Constructions and properties of Costas arrays. *Proceedings of the IEEE.* 72(9): 1143–1163.

[4] Memarsadeghi, N., Joseph, R. D., Kaufmann, J. C., Lee, B. S. (2022). Golomb Patterns, Astrophysics, and Citizen Science Games. *IEEE Access.* 10: 76125–76135. DOI: 10.1109/ACCESS.2022.3188632.

[5] SageMath. (2025). The Sage Mathematics Software System (Version 10.6). The Sage Developers. https://www.sagemath.org.

Combinatoria

Ponencias Combinatoria

Comité Científico: Amanda Montejano Cantoral (Universidad Nacional Autónoma de México, México), Federico Castillo (Pontificia Universidad Católica, Chile), José Luis Ramírez (Universidad Nacional de Colombia, Colombia).

- ⋆ **Un refinamiento polinomial de la sucesión semi-Fibonacci via particiones de enteros**, Andrés Ricardo Moreno Garzón, Jhon. J. Bravo, Universidad del Cauca, Colombia, José L. Ramírez, Universidad Nacional de Colombia, Colombia.
- ⋆ **Conjuntos independientes en árboles y grafos unicíclicos**, Deysi Nathalia Yela Díaz, Fernando Andrés Benavides Agredo, Universidad de Nariño, Colombia.

Un refinamiento polinomial de la sucesión semi-Fibonacci via particiones de enteros

Andrés R. Moreno[1], José L. Ramírez[2], Jhon. J. Bravo[1]

[1] Universidad del Cauca, Popayán, Colombia

[2] Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia

✉ armoreno@unicauca.edu.co, jlramirezr@unal.edu.co, jbravo@unicauca.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026

San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. En esta charla se presenta la definición y algunos resultados conocidos sobre la sucesión semi-Fibonacci y otras sucesiones autosimilares, con especial énfasis en sus conexiones con las particiones de enteros y sus funciones generatrices. Posteriormente, se exponen diversos resultados obtenidos mediante un refinamiento polinomial de dicha sucesión, así como una representación combinatoria de la misma a través de grafos.

Palabras claves. Sucesión autosimilar, partición, polinomio, estadística, grafo dirigido.

Dada una sucesión de enteros $a(n)$ definida por un conjunto de condiciones iniciales y una relación de recurrencia, se define su sucesión autosimilar asociada $sa(n)$ como aquella que conserva las mismas condiciones iniciales y la misma relación de recurrencia para los índices impares, mientras que para los índices pares satisface $sa(n) = sa(n/2)$. En este contexto, la sucesión de Fibonacci, ampliamente conocida y estudiada, admite una sucesión autosimilar asociada $sf(n)$, denominada sucesión semi-Fibonacci. Esta sucesión conserva las condiciones iniciales $sf(0) = sf(1) = 1$, y para $n \geq 2$ está definida por

$$sf(n) = \begin{cases} sf(n/2), & \text{si } n \text{ es par,} \\ sf(n-1) + sf(n-2), & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Los resultados conocidos sobre esta sucesión son relativamente escasos. Andrews [1] demostró un resultado relacionado con la paridad de sus términos, estableciendo que $sf(n)$ es par si y solo si n es múltiplo de 3. Además, en el mismo trabajo se establece una biyección entre dos familias de particiones:

1. Las particiones semi-Fibonacci, denotadas por $\mathcal{SF}(n)$, definidas de manera natural a partir de la recurrencia de la sucesión. Se tiene $\mathcal{SF}(1) = \{(1)\}$, y para $n \geq 1$ las particiones se construyen de la siguiente forma:
   - Las particiones de $\mathcal{SF}(2n)$ se obtienen a partir de las de $\mathcal{SF}(n)$ multiplicando cada parte por 2.
   - Las particiones de $\mathcal{SF}(2n+1)$ se obtienen como la unión de las particiones de $\mathcal{SF}(2n)$ añadiendo una parte 1, y las particiones de $\mathcal{SF}(2n-1)$ sumando 2 a la única parte impar de cada partición.
2. Las particiones binarias impares, denotadas por $\mathcal{OB}(n)$, que consisten en particiones de n cuyas partes son potencias de 2, donde cada potencia puede aparecer únicamente un número impar de veces.

A partir de las funciones generatrices de los conjuntos de particiones mencionados, Andrews demostró que la sucesión semi-Fibonacci coincide con la sucesión de conteo de los cardinales de dichos conjuntos; es decir, para todo entero positivo n se cumple que

$$|\mathcal{SF}(n)| = sf(n) = |\mathcal{OB}(n)|.$$

Ballantine y Beck [2] desarrollan un estudio analítico y combinatorio de algunas sucesiones autosimilares, obteniendo sus funciones generatrices y los conjuntos de particiones asociados. En este marco, las sucesiones autosimilares aparecen naturalmente como sucesiones de conteo de los cardinales de dichos conjuntos. Entre las sucesiones estudiadas se encuentran las semi-Fibonacci, semi-Padovan, semi-Pell, semi-Lucas y la sucesión de Stern–Brocot, entre otras. En particular, la sucesión de Stern-Brocot ha sido ampliamente estudiada, destacando el hecho de que todo número racional positivo puede expresarse de manera única como el cociente de dos términos consecutivos de dicha sucesión. Además, los términos consecutivos son coprimos, lo que establece una biyección entre los números enteros positivos y los números racionales positivos (véase [4] para más detalles y propiedades adicionales).

El objetivo de esta ponencia es presentar distintos resultados obtenidos en nuestro trabajo [3] sobre la sucesión semi-Fibonacci, los cuales aportan nuevas propiedades frente a los pocos resultados conocidos en la literatura. Mediante un refinamiento polinomial en tres variables de los números semi-Fibonacci, se estudian estadísticas asociadas a los conjuntos de particiones correspondientes, tales como el número de partes, la mayor valuación 2-ádica entre las partes y una estadística relacionada con las partes impares.

A partir de la función generatriz de estos polinomios se obtienen varios resultados adicionales, entre ellos una ecuación funcional de tipo Mahler y una expansión explícita en forma producto-suma. En este último caso, se analiza la derivada logarítmica del producto, expresando sus coeficientes en términos de números de Lucas. Asimismo, se organiza la sucesión en un arreglo diádico semi-Fibonacci, análogo al conocido arreglo diádico de la sucesión de Stern-Brocot, lo cual permite visualizar diversas identidades en intervalos diádicos.

Finalmente, se presenta una interpretación combinatoria mediante grafos dirigidos, en la cual el n-ésimo término de la sucesión semi-Fibonacci cuenta el número de caminos desde el vértice n hasta el vértice 1 en un dígrafo adecuado. Esta interpretación proporciona demostraciones combinatorias directas de varias identidades.

Referencias

[1] Andrews, G. (2019). Binary and semi-Fibonacci partitions. *Journal of Ramanujan Society of Mathematics & Mathematical Sciences* 7(1).

[2] Ballantine, C., Beck, G. (2023). Partitions enumerated by self-similar sequences. *In New Frontiers in Number Theory and Applications, Cham: Springer Nature Switzerland*. 51-96.

[3] Moreno, A., Ramírez, J. (2026). A Polynomial Refinement of the Semi-Fibonacci Numbers via Integer Partitions. Preprint.

[4] Northshield, S. (2010). Stern's Diatomic Sequence 0, 1, 1, 2, 1, 3, 2, 3, 1, 4,... *The American Mathematical Monthly*. 117(7): 581-598.

Conjuntos independientes en árboles y grafos unicíclicos

Deysi N. Yela [1], Fernando A. Benavides[1]

[1] Universidad De Nariño, Pasto, Colombia

✉ deysinathaliay@gmail.com, fandresbenavides@udenar.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. En teoría de grafos un conjunto independiente o estable es un conjunto de vértices de un grafo tal que ninguno de sus vértices es adyacente a otro. Estos conjuntos constituyen un área relevante de la teoría de grafos debido a su riqueza combinatoria y a sus múltiples aplicaciones en distintas disciplinas. En esta charla se presentan avances relacionados con el estudio del número de conjuntos independientes en árboles y grafos unicíclicos, enfatizando resultados extremales asociados a estas familias de grafos. En particular, se describen cotas inferiores y superiores para el número de conjuntos independientes, así como las estructuras que alcanzan dichos valores, destacando su relación con las sucesiones de Fibonacci y Lucas.

Palabras claves. Conjunto independiente, árbol, grafo unicíclico.

Un *grafo simple* G es un par ordenado de la forma $G = (V, E)$ en el que V es un conjunto de vértices, y E es el conjunto de aristas formado por subconjuntos de V de la forma $e = \{a, b\}$ con $a \neq b$. Un subconjunto $S \subseteq V(G)$ se denomina *independiente* si no existen dos vértices de S que sean adyacentes en G. El número de conjuntos independientes de G se denota por $i(G)$.

Este parámetro ocupa un lugar importante dentro de la teoría de grafos debido a su riqueza combinatoria y a sus diversas aplicaciones. En química teórica se conoce como el *índice de Merrifield–Simmons*, el cual modela configuraciones de átomos no adyacentes en grafos moleculares y presenta correlación con propiedades fisicoquímicas de las moléculas, y tiene aplicaciones en el diseño y descubrimiento de fármacos [4, 5]. Además, este parámetro aparece en modelos discretos de mecánica estadística asociados a grafos cuadrícula [2], y en problemas de combinatoria aditiva relacionados con conjuntos libres de suma y grafos de Cayley [1].

Uno de los problemas más relevantes asociados al número de conjuntos independientes en un grafo consiste en determinar sus valores extremales dentro de una familia dada de grafos; es decir, identificar aquellas estructuras que minimizan o maximizan dicho valor. En este contexto, a partir de resultados presentados en [3] se tiene que para todo árbol T_n con n vértices, entendido como un grafo conexo sin ciclos, se cumple

$$F_{n+2} \leq i(T_n) \leq 2^{n-1} + 1,$$

donde F_n corresponde a la sucesión de Fibonacci definida por $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ y $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ para todo $n \geq 2$. Además, $i(T_n) = F_{n+2}$ si y solo si $T_n \cong P_n$ con P_n la trayectoria sobre n vértices; mientras que $i(T_n) = 2^{n-1} + 1$ si y solo si $T_n \cong K_{1,n-1}$ donde $K_{1,n-1}$ es la estrella formada por un vértice central adyacente a $n - 1$ hojas.

Por otra parte, a partir de los resultados obtenidos en [6] se tiene que, para todo grafo unicíclico G con n vértices, entendido como un grafo conexo que contiene exactamente un ciclo, se cumple que

$$L_n \leq i(G) \leq 3 \cdot 2^{n-3} + 1,$$

donde L_n corresponde a la sucesión de Lucas definida por $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ y $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ para todo $n \geq 2$. Además, $i(G) = L_n$ si y solo si $G \cong C_n$ o $G \cong L_{n,3}$ donde C_n es el ciclo con n vértices y $L_{n,3}$

se obtiene al conectar un vértice del ciclo C_3 con un vértice extremo de la trayectoria P_{n-k}; mientras que, $i(G) = 3 \cdot 2^{n-3} + 1$ si y solo si $G \cong H_{n,3}$ o $G \cong C_4$, donde $H_{n,3}$ se obtiene al conectar $n-3$ hojas a un vértice del ciclo C_3 y C_4 es el ciclo con 4 vértices.

En el estudio de estos resultados se utilizan diversas técnicas de conteo y descomposición que permiten calcular el número de conjuntos independientes de un grafo a partir de subgrafos más simples. En particular, dado un vértice $v \in V(G)$ se denota por $G - v$ el grafo que se obtiene al eliminar el vértice v y todas las aristas incidentes en él. Análogamente, si $e \in E(G)$, entonces $G - e$ denota el grafo que se obtiene al eliminar la arista e. Con esta notación, para un grafo arbitrario G se tienen las siguientes relaciones fundamentales:

1. Si $G = G_1 \cup G_2 \cup \cdots \cup G_k$ es la unión de grafos disjuntos, entonces
$$i(G) = \prod_{i=1}^{k} i(G_i).$$
2. Si $v \in V(G)$, entonces
$$i(G) = i(G - v) + i(G - N[v]).$$
3. Si $\{v_1, v_2\} \in E(G)$, entonces
$$i(G) = i(G - \{v_1, v_2\}) - i\big(G - (N[v_1, v_2])\big).$$

El objetivo de la presente charla es presentar resultados existentes relacionados con el número de conjuntos independientes en familias de árboles y grafos unicíclicos, enfatizando los grafos extremales que minimizan o maximizan dicho parámetro en cada caso. Por otra parte, se mencionan posibles líneas de investigación futura relacionadas con el estudio del número de conjuntos independientes en otras familias de grafos.

Referencias

[1] Alon, N. (1991). Independent sets in regular graphs and sum-free subsets of finite groups. *Israel Journal of Mathematics.* 73(2):247–256. DOI: 10.1007/BF02785832.

[2] Calkin, N. J., Wilf, H. S. (1998). The number of independent sets in a grid graph. *SIAM Journal on Discrete Mathematics.* 11(1):54–60. DOI: 10.1137/S089548019528993X.

[3] Knopfmacher, A., Tichy, R. F., Wagner, S., Ziegler, V. (2007). Graphs, partitions and Fibonacci numbers. *Discrete Applied Mathematics.* 155(10):1175–1187. DOI: 10.1016/j.dam.2006.12.009.

[4] Li, X., Li, Z., Wang, L. (2003). The inverse problems for some topological indices in combinatorial chemistry. *Journal of Computational Biology.* 10(1):47–55. DOI: 10.1089/106652703763255660.

[5] Merrifield, R. E., Simmons, H. E. (1989). *Topological Methods in Chemistry.* New York: Wiley.

[6] Pedersen, A. S., Vestergaard, P. D. (2005). The number of independent sets in unicyclic graphs. *Discrete Applied Mathematics.* 152(1–3):246–256. DOI: 10.1016/j.dam.2005.02.006.

Pósteres Combinatoria

Comité Científico: Amanda Montejano Cantoral (Universidad Nacional Autónoma de México, México), Federico Castillo (Pontificia Universidad Católica, Chile), José Luis Ramírez (Universidad Nacional de Colombia, Colombia).

⋆ **El método probabilístico en teoría de Ramsey: de Erdös a avances recientes**, Andrés Felipe Idárraga Ruiz, Universidad Nacional de Colombia sede Manizales, Colombia.

El método probabilístico en teoría de Ramsey: de Erdős a avances recientes

Andrés Felipe Idárraga Ruiz[1]

[1] Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales, Manizales, Colombia

✉ afidarraga2003@gmail.com

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. La teoría de Ramsey estudia la aparición inevitable de estructuras ordenadas dentro de objetos suficientemente grandes. En el caso de grafos, el número de Ramsey diagonal $R(k,k)$ es el menor entero n tal que toda coloración de las aristas de K_n con dos colores contiene una copia monocromática de K_k. Aunque el teorema de Ramsey garantiza la existencia de estos números, determinar su crecimiento asintótico sigue siendo uno de los problemas centrales de la combinatoria extremal. En este póster presentamos el método probabilístico como una herramienta fundamental para obtener cotas inferiores para $R(k,k)$. La idea consiste en colorear aleatoriamente las aristas de K_n y estimar el número esperado de cliques monocromáticas de tamaño k. Si esta esperanza es menor que uno, se concluye la existencia de una coloración sin K_k monocromático, lo que implica una cota inferior exponencial para $R(k,k)$. Finalmente, discutimos brevemente cómo esta perspectiva se relaciona con avances recientes en teoría de Ramsey, incluyendo mejoras exponenciales en cotas superiores para números diagonales y multicolores. El objetivo es mostrar cómo una idea probabilística elemental continúa conectada con problemas abiertos y desarrollos contemporáneos en teoría extremal de grafos.

Palabras claves. teoría de Ramsey, método probabilístico, números de Ramsey, grafos, combinatoria extremal.

Introducción

La teoría de Ramsey, iniciada por Ramsey [6], formaliza la idea de que en estructuras suficientemente grandes el desorden completo es imposible. En lenguaje de grafos, el número de Ramsey $R(s,t)$ es el menor entero n tal que todo grafo con n vértices contiene una clique de tamaño s o un conjunto independiente de tamaño t. Equivalentemente, en toda coloración rojo/azul de las aristas de K_n aparece un K_s rojo o un K_t azul.

El caso diagonal $R(k,k)$ es uno de los problemas clásicos de la combinatoria extremal. El argumento inductivo de Erdős y Szekeres [4] da una cota superior exponencial, mientras que Erdős [3] introdujo el método probabilístico para demostrar cotas inferiores exponenciales. Esta última idea es el eje central del póster.

El argumento probabilístico de Erdős

Consideremos una coloración aleatoria de las aristas de K_n: cada arista se colorea de rojo o azul, independientemente y con probabilidad $1/2$ para cada color. Para cada subconjunto $S \subseteq V(K_n)$ con $|S| = k$, definimos la variable indicadora

$$X_S = \begin{cases} 1, & \text{si } S \text{ induce un } K_k \text{ monocromático,} \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Como S contiene $\binom{k}{2}$ aristas, la probabilidad de que todas ellas sean rojas es $2^{-\binom{k}{2}}$, y lo mismo ocurre para el color azul. Por tanto,

$$\mathbb{P}(X_S = 1) = 2^{1-\binom{k}{2}}.$$

Si X denota el número total de copias monocromáticas de K_k, entonces

$$X = \sum_{|S|=k} X_S \quad \text{y} \quad \mathbb{E}(X) = \binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}}.$$

En consecuencia, si

$$\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} < 1,$$

entonces existe una coloración de K_n sin copias monocromáticas de K_k. En particular, $R(k,k) > n$. Tomando n del orden de $2^{k/2}$ se obtiene una cota inferior exponencial para $R(k,k)$. La fuerza del argumento radica en que prueba existencia sin construir explícitamente la coloración.

Relación con avances recientes

La brecha entre las cotas inferiores y superiores para $R(k,k)$ sigue siendo enorme. Sin embargo, la última década ha visto avances importantes. Campos, Griffiths, Morris y Sahasrabudhe [2] probaron una mejora exponencial sobre la cota superior clásica de Erdős–Szekeres para los números diagonales. Posteriormente, Balister, Bollobás, Campos, Griffiths, Hurley, Morris, Sahasrabudhe y Tiba [1] obtuvieron nuevas cotas superiores para números de Ramsey multicolores, incluyendo una prueba alternativa y más corta en el caso de dos colores. Una panorámica reciente de estos desarrollos puede encontrarse en la encuesta de Morris [5].

Así, el método probabilístico no solo proporciona una demostración clásica y elegante, sino que también sirve como puerta de entrada conceptual a la teoría moderna de Ramsey, donde técnicas probabilísticas, argumentos de densidad y métodos de regularización siguen desempeñando un papel central.

Referencias

[1] Balister, P., Bollobás, B., Campos, M., Griffiths, S., Hurley, E., Morris, R., Sahasrabudhe, J., Tiba, M. (2024). Upper bounds for multicolour Ramsey numbers. arXiv:2410.17197.

[2] Campos, M., Griffiths, S., Morris, R., Sahasrabudhe, J. (2023). An exponential improvement for diagonal Ramsey. arXiv:2303.09521.

[3] Erdős, P. (1947). Some remarks on the theory of graphs. *Bull. Amer. Math. Soc.* 53:292–294. DOI: 10.1090/S0002-9904-1947-08785-1.

[4] Erdős, P., Szekeres, G. (1935). A combinatorial problem in geometry. *Compositio Math.* 2:463–470.

[5] Morris, R. (2026). Some recent results in Ramsey theory. arXiv:2601.05221.

[6] Ramsey, F. P. (1930). On a problem of formal logic. *Proc. London Math. Soc.* 30(1):264–286. DOI: 10.1112/plms/s2-30.1.264.

Aplicaciones

Ponencias Aplicaciones

Comité Científico: Hiram H. López (Department of Mathematics, Virginia Tech, USA), Diana H. Bueno (Pontificia Universidad Javeriana Cali, Colombia).

- ⋆ **Design of two cryptographic functions from Bose-type Sidon sets with differential 2-uniformity and near-optimal linearity**, Julian Osorio, Carlos Alberto Trujillo Solarte, Diego Fernando Ruiz, Universidad del Cauca, Colombia.
- ⋆ **Certificación lógico-algebraica de decodificación híbrida LDPC sobre el canal de borrado binario**, Carlos Ramirez Ovalle, Pontificia Universidad Javeriana, Cali, Colombia.
- ⋆ **Códigos en almacenamiento ADN**, Dilan Manuel Malaver Guarín, Claudia Inés Granados Pinzón, Universidad Industrial de Santander, Colombia.
- ⋆ **Códigos lineales q-arios y conjuntos S_h-lineales**, Viviana Carolina Guerrero Pantoja, John H. Castillo, Universidad de Nariño, Carlos Alberto Trujillo Solarte, Universidad del Cauca, Colombia.
- ⋆ **Sobre la distancia mínima de códigos castillo torcidos**, Sandra Inés Manrique Guerrero, Universidad del Valle, Colombia, Wilson Olaya León, Universidad Industrial de Santander, Colombia, Universidade Federal de Uberlândia, Brasil,

Design of two Cryptographic Functions from Bose-type Sidon Sets with Differential 2-Uniformity and Near-Optimal Linearity

Julian Osorio[1], Carlos Trujillo[1], Diego Ruiz[1]

[1] Universidasd del Cauca, Popayán, Colombia

✉ rosorio@unicauca.edu.co, trujillo@unicauca.edu.co, dfruiz@unicauca.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Abstract. Sidon sets, defined by the property that every sum of any two elements is distinct, play a significant role in areas such as coding theory and cryptography. In this work, we study two cryptographic functions, f_q and g_q, constructed from Bose-type Sidon sets. These functions exhibit three key cryptographic properties: low differential uniformity, uniform output distribution, and low linearity. The first ensures consistent sensitivity to input changes, offering resistance against differential cryptanalysis, as both functions achieve differential 2-uniformity, the lowest non-trivial value possible, thus guaranteeing maximum theoretical resistance. The second maximizes entropy by ensuring a uniform output distribution, thereby avoiding statistical biases that attackers could exploit. The third property exhibits different behavior between the two functions: while f_p demonstrates linear growth $\mathcal{L}(f_p) \approx 0.637p$, the function g_p achieves remarkably low linearity, empirically characterized by $\mathcal{L}(g_p) \approx 1.89\sqrt{p}$, which is close to the optimal bound $\sqrt{p}$, providing superior resistance to linear cryptanalysis.

Keywords. Sidon sets, differential uniformity, linearity, cryptography.

Introduction

Sidon sets have been a subject of interest in number theory and combinatorics due to their structural properties. A set S is called a Sidon set if the sums of all distinct pairs of elements in S are different. This property makes them particularly useful in areas such as coding theory and cryptography, where such uniqueness can be leveraged to enhance security [1, 2]. Their combinatorial nature has led to numerous applications, particularly in the design of cryptographic primitives where resistance to statistical attacks is a fundamental requirement [3].

These sets, were first studied in the 1930s in the context of harmonic analysis [4]. Since then, their importance has extended to several domains, including the construction of error-correcting codes and almost perfect nonlinear (APN) functions [2], as well as linear codes [5]. In recent years, their cryptographic potential has gained renewed attention due to the relationship between APN functions and Sidon sets, positioning them as valuable tools for designing secure cryptographic primitives.

The broader landscape of additive-combinatorial cryptography includes various approaches leveraging sum-related properties. Recent work has explored sum-free sets and No-Sum (NS) sequences for post-quantum key generation, demonstrating how properties like sum-avoidance can enhance security in quantum-resistant protocols [6, 7]. In contrast to these approaches, which focus primarily on key generation and post-quantum scenarios, our work leverages the Bose-type Sidon set construction to design non-binary cryptographic functions with provable differential uniformity and low linearity, exhibiting strong resistance to both differential and linear cryptanalysis in classical symmetric-key settings [8].

In this work, we investigate two cryptographic functions, f_q and g_q, defined over $\mathbb{F}_q$ for q a prime power, and constructed from Bose-type Sidon sets. These functions exhibit three key properties: (i) good

differential uniformity, which ensures that small changes in the input result in controlled variations in the output, making the functions resistant to differential cryptanalysis; (ii) uniform output distribution, which maximizes entropy and reduces statistical biases exploitable by adversaries; and (iii) low linearity, particularly for g_q, which achieves linearity within a small constant factor of the optimal lower bound, providing strong resistance to linear cryptanalysis. By leveraging the combinatorial structure of Sidon sets, these functions not only maintain good cryptographic properties but also provide a novel approach to design secure functions for symmetric-key cryptography.

The functions f_q and g_q are not permutations, so they are not S-boxes nor APN functions. However, non-bijective functions with low differential uniformity and low linearity are valuable cryptographic components in several settings that do not require bijectivity: as building blocks for keystream generators in stream ciphers [9], as round functions in block ciphers built on the DES design principle, where invertibility of the overall cipher is guaranteed by the structure itself regardless of whether the round function is bijective [10], and as compression components in hash function design [11]. Moreover, our construction contributes to the study of differentially 2-uniform functions over $\mathbb{Z}_p$, extending the research on optimal differential uniformity beyond the setting of APN functions over $\mathbb{F}_{2^n}$.

References

[1] Bose, R. C. (1942). An affine analogue of Singer's theorem. *J. Indian Math. Soc.* 6: 1–15.

[2] Carlet, C., & Picek, S. (2021). On the exponents of APN power functions and Sidon sets, sum-free sets, and Dickson polynomials. *Adv. Math. Commun.*

[3] Blondeau, C., & Nyberg, K. (2015). Perfect nonlinear functions and cryptography. *Finite Fields Appl.* 32: 120–147.

[4] Sidon, S. (1932). Ein Satz über trigonometrische Polynome und seine Anwendung in der Theorie der Fourier-Reihen. *Math. Ann.* 106: 536–539.

[5] Czerwinski, I., & Pott, A. (2024). Sidon sets, sum-free sets and linear codes. *Adv. Math. Commun.* 18(2): 549–566. DOI: 10.3934/amc.2023054.

[6] Rawal, B. S., Kumar, P. M., & Singh, R. (2025). No Sum (NS) sequence based post-quantum cryptography. *SN Comput. Sci.* 6(3): 1–11.

[7] Rawal, B. S., Singh, R., Liang, S., Peter, A., & Biswas, A. (2024). Augmenting AES to quantum safe level with no-sum sequence. En *Proc. 2nd Int. Conf. Microwave, Antenna and Communication (MAC)*: 1–6. IEEE.

[8] Osorio, J., Trujillo, C., & Ruiz, D. (2024). Construction of a cryptographic function based on Bose-type Sidon sets. *AIMS Math.* 9(7): 17590–17605. DOI: 10.3934/math.2024855.

[9] Stallings, W. (2017). *Cryptography and network security: Principles and practice* (7th ed.). Pearson.

[10] Luby, M., & Rackoff, C. (1988). How to construct pseudorandom permutations from pseudorandom functions. *SIAM J. Comput.* 17(2): 373–386.

[11] Preneel, B., Govaerts, R., & Vandewalle, J. (1993). Hash functions based on block ciphers: a synthetic approach. En *Advances in Cryptology – CRYPTO 1993* (LNCS 773): 368–378. Springer.

Certificación lógico-algebraica de decodificación híbrida LDPC sobre el canal de borrado binario

Carlos Ernesto Ramírez Ovalle[1]

[1] Departamento de Ciencias Naturales y Matemáticas, Pontificia Universidad Javeriana Cali, Colombia

✉ carlosovalle@javerianacali.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. Se presenta una capa de certificación para decodificación híbrida de códigos LDPC sobre el canal de borrado binario. El decodificador combina una fase local de peeling, que resuelve variables desde chequeos de grado residual uno, y una fase algebraica que resuelve el sistema lineal residual sobre $\mathbb{F}_2$ mediante eliminación gaussiana. La contribución no consiste en proponer un nuevo decodificador, sino en certificar sus salidas mediante evidencia verificable por un comprobador independiente. La fase de peeling se especifica en un fragmento clausular de lógica lineal con subexponenciales, interpretado como reescritura de multiconjuntos, lo que permite separar datos estáticos del grafo de Tanner, valores persistentes ya determinados y estado residual de uso lineal. De cada ejecución se extrae una traza compacta; junto con ella se validan certificados de éxito o de falla. Si el comprobador acepta un certificado de éxito, la palabra obtenida es un codeword consistente con los símbolos recibidos y, bajo el modelo BEC, es máxima verosimilitud. Además, los certificados de falla prueban la inconsistencia del sistema residual.

Palabras claves. códigos LDPC, canal de borrado binario, lógica lineal, subexponenciales, certificación

Descripción del trabajo

Los códigos LDPC son una familia central de códigos correctores de errores debido a que su matriz de paridad es dispersa y admite decodificación eficiente mediante el grafo de Tanner [3, 6]. En el canal de borrado binario, el receptor conoce algunos símbolos y otros aparecen como borrados. La decodificación puede formularse como un sistema lineal sobre $\mathbb{F}_2$: las variables no borradas fijan el lado derecho y las variables borradas quedan por resolver. La fase de peeling explota la dispersión del grafo y resuelve localmente una variable cuando una ecuación de paridad contiene exactamente una incógnita. Este procedimiento es rápido, pero se detiene ante conjuntos de parada [2]. La fase residual resuelve entonces el sistema restante, como en los enfoques de decodificación máxima verosimilitud para LDPC sobre BEC [1].

La propuesta añade una capa de certificación a esta tubería clásica. El decodificador se trata como un productor no confiable de certificados: puede estar optimizado, ser externo o incluso contener errores. La confianza se desplaza a un comprobador pequeño que solo reconstruye la traza y verifica la evidencia recibida. Un certificado de éxito tiene la forma (T, ρ), donde T es la traza de peeling y ρ asigna valores al sistema residual. Un certificado de falla tiene la forma (T, ω), donde ω es un testigo algebraico que satisface $\omega^T H_U = 0$ y $\omega^T r = 1$, probando que el sistema residual no tiene solución.

La fase lógica usa una especificación en lógica lineal con subexponenciales. La lógica lineal permite controlar consumo y reutilización de recursos [4]; las subexponenciales permiten distinguir zonas con permisos estructurales distintos [5]. En esta aplicación, el grafo de Tanner es información estática, los valores ya decodificados son persistentes y el estado residual debe consumirse y actualizarse de manera

lineal. Esta separación evita secuencias espurias de reescritura y convierte la ejecución de peeling en una traza verificable.

Los resultados principales son cuatro. Primero, la especificación SELL de peeling es adecuada: induce exactamente las mismas ejecuciones que el decodificador operacional. Segundo, todo certificado de éxito aceptado produce una palabra que satisface $Hx^T = 0$ y coincide con los símbolos no borrados. Tercero, bajo el modelo BEC, toda palabra aceptada es de máxima verosimilitud. Cuarto, los certificados de falla son correctos y completos para detectar inconsistencia del sistema residual. El comprobador corre en tiempo $O(|E| + n)$, lineal en el tamaño del grafo de Tanner, y se acompaña de una implementación en Python y una mecanización parcial en Lean 4.

Referencias

[1] Burshtein, D., and Miller, G. (2004). An efficient maximum-likelihood decoding of LDPC codes over the binary erasure channel. *IEEE Transactions on Information Theory* 50(11):2837–2844.

[2] Di, C., Proietti, D., Telatar, I. E., Richardson, T. J., and Urbanke, R. L. (2002). Finite-length analysis of low-density parity-check codes on the binary erasure channel. *IEEE Transactions on Information Theory* 48(6):1570–1579.

[3] Gallager, R. G. (1962). Low-density parity-check codes. *IRE Transactions on Information Theory* 8(1):21–28.

[4] Girard, J.-Y. (1987). Linear logic. *Theoretical Computer Science* 50:1–102.

[5] Nigam, V., and Miller, D. (2009). Algorithmic specifications in linear logic with subexponentials. In *PPDP 2009*, 129–140. ACM. DOI: 10.1145/1599410.1599427.

[6] Richardson, T. J., and Urbanke, R. (2008). *Modern Coding Theory*. Cambridge University Press.

Códigos en almacenamiento ADN

Dilan Malaver Guarín[1], Claudia Granados Pinzón[1]

[1] Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia

✉ dilan2258348@correo.uis.edu.co, cigranad@uis.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. El almacenamiento molecular en ADN ha surgido como una alternativa prometedora para el archivo de información digital debido a su alta densidad, durabilidad y bajo costo energético en reposo. Sin embargo, la recuperación eficiente de la información depende de la profundidad de cobertura y la posibilidad de acceder de manera selectiva a una parte de los datos sin reconstruir el contenido completo. El problema de acceso aleatorio en sistemas de almacenamiento en ADN ha sido estudiado tanto desde una perspectiva algebraica [2] como desde una perspectiva geométrica [4]. El problema puede estudiarse también mediante herramientas de geometría proyectiva finita. Se consideran configuraciones en planos proyectivos sobre cuerpos finitos, como los arcos cuasi-balanceados, que permiten reducir el número esperado de lecturas necesarias para recuperar una parte específica. Además, estudios recientes han incorporado un enfoque probabilístico, analizando no solo el número esperado de lecturas necesarias para recuperar información, sino también la estabilidad y confiabilidad de los códigos.

Palabras claves. almacenamiento en ADN, acceso aleatorio, códigos lineales, geometría proyectiva finita, arcos cuasi-balanceados

El almacenamiento en ADN ha despertado un interés creciente como medio alternativo para el archivo de información digital, debido a su alta densidad teórica, su potencial durabilidad y su bajo costo energético en reposo [3]. Uno de los retos principales en este contexto es la recuperación eficiente de la información, especialmente cuando se desea reconstruir solo una parte específica. Esta situación conduce al problema de acceso aleatorio, estudiado experimentalmente a gran escala en [5].

Desde el punto de vista algebraico, una forma natural de modelar este problema consiste en codificar la información mediante códigos lineales sobre cuerpos finitos. Si $x \in \mathbb{F}_q^k$ es un vector de información y $G \in \mathbb{F}_q^{k\times n}$ es una matriz generadora, entonces la palabra codificada es $y = xG$. En el contexto de acceso aleatorio, interesa recuperar una coordenada de x a partir de un número reducido de símbolos codificados. Esta formulación se relaciona con el estudio de la profundidad de cobertura y del número esperado de lecturas necesarias para recuperar información [2, 1].

Además de su formulación algebraica y probabilística, el problema admite una reinterpretación geométrica en términos de espacios proyectivos sobre cuerpos finitos [4]. En particular, en el caso del plano proyectivo, ciertas configuraciones especiales de puntos, como los arcos y sus variantes, permiten describir de manera estructural algunos mecanismos de recuperación. Entre estas configuraciones se encuentran los arcos cuasi-balanceados, que constituyen uno de los objetos de interés en el estudio reciente del acceso aleatorio en almacenamiento ADN.

En esta charla se presentará el marco algebraico y geométrico que subyace a este problema, enfatizando la relación entre códigos lineales, espacios proyectivos sobre cuerpos finitos y configuraciones relevantes en geometría finita. El objetivo es mostrar cómo estas herramientas proporcionan un lenguaje natural para estudiar problemas de recuperación selectiva de información en sistemas de almacenamiento en ADN.

Referencias

[1] Bar-Lev, D., Sabary, O., Gabrys, R., Yaakobi, E. (2025). Cover Your Bases: How to Minimize the Sequencing Coverage in DNA Storage Systems. *IEEE Transactions on Information Theory*. 71(1): 192–218.

[2] Bodur, S., Lia, S., Lopez, H. H., Ludhani, R., Ravagnani, A., Seccia, L. (2025). The Random Variables of the DNA Coverage Depth Problem. arXiv preprint arXiv:2507.20645.

[3] Ceze, L., Nivala, J., Strauss, K. (2019). Molecular digital data storage using DNA. *Nature Reviews Genetics*. 20(8): 456–466.

[4] Gruica, A., Montanucci, M., Zullo, F. (2025). The Geometry of Codes for Random Access in DNA Storage. arXiv preprint arXiv:2411.08924.

[5] Organick, L. et al. (2018). Random access in large-scale DNA data storage. *Nature Biotechnology*. 36: 242–248.

Códigos lineales q-arios y conjuntos S_h-lineales

Viviana Carolina Guerrero Pantoja[1], John H. Castillo[1], Carlos Alberto Trujillo Solarte[2]

[1] Universidad de Nariño, San Juan de Pasto, Colombia.

[2] Universidad del Cauca, Popayán, Colombia.

✉ vivianaguerrero@udenar.edu.co, jhcastillo@udenar.edu.co, trujillo@unicauca.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. Los códigos correctores de errores desempeñan un papel fundamental en la transmisión digital de información y están estrechamente relacionados con una estructura combinatoria aditiva conocida como conjunto de Sidon. Esta relación se extiende de manera natural a los conjuntos S_h-conjuntos, particularmente en el contexto de los códigos binarios. En esta charla presentaremos una correspondencia entre códigos lineales q-arios y conjuntos S_h-lineales. Como consecuencia, obtenemos cotas inferiores para la cardinalidad máxima de los conjuntos S_h en $\mathbb{F}_q^r$.

Palabras claves. Código lineal q-ario, conjunto S_h, conjunto S_h-lineal.

La relación entre la Teoría de Códigos y la Teoría de Números Aditiva fue planteada por primera vez por R.L. Graham y N.J.A. Sloane en 1980 en su artículo "Lower bounds for constant weight codes",[6] en el cual se relacionan conjuntos S_h y códigos binarios de peso constante.

En 1999, G. Cohen y G. Zémor, en su artículo "Subset and Coding Theory", [2] presentan la manera en la que técnicas de la teoría de códigos pueden ser usadas para resolver problemas de la teoría aditiva de números. Esto se logra mediante la asociación de un código lineal $C(S)$ a un conjunto S generador de $\mathbb{F}_2^r$ con $|S| = n$; a través de esta relación muestran cómo tres problemas aditivos en el grupo $\mathbb{F}_2^r$ pueden expresarse como problemas de teoría de códigos y usando técnicas de teoría de códigos presentan contribuciones originales. Cohen y Zémor, mencionan que no todo código C es necesariamente un código $C(S)$ para algún conjunto S; adicionalmente afirman que en particular para cualquier código C existe un conjunto S que no contiene al $\mathbf{0}$ tal que $C = C(S)$ si y sólo si $d(C) \geq 3$.

Más adelante, G. Cohen, G. Zémor y S. Litsyn, en [1], estudian los conjuntos S_2 en $\mathbb{F}_2^t$ usando un código asociado para determinar el máximo número de elementos que puede tener un conjunto S_2. Luego, H. Derksen en [4] retomó las ideas que abordaron R. Graham y N. Sloane en [6] construyendo nuevos códigos binarios de peso constante y a partir de ellos nuevos códigos binarios no lineales.

Posteriormente, H. Haanpää y P. Östergárd en [8] muestran una correspondencia biunívoca entre los códigos lineales binarios y los conjuntos S_2 en $\mathbb{F}_2^r$. Después, C. Gómez y C. Trujillo en [5] generalizan el resultado de [8], ya que demuestran la correspondencia entre conjuntos S_h y códigos lineales binarios.

Recientemente, I. Czerwinski y A. Pott, en [3] retoman las ideas de G. Cohen y G. Zémor, en [2] y prueban una equivalencia a lo demostrado en [8].

Finalmente, V. Guerrero, J. Castillo y C. Trujillo en [7], extienden el concepto de conjunto S_h a un contexto más general de un espacio vectorial finito sobre un campo finito. Más precisamente, $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{F}_q^r$ es un conjunto S_h-lineal si todas las combinaciones lineales de h elementos de A son diferentes. En [7], se establece una correspondencia entre códigos lineales q-arios y conjuntos S_h-lineales.

Referencias

[1] Cohen, G., Litsyn, S., Zémor, G. (2001). Binary B_2-sequences: A new upper bound. *J. Combin. Theory Ser. A* 94(1):152–155.

[2] Cohen, G., Zémor, G. (1999). Subset sums and coding theory. In *Structure Theory of Set Addition*, pp. 327–339. Paris: Société Mathématique de France.

[3] Czerwinski, I., Pott, A. (2024). Sidon sets, sum-free sets and linear codes. *Adv. Math. Commun.* 18(2):549–566.

[4] Derksen, H. (2004). Error-correcting codes and B_h-sequences. *IEEE Trans. Inform. Theory* 50(3):476–485.

[5] Gómez, C., Trujillo, C. (2011). Sobre conjuntos S_h de vectores binarios y códigos lineales. *Rev. Colomb. Mat.* 45(2):137–146.

[6] Graham, R., Sloane, N. (1980). Lower bounds for constant weight codes. *IEEE Trans. Inform. Theory* 26(1):37–43.

[7] Guerrero, V., Castillo, J., Trujillo, C. (2024). S_h-sets and linear codes over $\mathbb{F}_q$. Preprint.

[8] Haanpää, H., Östergård, P. (2007). Sets in abelian groups with distinct sums of pairs. *J. Number Theory* 123(1):144–153.

Sobre la distancia mínima de códigos castillo torcidos

Wilson Olaya León[1,2], Sandra Inés Manrique Guerrero[3]

[1] Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia
[2] Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, Brasil
[3] Universidad del Valle, Cali, Colombia
✉ wolaya@uis.edu.co, manriquesandraines@gmail.com

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. Códigos castillo torcidos [7] son una nueva familia de códigos correctores de errores, basados en códigos castillo [6] e inspirados en la construcción de códigos Hermitianos torcidos [1]. Estos nuevos códigos tienen una dimensión de cuadrado de Schur alta y en algunos casos cercana o igual a la dimensión de cuadrado de Schur de un código lineal aleatorio. Esto permite que sean considerados para implementar el protocolo criptográfico McElice que hasta el momento se cree resiste ataques desde un computador cuántico. En cuanto a los parámetros de los código castillo torcido se sabe que tienen la misma longitud y la misma dimensión del código Castillo clásico, sin embargo es un problema abierto determinar el valor exacto o cotas más ajustadas para la distancia mínima de estos códigos. En esta charla presentamos algunos resultados sobre la distancia mínima de códigos castillo torcidos. En particular, mostramos familias de códigos castillo torcidos que alcanzan la misma distancia mínima del código castillo clásico.
Palabras claves. Códigos castillo, códigos AG, criptosistema McElice, criptografía poscuántica.

Los códigos correctores de errores fueron introducidos para garantizar la calidad de la información transmitida a través de un canal interferido por el ruido. Pero hoy en día han ganado mucha atención por su aplicación para resolver nuevos problemas del proceso de transmisión de la información. Estas nuevas aplicaciones de los códigos correctores de errores pasan por criptografía en la era poscuántica [8], computación multiparte segura o diseño de esquemas de compartición de secretos [4].

Con la llegada de los computadores cuánticos, los criptosistemas de clave pública basada en los problemas de factorización de un entero como producto de dos números primos o del logaritmo discreto no son seguros [11]. Por lo tanto, se hace necesario una migración de los protocolos de seguridad de la información a criptosistemas que sean resistentes a ataques desde un computador cuántico. En este sentido, el Instituto Estadounidense de estándares y Tecnología (NIST por sus siglas en Inglés) inició en el año 2017 un proceso para solicitar, evaluar y estandarizar uno o más algoritmos criptográficos de clave pública resistentes a la computación cuántica [8]. Dicho proceso obtuvo cuatro finalistas en julio de 2023, después de la cuarta ronda de eliminación, que en noviembre de ese año pasarían a ser tres, pues el criptosistema basado en isogenias de curvas elípticas fue roto. Afortunadamente, uno de estos tres finalistas es el clásico criptosistema de McElice [5], un criptosistema de clave pública que basa su seguridad en la dificultad de la decodificación de un código lineal aleatorio.

Desafortunadamente, algunas de las familias más representativas de la teoría de códigos, como lo son los códigos Algebraico Geométricos (AG), tienen dificultad para garantizar su indistinguibilidad con códigos aleatorios y no son seguros para la implementación del criptosistema de McElice. Más exactamente, el comportamiento particular de los códigos AG, bajo la operación del producto de Schur, permite el ataque de distinguibilidad por dimensión de cuadrado de Schur [3]. El producto de Schur originalmente usado para definir pares localizadores de errores [9] tiene muchas otras aplicaciones en teoría de códigos y criptografía (ver [2, 10]).

En esta charla presentamos los códigos Castillo torcidos [7], una forma novedosa de transformar la familia de códigos castillo, una de las familias más estudiadas y utilizadas de los códigos AG. Esta nueva

familia de códigos correctores de errores esta basada en los códigos Castillo clásicos [6] y extiende la construcción de los códigos Hermitianos torcidos [1]. Los códigos Castillo torcidos tienen dimensión de cuadrado de Schur mayor que la de los códigos Castillo clásicos y, torciendo de una manera adecuada, en algunos casos alcanzan una dimensión de cuadrado de Schur cercana o igual a la dimensión de cuadrado de Schur de un código lineal aleatorio con los mismo parámetros. Lo cual permite que los códigos Castillo torcidos puedan ser utilizados para implementar el protocolo criptográfico McElice que hasta el momento se cree resiste ataques desde un computador cuántico.

Los parámetros de los código castillo torcido tienen la misma longitud y la misma dimensión del código Castillo clásico, sin embargo es un problema abierto determinar el valor exacto o cotas más ajustadas para la distancia mínima de estos códigos. En esta charla presentamos algunos resultados sobre la distancia mínima de códigos castillo torcidos. En particular, mostramos familias de códigos castillo torcidos que alcanzan la misma distancia mínima del código castillo clásico.

Referencias

[1] Allent, A., Blackwell, K., Fiol, O., Kshirsagar, R., Matsick, B., Matthews, G. and Nelson, Z. (2021). *Twisted Hermitian Codes*, Transactions of the American Mathematical Society, 43, 377-385.

[2] Cascudo I., Cramer R., Mirandola D., Zémor G. (2015). *Squares of Random linear codes*, IEEE trans. Info. Theory 61(3), 1159-1173.

[3] Couvreur A., Marquez-Corbella I., Pellikaan R. (2017). *Cryptanalysis of McElice cryptosystem based on algebraic geometry codes and their subcodes*, IEEE Trans. Inform. Theory, 63(8), 5404-5418.

[4] Cramer R., Damgard I., Nielsen J.B. (2015). *Secure multiparty computation and secret sharing*, Cambridge University press.

[5] McElice R.J. (1978). A public-key cryptosystem based on algebraic coding theory. Deep Space Network Progress Report, 44, 114-116.

[6] Munuera C., Sepúlveda A. andTorres F. (2008). *Algebraic Geometry codes from Castle curves*, In Coding Theory and Applications, LNCS 5228, pp. 117–127, Springer-Verlag, Berlin.

[7] Olaya-León W., Manrique S. and Granados C. (2026). *Twisted Castle codes*, preprint.

[8] Post-Quantum Cryptography — CSRC https://www.nist.gov/pqc.

[9] Pellikaan R. (1992). On decoding by error location and dependent sets of error positions. Discret. Math. 106-107, 369-381.

[10] Randriambololona H. (2025), On products and powers of linear codes under componentwise multiplication. Contemporary Mathematics, vol 637. American Mathematical Society, Providece.

[11] Shor P. (1994). *Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring*, Proceedings 35th Annual Symposiumon Foundations of Computer Science, IEEE Comput. Soc. Press.

Pósteres Aplicaciones

Comité Científico: Hiram H. López (Department of Mathematics, Virginia Tech, USA), Diana H. Bueno (Pontificia Universidad Javeriana Cali, Colombia).

- ⋆ **Grafos en la simulación de trayectorias de hormigas**, Miguel Ángel Ruiz Montilla, Juan Sebastian Agurto, Diana Cecilia Rodríguez, Catalina M. Rúa-Alvarez, Universidad de Nariño, Colombia.
- ⋆ **Una breve introducción a los códigos correctores de errores**, Maria Fernanda Araque Arenas, Universidad de Antioquia, Colombia.

Grafos en la simulación de trayectorias de hormigas

Miguel Ángel Ruiz Montilla[1], Juan Sebastian Agurto[1], Diana Cecilia Rodríguez[1], Catalina M. Rúa-Alvarez[1]

[1] Universidad de Nariño, Pasto, Colombia

✉ marm365@udenar.edu.co, jsagurto24b@udenar.edu.co, dcrodriguez23a@udenar.edu.co, catalina.rua@udenar.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. El estudio del comportamiento de las hormigas en la búsqueda de alimento ha sido relacionado como un sistema complejo en el que emergen trayectorias eficientes a partir de interacciones locales. En este trabajo se presenta una aproximación a la modelación de trayectorias de hormigas a través de grafos, y su relación con problemas clásicos de optimización a través del uso de Python. Donde a partir de la base biológica del forrajeo y la comunicación mediante feromonas, se introduce la representación del entorno como un grafo en el cual los nodos corresponden a puntos de interés y las aristas a posibles trayectorias. Este enfoque permite establecer conexiones con el Problema del Vendedor Viajero, más conocido por TSP por las siglas de *Travelling Salesman Problem*, uno de los problemas fundamentales de optimización y teoría de grafos. Es así como en este trabajo, incluyendo simulación con redes, se discute la relación entre estos modelos y los algoritmos de Optimización por Colonia de Hormigas (*Ant Colony Optimization* - ACO), los cuales reproducen mecanismos de decisión colectiva basados en probabilidades y refuerzo de trayectorias. Este enfoque permite integrar biología, teoría de grafos y análisis de sistemas complejos en un marco matemático y computacional.
Palabras claves. Grafos, optimización, TSP, ACO, feromonas.

El comportamiento colectivo de las hormigas constituye uno de los ejemplos más relevantes de sistemas complejos en los que la interacción entre agentes locales da lugar a patrones globales eficientes. En particular, el proceso de forrajeo ha sido estudiado como un mecanismo de autoorganización basado en la comunicación mediante feromonas, lo que permite la construcción de rutas óptimas entre el nido y las fuentes de alimento [2]. A mayor escala, la proyección temporal y espacial de estos movimientos individuales da origen a redes dinámicas de trayectorias que reflejan la adaptación colectiva de la colonia frente a la heterogeneidad del entorno. La organización de estas trayectorias depende de la distribución de los recursos: en ambientes estables se favorecen rutas persistentes y altamente eficientes, mientras que en entornos variables emergen patrones más difusos que aumentan la resiliencia del sistema frente a cambios inesperados. En este sentido, las hormigas no solo constituyen un modelo de comportamiento colectivo, sino también bioindicadores del estado del ecosistema, especialmente en regiones con alta diversidad biológica como el sur occidente colombiano, donde su movilidad refleja la conectividad del paisaje y los procesos ecológicos asociados [1].

Desde la biología, este proceso se explica mediante mecanismos de retroalimentación positiva, en los cuales las trayectorias más transitadas se refuerzan progresivamente, aumentando la probabilidad de ser seleccionadas por otras hormigas. Este fenómeno se complementa con componentes de exploración aleatoria que permiten a la colonia adaptarse a cambios en el entorno y evitar soluciones aceptables [5, 4]. Por otro lado, desde una perspectiva matemática, el entorno en el cual se desplazan las hormigas puede representarse mediante un grafo $G = (V, E)$, donde los vértices V corresponden a puntos de interés, como el nido o fuentes de alimento, y las aristas E representan las posibles rutas de desplazamiento. Este enfoque permite modelar las trayectorias como recorridos sobre el grafo, lo que establece una conexión directa con problemas clásicos de la teoría de grafos y la combinatoria.

Uno de los problemas más relevantes en este contexto es el Problema del Vendedor Viajante (TSP), el cual consiste en encontrar la ruta más corta para visitar un conjunto de ciudades, pasando por cada una exactamente una vez y regresando a la ciudad de origen. Es decir, se quiere encontrar el recorrido mínimo que visita un conjunto de nodos exactamente una vez. Este problema es fundamental en la teoría de grafos y optimización, y ha sido ampliamente estudiado en matemáticas aplicadas y ciencias de la computación [6].

Inspirados en el comportamiento natural de las hormigas, los algoritmos de Optimización por Colonia de Hormigas (ACO) modelan la construcción de soluciones mediante agentes que recorren el grafo de manera probabilística, influenciados por la intensidad de feromonas y la calidad de las soluciones previas. Este enfoque combina elementos de probabilidad, optimización y sistemas complejos [2]. Además, modelos continuos y discretos del comportamiento de forrajeo han sido desarrollados en la literatura reciente, mostrando cómo la distribución de hormigas en el espacio depende de variables como la evaporación de feromonas y la disponibilidad de recursos [3]. Estos modelos permiten establecer un vínculo entre la descripción biológica y su formalización matemática.

En este póster se propone una aproximación a la modelación de trayectorias de hormigas mediante grafos y problemas de optimización. Este enfoque permite no solo comprender el fenómeno desde una perspectiva interdisciplinar, sino también su aplicación en áreas como algoritmos bioinspirados. Se presentará una introducción teórica y aproximaciones computacionales con el uso de redes en Python. Los resultados obtenidos se logran a través del Semillero de Investigación MathSiCA con apoyo de la Vicerrectoría de Investigación e Interacción Social de la Universidad de Nariño.

Referencias

[1] Benavides-Machado, P. (2020). El control natural de insectos en el ecosistema cafetero colombiano. *En Manual del cafetero colombiano: Investigación y tecnología para la sostenibilidad de la caficultura.* 1(1), 1-28. Cenicafé. Disponible en: https://biblioteca.cenicafe.org/bitstream/10778/4233/1/CAP1.pdf

[2] Dorigo, M., Maniezzo, V., Colorni, A. (1996). Ant system: Optimization by a colony of cooperating agents. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics).* 26(1), 29-41. DOI: doi.org/10.1109/3477.484436

[3] Hartman, S., Ryan, S. D., Karamched, B. R. (2024). Walk this way: modeling foraging ant dynamics in multiple food source environments. *Journal of Mathematical Biology.* Disponible en https://pmc.ncbi.nlm.nih.gov/articles/PMC11392994

[4] Nagesh, I., Walker, S. M., Taylor, G. K. (2019). Motor output and control input in flapping flight: a compact model of the deforming wing kinematics of manoeuvring hoverflies. *Journal of the Royal Society Interface.* 16(157), 1-13. DOI: doi.org/10.1098/rsif.2019.0435

[5] Shiraishi, M., Takeuchi, R., Nakagawa, H., Nishimura, S. I., Awazu, A., Nishimori, H. (2019). Diverse stochasticity leads a colony of ants to optimal foraging. *Journal of Theoretical Biology.* 465, 7-16. DOI: doi.org/10.1016/j.jtbi.2019.01.002

[6] Zhang, J., Chen, J., Chen, J., Zhou, Y., Hu, K., Zhang, Y. (2025). Solution to the TSP problem based on the improved ant colony algorithm. *40th Youth Academic Annual Conference of Chinese Association of Automation, IEEE.* 2652-2657. Disponible en: https://doi.org/10.1109/YAC66630.2025.11149710

Una breve introducción a los Códigos Correctores de Errores

Maria Fernanda Araque Arenas

Universidad de Antioquia, Medellín Colombia
✉ maria.araque@udea.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. La teoría de códigos correctores de errores nace como una rama de la matemática discreta y de la teoría de la información, con aplicaciones fundamentales en las telecomunicaciones, el almacenamiento de datos y la criptografía. Su origen se remonta a los trabajos pioneros de Claude Shannon en 1948 [3], quien sentó las bases de la teoría de la información al demostrar que es posible transmitir información de manera confiable a través de un canal ruidoso siempre que la tasa de transmisión no exceda la capacidad del canal. El problema fundamental que aborda la teoría de códigos es el siguiente: ¿cómo se puede añadir redundancia a un mensaje de tal manera que, incluso si ocurren errores durante su transmisión o almacenamiento, el receptor pueda detectarlos y corregirlos? Este problema, aparentemente sencillo, ha dado lugar a una rica teoría matemática que combina herramientas del álgebra lineal, la teoría de números, la geometría algebraica y la combinatoria. En este póster haremos un breve recorrido por algunas de las principales teorías desarrolladas hasta los días de hoy (e.g., códigos cíclicos, BCH, Goppa ver, e.g., [2]) y como estas impulsan teorías más actuales (e.g., códigos cuánticos ver, e.g., [1]).

Palabras claves. Códigos, distancia de Hamming, cuerpos finitos, dimensión, qubit.

Referencias

[1] Ball, S., Centelles, A., Huber, F. (2023). Quantum error-correcting codes and their geometries. *Ann. Inst. H. Poincaré D Comb. Phys. Interact.* 10:337–405.

[2] Hefez, A., Torres Villela, M. L. (2023). *Introducción a los códigos correctores de errores*. Colección Textos Universitarios. Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Bogotá, Colombia.

[3] MacWilliams, F. J., Sloane, N. J. A. (1977). *The Theory of Error-Correcting Codes*. North-Holland.

Geometría Algebraica

Ponencias Geometría Algebraica

Comité Científico: Luciane Quoos (Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil), Alonso Sepúlveda Castellanos (Universidade Federal de Uberlandia, Brasil), Horacio Navarro (Universidad del Valle, Colombia).

- ⋆ **Introducción a los fibrados de Ulrich**, Juan Sebastian Cruz Penagos, Universidad del Valle, Colombia.
- ⋆ **Cohomología de las fibras de Milnor y el lattice de Brieskorn**, Alexander Perez Guzman, Universidad del Valle Colombia.
- ⋆ **Sobre el problema de Cancelación de Zariski**, Helbert Javier Venegas Ramírez, Universidad Militar Nueva Granada, Colombia.
- ⋆ **Construcción de curvas con muchos puntos racionales mediante productos fibrados de p-extensiones abelianas elementales**, Denzel Olived Claro Melo, Arnoldo Teherán Herrera, Universidad Industrial de Santander, Colombia.
- ⋆ **Construcción explícita de la función Zeta para curvas definidas por polinomios aditivos sobre cuerpos finitos**, Keiner Miguel Viviescas Ortiz, Arnoldo Teherán Herrera, Universidad Industrial de Santander, Colombia.
- ⋆ **Moduli de representaciones de supercarcajes**, Pedro Hernandez Rizzo, Universidad de Antioquia, Colombia.

Introducción a los fibrados de Ulrich

Juan Cruz[1]

[1] Universidad del Valle, Cali, Colombia

✉ juan.sebastian.cruz@correounivalle.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. Dada una hipersuperficie $X \subset \mathbb{P}^n$, ¿podemos escribir las ecuaciones de X como los menores de una matriz de formas lineales? En esta ponencia presentaremos cómo esta pregunta se relaciona con la existencia de unos fibrados vectoriales especiales sobre X, llamados fibrados de Ulrich, y se mostrarán algunos casos en los que esta cuestión tiene una respuesta afirmativa, así como un ejemplo donde no ocurre.

Se presentarán resultados de A. Beauville, en los que se establece una equivalencia entre la existencia de fibrados de Ulrich y ciertas condiciones cohomológicas y geométricas. Asimismo, se discutirán ejemplos donde se verifica la existencia de estos fibrados, como en el caso de intersecciones completas, el espacio proyectivo, superficies $K3$, abelianas, bielípticas, de Enriques y del Pezzo. Finalmente, se presentarán algunos avances recientes en el área, destacando nuevos resultados relacionados con la existencia de estos fibrados.

Palabras claves. formas lineales, fibrados de Ulrich, hipersuperficie

Uno de los problemas clásicos en geometría algebraica consiste en responder la pregunta: Dada una hipersuperficie $X \subset \mathbb{P}^n$, ¿podemos escribir las ecuaciones de X como los menores de una matriz de formas lineales? Es decir, ¿puede X escribirse como el lugar de anulación de los menores de un tamaño fijo de una matriz cuyas entradas son formas lineales? Estas variedades aparecen frecuentemente en geometría algebraica; por ejemplo, en la inmersión de Segre de un producto de espacios proyectivos. En la actualidad, A. Beauville establece en [4, Proposition 2.1] una equivalencia entre la existencia de ciertos fibrados vectoriales especiales, llamados *fibrados de Ulrich*, sobre una variedad proyectiva embebida, y la posibilidad de describir dicha variedad como los menores de una matriz de formas lineales, además, usando la construcción de Serre [10, Remark 1.1.1] proporciona una respuesta afirmativa en ciertas superficies y en el caso de threefolds prueba que todo threefold de Fano de orden 2 posee un fibrado de Ulrich especial de rango 2. El estudio de los fibrados de Ulrich se origina en un artículo de Bernd Ulrich que publicó en 1984. En [12], Ulrich determinó criterios para que un anillo local de Cohen–Macaulay sea de Gorenstein. A partir de estas ideas surgió la pregunta principal en esta área, la cual establece: ¿Toda variedad suave polarizada (X, H) admite un fibrado de *Ulrich* $\mathcal{E}$?, y en caso afirmativo, encontrar el fibrado $\mathcal{E}$ de menor rango posible.

En los últimos años, los fibrados de Ulrich han despertado un notable interés. Diversos autores han contribuido al desarrollo de esta teoría y hoy se conocen varios casos de variedades que admiten fibrados de Ulrich. Por ejemplo, en el caso de curvas algebraicas, la clasificación se realiza por el género de la curva. Cuando el género es 0, el Teorema de descomposición de fibrados vectoriales en $\mathbb{P}^1$ [9, Théorème 2.1] permite establecer condiciones numéricas en el grado del fibrado vectorial para la existencia de fibrados de Ulrich de rango 1. Cuando el género es 1, la clasificación de fibrados vectoriales sobre curvas elípticas realizada por M. Atiyah [2] permite demostrar la existencia de fibrados de Ulrich de rango arbitrario en curvas elípticas. Finalmente, cuando el género es mayor o igual a 2, se tiene la existencia de fibrados de Ulrich estables de rango mayor o igual que 2, obtenidos a partir del método usado por M. Casanellas y R. Hartshorne en [5], para la clasificación de fibrados de Ulrich estables en superficies cúbicas. En

el caso de superficies de grado 3 en $\mathbb{P}^3$, los fibrados de Ulrich de rango 1 y 2 fueron clasificados por D. Faenzi y F. Malaspina en [7]; cuando se trata de superficies de grado 4, estas son $K3$, y D. Faenzi prueba que siempre hay fibrados de Ulrich de rango 2 en [8], para grados mayores que 4 probo algunos resultados, en [6] G. Casnati prueba que existen fibrados de Ulrich especiales de rango 2 para superficies que satisfacen ciertas condiciones cohomologicas y $p_g = q = 0$, en superficies Abelianas A. Beauville en [3] demuestra que toda superficie abeliana admite un fibrado de Ulrich de rango 2, para superficies regladas M. Aprodu, G. Casnati, L. Costa, R. M. Miró-Roig y M. Teixidor i Bigas

en [1] prueban la existencia de fibrados de Ulrich de rango 1 y 2 en estas superficies. En el caso de threefold en $\mathbb{P}^4$, M. Casanellas y R. Hartshorne en [5] construyen fibrados de Ulrich de cualquier rango para threefolds cúbicos en $\mathbb{P}^4$. Usando técnicas de categorías derivadas, M. Lahoz, E. Macrí y P. Stellari en [11] prueban que existen fibrados de Ulrich estables para cualquier rango mayor o igual que 2 en cualquier threefold cúbico.

Referencias

[1] Aprodu, M., Casnati, G., Costa, L., Miró-Roig, R. M., Teixidor i Bigas, M. (2020). Theta divisors and Ulrich bundles on geometrically ruled surfaces. *Ann. Mat. Pura Appl.* 199(1): 199–216.

[2] Atiyah, M. F. (1957). Vector bundles over an elliptic curve. *Proc. Lond. Math. Soc.* 7: 414–452.

[3] Beauville, A. (2016). Ulrich bundles on abelian surfaces. *Proc. Amer. Math. Soc.* 144(11): 4609–4611.

[4] Beauville, A. (2018). An introduction to Ulrich bundles. *Eur. J. Math.* 4(1): 26–36.

[5] Casanellas, M., Hartshorne, R., Geiss, F., Schreyer, F.-O. (2012). Stable Ulrich bundles. *Int. J. Math.* 23(8): 1250083.

[6] Casnati, G. (2017). Special Ulrich bundles on non-special surfaces with $p_g = q = 0$. *Int. J. Math.* 28(8): 1750061.

[7] Faenzi, D., Malaspina, F. (2017). Surfaces of minimal degree of tame representation type and mutations of Cohen–Macaulay modules. *Adv. Math.* 310: 663–695.

[8] Faenzi, D. (2019). Ulrich bundles on K3 surfaces. *Algebra Number Theory* 13(6): 1443–1454.

[9] Grothendieck, A. (1957). Sur la classification des fibres holomorphes sur la sphère de Riemann. *Am. J. Math.* 79: 121–138.

[10] Hartshorne, R. (1978). Stable vector bundles of rank 2 on $\mathbb{P}^3$. *Math. Ann.* 238: 229–280.

[11] Lahoz, M., Macrì, E., Stellari, P. (2015). Arithmetically Cohen–Macaulay bundles on cubic threefolds. *Algebr. Geom.* 2(2): 231–269.

[12] Ulrich, B. (1984). Gorenstein rings and modules with high numbers of generators. *Math. Z.* 188: 23–32.

Cohomología de las fibras de Milnor y el lattice de Brieskorn

Alexander Perez[1]

[1] Universidad del Valle, Cali, Colombia
✉ alexander.perez@correounivalle.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. Se estudiarán singularidades aisladas de funciones holomorfas $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ desde un punto de vista cohomológico. Se introduce la fibración de Milnor, que permite asociar a la singularidad un espacio vectorial $H^n(F)$ junto con la acción de la monodromía. Luego, se analiza la variación de esta cohomología en familias mediante la conexión de Gauss–Manin. A través de la cohomología de de Rham relativa, se obtiene una descripción algebraica en términos de formas diferenciales, lo que conduce al módulo de Brieskorn, el cual codifica la cohomología de la fibra de Milnor y su variación. Finalmente, se introduce el lattice de Brieskorn como una estructura más rígida que permite un estudio más refinado y sirve de base para la teoría de estructuras de Hodge mixtas.

Palabras claves. Fibración de Milnor, Monodromía, Conexión de Gauss–Manin, Módulo de Brieskorn, Lattice de Brieskorn.

Extenso del resumen. Se abordará el estudio de singularidades aisladas de funciones holomorfas $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ desde una perspectiva cohomológica. Siguiendo el enfoque introducido por [2], se reemplazará el análisis directo de la singularidad por el estudio de la fibración de Milnor, que asocia a la misma un espacio suave llamado fibra de Milnor. La topología de esta fibra refleja la complejidad del punto singular, y su cohomología $H^n(F)$ proporciona invariantes fundamentales como el número de Milnor.

A continuación, se estudiará cómo esta cohomología varía al cambiar el parámetro, lo que conduce al concepto de monodromía, entendido como la acción inducida al rodear la singularidad. Para describir esta variación de forma más estructurada, se introducirá la conexión de Gauss–Manin, que permite diferenciar clases de cohomología y entender su comportamiento mediante ecuaciones diferenciales. Este punto de vista, desarrollado en el contexto de estructuras de Hodge y singularidades por [1], transforma el problema en uno dinámico, donde la cohomología se considera como un objeto que evoluciona en familias.

Finalmente, se mostrará cómo este marco puede traducirse al lenguaje de formas diferenciales mediante la cohomología de de Rham relativa, lo que permite reformular el problema en términos algebraicos. En este contexto aparece el módulo de Brieskorn, que codifica tanto la cohomología de la fibra de Milnor como su variación. Se concluirá con la introducción del lattice de Brieskorn, una estructura más rígida y estable bajo la conexión de Gauss–Manin, que constituye un paso fundamental hacia el estudio de estructuras más refinadas como las estructuras de Hodge mixtas, ampliamente desarrolladas en la literatura moderna, por ejemplo en [3].

Referencias

[1] Kulikov, V. S. (1998). *Mixed Hodge Structures and Singularities*. Cambridge Tracts in Mathematics, Vol. 132. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

[2] Milnor, J. (1968). *Singular Points of Complex Hypersurfaces*. Annals of Mathematics Studies, No. 61. Princeton, NJ: Princeton University Press.

[3] Cattani, E. (2020). *Hodge Theory*. Providence, RI: American Mathematical Society.

Sobre el problema de cancelación de Zariski

Helbert Javier Venegas Ramírez[1]

[1] Universidad Militar Nueva Granada, Bogotá, Colombia

✉ helbert.venegas@unimilitar.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. El problema de cancelación de Zariski pregunta si el anillo de polinomios conmutativos $k[x_1, \ldots, x_n]$ es cancelativo, es decir, si $A[t] \cong B[t]$ implica $A \cong B$. En el caso conmutativo, la respuesta es afirmativa para $n \leq 2$ y negativa en característica positiva para $n \geq 3$. En esta charla presentamos avances sobre la versión no conmutativa del problema, enfocándonos en álgebras AS-regulares conexas graduadas de dimensión global tres. Mostramos que si A es un álgebra AS-regular de dimensión global tres, generada en grado 1 y no satisface una identidad polinomial (no PI), entonces A es cancelativa. Adicionalmente, estudiamos el problema para dominios no conmutativos de dimensión de Gelfand-Kirillov uno, estableciendo cancelatividad en característica cero y presentando contraejemplos en característica positiva.

Palabras claves. Cancelación de Zariski, Artin Schelter regular, dimensión Gelfand-Kirillov

El *problema de cancelación de Zariski* (ZCP) es uno de los problemas abiertos más importantes en álgebra y geometría algebraica. El problema consiste en determinar si el isomorfismo de álgebras

$$A[t] \cong B[t]$$

implica necesariamente que $A \cong B$. Un álgebra A con esta propiedad se dice *cancelativa*. En el caso conmutativo, la respuesta es afirmativa para anillos de polinomios en una o dos variables. En 2014 Gupta [2] demostró que en característica positiva y para tres o más variables el problema tiene respuesta negativa, uno de los avances más sorprendentes en esta área en décadas. Sin embargo, para característica cero y tres o más variables el problema permanece abierto.

En años recientes, el ZCP ha sido estudiado en el contexto no conmutativo, donde los anillos de polinomios son reemplazados por álgebras más generales. Las álgebras Artin-Schelter regulares, *álgebras AS-regulares* por simplificidad—introducidas como análogos no conmutativos de los anillos de polinomios— constituyen el ambiente natural para esta generalización. En esta charla presentamos los resultados principales de dos trabajos conjuntos recientes [4, 3].

El primero de ellos establece el siguiente resultado:

Teorema 1 ([4])**.** *Sea $\Bbbk$ un campo de característica cero y sea A un álgebra AS-regular noetheriana conexa graduada de dimensión global tres, generada en grado* 1*. Si A no es PI, entonces A es cancelativa.*

El segundo resultado estudia dominios no conmutativos de dimensión de Gelfand–Kirillov uno, que son el análogo no conmutativo de las curvas algebraicas afines. En el caso conmutativo, la cancelatividad de tales anillos fue establecida clásicamente por Abhyankar, Eakin y Heinzer [1]. Nuestra contribución extiende este resultado al contexto no conmutativo y además muestra que la hipótesis sobre la característica es esencial:

Teorema 2 ([3])**.**

(a) *Sea $\Bbbk$ un campo de característica cero y sea A un dominio afín sobre $\Bbbk$ de dimensión de Gelfand–Kirillov uno. Entonces A es cancelativo.*

(b) *En característica positiva, existen dominios afines de dimensión de Gelfand–Kirillov uno que no son cancelativos.*

Los métodos utilizados en ambos trabajos combinan herramientas como el invariante de Makar–Limanov, derivaciones localmente nilpotentes y el teorema de la Slice, además del automorphismo de Nakayama. En la charla discutiremos las ideas principales detrás de estas demostraciones y presentaremos algunos problemas abiertos que surgen naturalmente de esta investigación.

Los resultados presentados son un trabajo conjunto con Jason Bell, Maryam Hamidizadeh, Hongdi Huang, Xin Tang y James J. Zhang.

Referencias

[1] Abhyankar, S., Eakin, P., Heinzer, W. (1972). On the uniqueness of the coefficient ring in a polynomial ring. *J. Algebra.* 23: 310–342.

[2] Gupta, N. (2014). On Zariski's cancellation problem in positive characteristic. *Adv. Math.* 264: 296–307.

[3] Bell, J., Huang, H., Hamidizadeh, M., Venegas, H. (2021). Noncommutative analogues of a cancellation theorem of Abhyankar, Eakin, and Heinzer. *Beitr. Algebra Geom.* 62: 295–315.

[4] Tang, X., Venegas, H., Zhang, J. J. (2021). Cancellation problem for AS-regular algebras of dimension three. *Pacific J. Math.* 312: 233–255.

Construcción de curvas con muchos puntos racionales mediante productos fibrados de p-extensiones abelianas elementales

Denzel Olived Claro Melo[1], Arnoldo Teherán Herrera[1]

[1] Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia
Semillero de Investigación "Curvas Algebraicas y Aplicaciones"
✉ denzel2230145@correo.uis.edu.co, ateheran8@uis.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. En este trabajo se estudia la construcción explícita de curvas algebraicas sobre cuerpos finitos $\mathbb{F}_q$ definidas mediante productos fibrados de p-extensiones abelianas elementales. Se determinan fórmulas para el género g y el cardinal del conjunto de $\mathbb{F}_q$-puntos racionales. Se analiza el comportamiento de estos parámetros con respecto a la cota de Hasse-Weil y se contrastan los resultados obtenidos con los registros reportados en las tablas de ManyPoints.

Palabras claves. Curvas, género, $\mathbb{F}_q$-puntos racionales, productos fibrados, $\mathbb{F}_q$-maximalidad.

Introducción

Dado p un número primo, q una potencia de p, $\mathbb{F}_q$ el cuerpo finito con q elementos y $\overline{\mathbb{F}}_q$ su clausura algebraica; una $\mathcal{C}$ curva sobre $\mathbb{F}_q$, es una variedad algebraica proyectiva $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}^r\left(\overline{\mathbb{F}}_q\right)$ de dimensión 1, no singular y geométricamente irreducible. Si $\mathcal{C}$ curva sobre $\mathbb{F}_q$ y $N(\mathcal{C}(\mathbb{F}_q))$ y $g(\mathcal{C}) := g$ son el número de $\mathbb{F}_q$-puntos racionales y el género de $\mathcal{C}$ respectivamente, entonces la cota de Hasse-Weil establece que,

$$N(\mathcal{C}(\mathbb{F}_q)) \leq 1 + q + 2gq^{1/2}.$$

Esta cota es de especial interés ya que proporciona el punto de partida para el estudio de curvas con muchos puntos racionales, más precisamente, curvas donde su número de $\mathbb{F}_q$-puntos racionales esté en el intervalo $[a, b]$ donde $a = \frac{b}{\sqrt{2}}$ y b es la cota de Hasse-Weil, además b puede ser sustituido en algunos casos por las cotas de Ihara o Serre [5, 7]. Adicionalmente, en el caso que q sea un cuadrado, si,

$$N(\mathcal{C}(\mathbb{F}_q)) = 1 + q + 2gq^{1/2},$$

$\mathcal{C}$ es llamada $\mathbb{F}_q$-maximal.

Una curva de Artin -Schreier es definida por la ecuación con modelo plano afín,

$$y^p - y = f(x), \quad \text{donde } f(x) \in \mathbb{F}_q(x),$$

las cuales han sido ampliamente estudiadas [1, 4]. En [8] se estudia curvas construidas como un producto fibrado de la forma,

$$\mathcal{X} : \begin{cases} y_1^p - y_1 &= f_1(x) \\ y_2^p - y_2 &= f_2(x) \\ &\vdots \\ y_s^p - y_s &= f_s(x), \end{cases} \tag{1}$$

donde los $f_i(x) \in \mathbb{F}_q[X]$ son $\mathbb{F}_q$-linealmente independientes. En particular se tienen fórmulas explicitas para el género y su número de $\mathbb{F}_q$-puntos y se dan condiciones para que el producto fibrado $\mathcal{X}$ sea

$\mathbb{F}_q$-maximal y algunas aplicaciones de producto fibrados a la teoría de códigos han sido estudiadas en [9].

Sea $f(X) \in \mathbb{F}_q(X)$ y $A(Y) \in \mathbb{F}_q[Y]$ aditivo y separable sobre $\mathbb{F}_q$ con $\{\alpha : A(\alpha) = 0\} \subseteq \mathbb{F}_q$, una curva con modelo plano afín,

$$A(y) = f(x), \tag{2}$$

es llamada p - extensión abeliana elemental; este tipo de curvas han sido estudiadas en [2, 3].

En este trabajo usando (2)y (1) se estudia la construcción de productos fibrados de la forma,

$$\mathcal{C} : \begin{cases} A(y_1) &= f_1(x) \\ A(y_2) &= f_2(x) \\ &\vdots \\ A(y_s) &= f_s(x), \end{cases} \tag{3}$$

con $A(Y) \in \mathbb{F}_q[Y]$ aditivo y separable sobre $\mathbb{F}_q$ con todos sus ceros en $\mathbb{F}_q$ y los $f_i(x) \in \mathbb{F}_q[X]$ elegidos (1). En este caso, se determina el género y su número de $\mathbb{F}_q$-puntos de $\mathcal{C}$, se muestran ejemplos concretos de casos en donde la curva obtenida tiene muchos puntos racionales y se comparan estos resultados con las tablas en [6].

Referencias

[1] Coulter, R. S. (2002). *The number of rational points of a class of Artin–Schreier curves*. Finite Fields and Their Applications, 8(4), 397-413.

[2] García, A., and Stichtenoth, H. (1991). *Elementary abelian p-extensions of algebraic function fields*. manuscripta mathematica, 72(1), 67-79.

[3] Garzón, A., and Herrera, A. T. (2012). *p -extensiones abelianas elementales y curvas con muchos puntos*. Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales, 36(139), 243-253.

[4] Guneri, C. (2002). *A bound on the number of rational points of certain Artin-Schreier families*. Communications in Algebra, 30(9), 4251-4265.

[5] Hirschfeld, J. W. P., Korchmáros, G., Torres, F., and Torres, F. (2008). *Algebraic curves over a finite field* (Vol. 20). Princeton University Press.

[6] ManyPoints Developers. (2025). *ManyPoints: Table of curves with many points*. Available at: https://manypoints.org/

[7] Stichtenoth, H. (2009). *Algebraic function fields and codes*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.

[8] Stepanov, S. A., and Shalalfeh, M. H. (2001). *Codes on fibre products of Artin-Schreier curves*. Discrete Mathematics And Applications, 11(2), 133-144.

[9] Van der Geer, G., and Van der Vlugt, M. (1995). *Fibre products of Artin-Schreier curves and generalized Hamming weights of codes*. J. Combinat. Theory, A, 70(2), 337-348.

Construcción explícita de la función Zeta para curvas definidas por polinomios aditivos sobre cuerpos finitos

Keiner Miguel Viviescas Ortiz[1], Arnoldo Teherán Herrera[1]

[1] Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia
Semillero de Investigación "Curvas Algebraicas y Aplicaciones"
✉ keiner2230138@correo.uis.edu.co, ateheran8@uis.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. En este trabajo se presenta la construcción explícita de la función Zeta para un tipo particular de curvas con modelo plano afín $A(y) = f(x)$, con $f(X) \in \mathbb{F}_q(X)$ y $A(Y) \in \mathbb{F}_q[Y]$ es un polinomio aditivo y separable sobre $\mathbb{F}_q$ con todos sus ceros en $\mathbb{F}_q$. Adicionalmente se usará esta construcción para determinar el comportamiento de las curvas respecto a la cota de Hasse-Weil y establecer criterios de $\mathbb{F}_q$-maximalidad.

Palabras claves. Curvas, género, $\mathbb{F}_q$-puntos racionales, función zeta, $\mathbb{F}_q$-maximalidad.

Introducción

Sea p un número primo, q una potencia de p, $\mathbb{F}_q$ el cuerpo finito con q elementos y $\overline{\mathbb{F}}_q$ su clausura algebraica; considere $\mathcal{C}$ una curva sobre $\mathbb{F}_q$, es decir, una variedad algebraica proyectiva $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}^r\left(\overline{\mathbb{F}}_q\right)$ de dimensión 1, no singular y geométricamente irreducible, en tal caso si $N(\mathcal{C}(\mathbb{F}_q))$ y $g(\mathcal{C}) := g$ son el número de $\mathbb{F}_q$-puntos racionales y el género de $\mathcal{C}$ respectivamente, entonces la cota de Hasse-Weil establece que,

$$N(\mathcal{C}(\mathbb{F}_q)) \leq 1 + q + 2gq^{1/2},$$

que proporciona una estimación de interés en el estudio de curvas con muchos puntos racionales y $\mathbb{F}_q$-maximales cuando q es un cuadrado [4, 7].

Sea $Div(\mathcal{C})$ el grupo de divisores de $\mathcal{C}$; para $n \in \mathbb{N}_0$, denote por A_n el número de divisores efectivos de grado n :

$$A_n = \#\{A \in Div(\mathcal{C}) : A \geq 0 \text{ y } gr(A) = n\};$$

la serie formal,

$$Z(\mathcal{C}, T) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n T^n,$$

es conocida como la función Zeta de la curva $\mathcal{C}$ sobre $\mathbb{F}_q$.

Esta función admite representación,

$$Z(\mathcal{C}, T) = \frac{L(\mathcal{C}, T)}{(1-T)(1-qT)},$$

donde $L(\mathcal{C}, T) \in \mathbb{Z}[T]$ es un polinomio de grado $2g$ llamado el L-polinomio de la curva $\mathcal{C}$ sobre $\mathbb{F}_q$.

Sea $f(X) \in \mathbb{F}_q(X)$ y $A(Y) \in \mathbb{F}_q[Y]$ aditivo y separable sobre $\mathbb{F}_q$ con $\{\alpha : A(\alpha) = 0\} \subseteq \mathbb{F}_q$, una curva con modelo plano afín,

$$A(y) = f(x), \tag{1}$$

es llamada p - extensión abeliana elemental; este tipo de curvas han sido estudiadas en [2, 3], además en [5, 6] se hace la construcción explícita de la función Zeta para un tipo particular de p - extensiones abelianas elementales conocidas como curvas de tipo Artin-Schreier.

En este trabajo se presenta la construcción explícita de la función Zeta de curvas con modelo plano afín del tipo (1), cuando el polinomio $A(Y) \in \mathbb{F}_q[Y]$ es definido como en [1] o de manera más general como en [2]. Posteriormente se usará esta representación explícita para determinar el comportamiento de las curvas respecto a la cota de Hasse-Weil y establecer criterios de $\mathbb{F}_q$-maximalidad.

Referencias

[1] Abdón, M., Bezerra, J., and Quoos, L. (2009). *Further examples of maximal curves*. Journal of Pure and Applied Algebra, 213(6), 1192-1196.

[2] García, A., and Stichtenoth, H. (1991). *Elementary abelian p-extensions of algebraic function fields*. manuscripta mathematica, 72(1), 67-79.

[3] Garzón, A., and Teheran, A. (2012). *p -extensiones abelianas elementales y curvas con muchos puntos*. Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales, 36(139), 243-253.

[4] Hirschfeld, J. W. P., Korchmáros, G., Torres, F., and Torres, F. (2008). *Algebraic curves over a finite field* (Vol. 20). Princeton University Press.

[5] Pierre, T (2023). *Some results on Artin-Schreier curves*. preprint hal.science.

[6] Pierre, T. (2021). *Calcul des fonctions zêta de certaines courbes d'Artin-Schreier* (Doctoral dissertation, Antilles).

[7] Stichtenoth, H. (2009). *Algebraic function fields and codes*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.

Moduli de representaciones de supercarcajes

Pedro Rizzo

Universidad de Antioquia, Medellín Colombia
✉ pedro.hernandez@udea.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. La teoría de espacios de moduli de representaciones semiestables de carcajes tiene su origen en el trabajo seminal de King [3], donde se desarrollan las herramientas y técnicas fundamentales para su estudio y construcción. Dicho enfoque se basa en la traducción de la Teoría Geométrica de Invariantes (GIT) de Mumford et al. [2] al contexto de las representaciones de álgebras, estableciendo condiciones de estabilidad para módulos y construyendo el espacio de moduli como un cociente geométrico proyectivo. Por otro lado, las supervariedades, inspiradas en la supersimetría de la física teórica, constituyen una generalización del concepto clásico de variedad (ver, e.g., [1], [4]). Intuitivamente, una supervariedad es un espacio que, además de las coordenadas habituales ("bosónicas"), incorpora coordenadas conmutativas graduadas o "fermiónicas" que anticonmutan.
En esta charla nos aproximaremos a las nociones de supercarcaj y sus representaciones. Presentaremos una propuesta para la construcción de un espacio de moduli asociado a las representaciones de los supercarcajes, siguiendo las ideas de King, y expondremos algunos ejemplos de supervariedades obtenidas a través de estas técnicas. Este es un trabajo en conjunto [5] con Alexander Torres-Gómez (UdeA) y Alexander Quintero Vélez (UNalMed).

Palabras claves. Supercarcajes; Teoría Geométrica de los Invariantes; Supervariedades.

Referencias

[1] Bartocci, Claudio, Ugo Bruzzo, and D. Hernández-Ruipérez. (2012). The geometry of supermanifolds. Vol. 71. *Springer Science & Business Media*.

[2] Fogarty, J., Kirwan, F and Mumford, D. (1994). Geometric invariant theory. Vol. 34. *Springer Science & Business Media*.

[3] King, A. (1994). Moduli of representations of finite dimensional algebras. *The Quarterly Journal of Mathematics*. 45.4. pp:515-530.

[4] Manin, Y. I. (1997). Gauge field theory and complex geometry. Vol. 289. *Springer Science & Business Media*.

[5] Quintero Vélez, A.; Rizzo, P. and Torres-Gómez, A. (2026). Moduli of representations of superquivers. *In preparation*.

Pósteres Geometría Algebraica

Comité Científico: Luciane Quoos (Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil), Alonso Sepúlveda Castellanos (Universidade Federal de Uberlandia, Brasil), Horacio Navarro (Universidad del Valle, Colombia).

- ⋆ **El Teorema de Chern-Gauss-Bonnet como puente entre la geometría diferencial y el álgebra abstracta**, James Esteban Zuluaga Marín, Universidad Nacional de Colombia, Colombia.

El Teorema de Chern-Gauss-Bonnet como puente entre la geometría diferencial y el álgebra abstracta.

James Esteban Zuluaga Marín

Universidad Nacional de Colombia - Sede Manizales, Semillero de Geometría y Dinámica
✉ jazuluaga@unal.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. En el ámbito de la geometría diferencial y el álgebra abstracta, las variedades riemannianas y los anillos de polinomios invariantes representan dos estructuras fundamentales para modelar espacios y sus simetrías. En este trabajo exploramos la relación estructural entre ambos mundos a través del lente del Teorema de Chern-Gauss-Bonnet, evaluando cómo la topología global puede ser capturada mediante propiedades puramente algebraicas. El objetivo es entender cómo la curvatura de las variedades y la teoría de álgebras de Lie se conectan realmente a través de una traducción matemática rigurosa fundamentada en el homomorfismo de Chern-Weil. Analizaremos cómo el uso del polinomio del Pfaffiano permite que esta traducción sea clara y exacta, mientras usamos la estructura del anillo graduado de cohomología para demostrar que la característica de Euler se deriva de elementos puramente algebraicos. Finalmente, concluimos planteando el impacto de estas construcciones en la literatura matemática actual, estableciendo cómo este puente algebraico sienta las bases para generalizaciones más profundas.

Palabras claves. Teorema de Chern-Gauss-Bonnet, homomorfismo de Chern-Weil, Pfaffiano, álgebra abstracta, anillo de cohomología.

Introducción y Desarrollo

Este trabajo presenta una exposición detallada sobre uno de los resultados más profundos de la matemática moderna, donde la geometría diferencial y el álgebra abstracta convergen de manera perfecta. Tradicionalmente, el estudio de las superficies y sus curvaturas se ha abordado desde una perspectiva geométrica y analítica. Sin embargo, al generalizar estos conceptos a dimensiones superiores, las herramientas puramente algebraicas toman el protagonismo absoluto.

A lo largo de este documento, se desglosan los componentes algebraicos esenciales que permiten esta conexión. En primer lugar, se estudia el Pfaffiano no como un objeto geométrico, sino como un elemento de la teoría de anillos, específicamente dentro de los polinomios invariantes aplicados a matrices antisimétricas. Este enfoque permite abstraer la idea de curvatura hacia un entorno de operaciones algebraicas formales.

En segundo lugar, se detalla el homomorfismo de Chern-Weil, el cual actúa como el puente principal que vincula el álgebra de los grupos de Lie con la topología de la variedad. Este homomorfismo es fundamental porque permite evaluar polinomios abstractos directamente en formas de curvatura, transformando datos locales en información global.

Finalmente, se examina el papel del anillo de cohomología, una estructura de álgebra graduada y anticonmutativa donde habitan las clases características. Es en esta estructura donde se demuestra que la característica de Euler, tradicionalmente vista como un simple conteo combinatorio, es en realidad la manifestación de un elemento distinguido dentro de este anillo algebraico. La presentación de estos conceptos se apoya fuertemente en la literatura clásica sobre topología diferencial y clases características desarrolladas a mediados del siglo veinte [1].

Referencias

[1] Milnor, J. W., Stasheff, J. D. (1974). *Characteristic Classes*. Annals of Mathematics Studies, Vol. 76. Princeton, NJ: Princeton University Press.

La relación entre los grupos y álgebras de Lie y su extensión a los grupoides y algebroides de Lie

Yenyfer Valentina Páez Giraldo

[1] Universidad Nacional de Colombia, Bogotá

✉ ypaezg@unal.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. En esta charla se busca presentar la relación entre los *grupos y las álgebras de Lie* enunciando los tres teoremas de Lie. Posteriormente, se introducirán los conceptos de *grupoide y algebroide de Lie*, entendiendose como una generalización de los grupos y álgebras de Lie. A partir de la cuál surge naturalmente la cuestión sobre si los tres teoremas de Lie se siguen cumpliendo para la versión generalizada, más concretamente, se responde a la pregunta ¿dado un algebroide de Lie existe un grupoide de Lie asociado?

Palabras claves. Grupo de Lie, álgebra de Lie, grupoide de Lie, algebroide de Lie.

Un grupo de Lie es una variedad cuyas operaciones de grupo son C^∞, además es un espacio homogéneo, en el sentido que la traslación a izquierda mediante un elemento es un difeomorfismo del espacio en el mismo. Por lo tanto, localmente el grupo es el mismo alrededor de cualquier punto. Luego, estudiar la estructura local del grupo se reduce a estudiar la estructura local del grupo alrededor de el elemento identidad. Se conoce que el álgebra de Lie asociada al grupo de Lie, denotada por $Lie(G)$, es el conjunto de los campos vectoriales invariantes a izquierda y tiene un isomorfismo natural con el espacio tangente a la identidad denotado por T_eG. Así, dado cualquier grupo de Lie, existe el álgebra de Lie asociada al grupo. Por otro lado, el tercer teorema de Lie afirma que, dada cualquier álgebra de Lie, existe un grupo de Lie asociado a esa álgebra.

Adicionalmente, un grupoide de Lie $G \rightrightarrows M$, es un grupoide donde la funcion $m : G \times_M G \to G$ es una submersión, la función $u : M \to G$ dada por $u(x) = 1_x$ es un embebimiento y la función $i : G \to G$ dada por $i(g) = g^{-1}$ es un difeomorfismo. En este sentido un grupoide de Lie es la generalización de grupo de Lie, y su parte infinitésimal: el álgebroide de Lie, denotado por $A \Rightarrow M$, es un haz vectorial $A \to M$, junto con una función de haz vectorial $a : A \to TM$ (*the anchor map*), y un bracket de Lie $[\cdot, \cdot]$ en $\Gamma(A)$ que satisface la regla de Leibniz. Al igual que ocurre en los grupos, dado cualquier grupoide de Lie, se puede encontrar su algebroide de Lie asociado. En este contexto nace naturalmente la pregunta si el tercer teorema de Lie es verdadero en esta generalización, de manera más específica, ¿dado un algebroide de Lie siempre es posible encontrar un grupoide de Lie asociado a ese algebroide?

Referencias

[1] Loring W. Tu. An introduction to Manifolds. Springer, 2011

[2] John M. Lee. Introduction to Smooth Manifolds. Springer, 2013.

[3] Bursztyn. Del Hoyo. Lie Groupoids. 2023.

[4] Eckhard Meinrenken. Lie Groupoids and Lie Algebroids Lecture Notes. 2017

[5] Tseng. Zhu. Integrating Lie algebroids via stacks. 2006. doi:10.1112

[6] Fernandes. Zhang. Local and Global Integrability of Lie Brackets. 2021

[7] Jean-Pierre Serre. Lie Algebras and Lie Groups. Springer-Verlag. 1992

Área Invitada: Analísis de Datos y Sistemas Complejos

Ponencias Análisis de Datos y Sistemas Complejos

Comité Científico: Alejandra Rada (Universidade Federal do ABC, Brasil), Pablo M. Rodríguez (Universidade Federal de Pernambuco, Brasil), Santiago Velasco-Forero (Centre for Mathematical Morphology (CMM), Mines Paris, PSL University, Francia).

- ⋆ **Importancia estructural de individuos en una red multiplex de la industria del jazz**, Fabian Emir Marin Calvache, Diego Fernando Ruiz Solarte, Rigo Julian Osorio Angulo, Universidad del Cauca, Colombia.
- ⋆ **Empirical validation of an affinity-driven directed random model**, Diego Ruiz, Alejandra Murcia, Nino Pérez, Universidad del Cauca, Colombia.
- ⋆ **De arquitecturas neuronales categorizadas a una teoría de prueba subexponencial**, Carlos Ramírez Ovalle, Pontificia Universidad Javeriana, Cali, Colombia.
- ⋆ **Riesgo y resiliencia fiscal del departamento del Cauca: Un análisis predictivo de cultivos ilícitos y su asociación con la economía regional**, Mauren Dayanna López Salazar, Wilmer Alexander Arévalo Estrada, Henry Laniado, Universidad del Cauca, Colombia.
- ⋆ **Estimación robusta de la matriz de covarianzas para el diseño de estrategias óptimas en la selección de portafolios**, Danny Alberto Cordoba Guerrero, Henry Laniado, Universidad del Cauca, Colombia.
- ⋆ **Validación psicométrica de un índice compuesto formativo para la evaluación multidimensional del impacto de egresados universitarios: modelo ISIA**, Mireya Garcia, Fabian Llano, Laura Linares, Universitaria Agustiniana, Colombia.
- ⋆ **Predicción de enlaces en redes teóricas y empíricas**, Uver Andres Ortega Hoyos, Diego Fernando Ruiz Solarte, Universidad del Cauca, Colombia.

- ⋆ **Diseño de una versión robusta de la regresión logística**, Adrian Estiven Fajardo Paz, Karold Guzmán, Henry Laniado, Universidad del Cauca, Colombia.
- ⋆ **Extensión del concepto de percentil a funciones continuas**, Maria Paula Rodríguez Bautista, Henry Laniado, Universidad del Cauca, Colombia.
- ⋆ **Análisis de robustez de redes viales: un caso de estudio de la ciudad de Popayán**, John Harold Trochez Montano, Diego Fernando Ruiz Solarte, Universidad del Cauca, Colombia.
- ⋆ **Análisis Numérico de la Probabilidad de Extinción en Procesos Especiales de Ramificación**, Christiam Fernando Pistala Ceballos, Universidad CESMAG, Catalina M. Rúa-Alvarez, Universidad de Nariño, Colombia, Pablo M. Rodríguez, Universidad Federal de Pernambuco, Brasil.
- ⋆ **Estrategias híbridas de selección de portafolios: redundancia geométrica y regularización espectral**, Edwin César Chamorro Ibarra, Henry Laniado, Universidad del Cauca, Colombia.
- ⋆ **ResNet con funciones de activación adaptativas Morph**, Oscar Herrera Alcantara, Universidad Autónoma Metropolitana, México.
- ⋆ **Analítica de datos: resultados de trabajos interdisciplinarios**, Maria Alejandra Marmol Martinez, Juneth Andrea Terán Tarapués, Universidad CESMAG, Colombia.
- ⋆ **Integración de machine learning y teledetección para la estimación de la calidad del suelo agrícola**, Luz Elena Vargas Ortiz, Universidad de Cartagena, Colombia.
- ⋆ **Análisis de componentes principales no lineales para datos mixtos: formalización, cartas de control y aplicación cardiovascular**, Aymara Martínez Aragón, Juan David Giraldo Otálvaro, Nubia Esteban Duarte, Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales, Colombia.

Importancia estructural de individuos en una red multiplex de la industria del jazz

Fabian Emir Marin Calvache[1], Diego Fernando Ruiz Solarte[1], Rigo Julian Osorio Angulo[1]

[1] Universidad del Cauca, Popayán, Colombia

✉ fmarin@unicauca.edu.co, dfruiz@unicauca.edu.co, rosorio@unicauca.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen.

Las redes complejas constituyen una herramienta fundamental para modelar sistemas reales donde múltiples tipos de interacciones coexisten, tales como redes sociales, biológicas y de colaboración. En este contexto, las redes multicapa proporcionan un marco general para representar sistemas con distintos niveles de interacción. En particular, las redes multiplex corresponden a un caso en el que todas las capas comparten el mismo conjunto de nodos y las interacciones se organizan en diferentes tipos de relaciones. En este trabajo se considera un caso particular de redes multiplex en el cual no existen conexiones inter-capa explícitas, es decir, las interacciones ocurren únicamente dentro de cada capa, mientras que la dependencia entre capas se modela mediante matrices de influencia.

El presente trabajo se enfoca en el análisis de la centralidad de nodos en redes multiplex dirigidas, utilizando extensiones de la centralidad de autovector. En particular, se implementan y comparan diferentes nociones de centralidad propuestas en la literatura, tales como la centralidad uniforme, la centralidad de capa independiente, la centralidad local heterogénea y la centralidad global heterogénea. Estas medidas permiten capturar tanto la importancia estructural de los nodos dentro de cada capa como la influencia entre capas mediante matrices de acoplamiento. En este trabajo, dichas medidas de centralidad se aplican al análisis de una red de colaboración entre personas de la industria del jazz, con el objetivo de caracterizarla cuantitativamente y comprender la relevancia de los distintos actores dentro del sistema.

Palabras claves. Red multicapa, red multiplex, centrality, eigenvector.

Las redes complejas han emergido como una herramienta fundamental para modelar sistemas reales caracterizados por la presencia de múltiples tipos de interacciones entre sus componentes [5, 6, 2]. En muchos contextos, como redes sociales, biológicas o de colaboración, estas interacciones no pueden representarse adecuadamente mediante una única capa, lo que motiva el uso de redes multicapa como marco general de modelado [3]. Dentro de este enfoque, las redes multiplex constituyen un caso particular en el cual todas las capas comparten el mismo conjunto de nodos, pero representan diferentes tipos de relaciones.

En este trabajo se considera un modelo de red multiplex dirigida en el cual no se incluyen conexiones inter-capa explícitas. En su lugar, la interacción entre capas se modela mediante una matriz de influencia que permite capturar cómo la estructura de una capa afecta a las demás. Este enfoque es consistente con modelos recientes de centralidad en redes multiplex, donde la dependencia entre capas se introduce a nivel algebraico.

El objetivo principal del trabajo es analizar la centralidad de los nodos mediante extensiones de la centralidad de autovector en este tipo de redes. En particular, se implementan y comparan diferentes medidas propuestas en la literatura: la centralidad uniforme, que se basa en una agregación promedio de

las capas; la centralidad de capa independiente, que analiza cada capa de manera aislada; la centralidad local heterogénea, que incorpora una matriz de influencia para ponderar las contribuciones de cada capa; y la centralidad global heterogénea, que considera simultáneamente todas las capas mediante una construcción matricial de mayor dimensión [7].

Desde el punto de vista teórico, uno de los principales retos en el cálculo de estas centralidades es la posible falta de irreducibilidad de las matrices asociadas, lo que impide aplicar directamente el teorema de Perron-Frobenius. Para superar esta dificultad, se propone una estrategia de regularización inspirada en el algoritmo PageRank [1], basada en la incorporación de interacciones de muy baja intensidad entre nodos que no están directamente conectados. Esta estrategia introduce una perturbación controlada que depende del tamaño de la red y de las características de cada capa, incorporando además un factor de amortiguamiento típico de la literatura de PageRank, usualmente fijado en valores cercanos a 0,85 [1]. De esta manera, se garantiza que las matrices resultantes satisfacen las condiciones necesarias para la aplicabilidad del teorema de Perron-Frobenius, asegurando la existencia de un autovector dominante positivo.

La metodología propuesta se aplica al estudio de una red de colaboración de artistas de la industria del jazz, donde los nodos representan músicos y las capas corresponden a distintos tipos de relaciones entre ellos. En particular, la red analizada está compuesta por 1935 nodos y 13 tipos de relaciones, lo que permite modelar de manera detallada las múltiples formas de interacción presentes en este contexto. Este enfoque facilita la integración de diversas dimensiones relacionales y permite obtener una caracterización más completa de la importancia relativa de los nodos dentro del sistema [4].

Los resultados muestran que las diferentes nociones de centralidad capturan aspectos complementarios de la estructura de la red, evidenciando la relevancia de considerar el carácter multiplex en el análisis de sistemas complejos. Asimismo, la estrategia de regularización propuesta permite estabilizar los cálculos y garantizar la validez de los resultados desde el punto de vista espectral.

Referencias

[1] Brin, S., Page, L. (1998). The anatomy of a large-scale hypertextual Web search engine. *Computer Networks and ISDN Systems.* 30(1–7):107–117. Disponible en: https://snap.stanford.edu/class/cs224w-readings/Brin98Anatomy.pdf

[2] Estrada, E. (2011). *The Structure of Complex Networks: Theory and Applications.* Oxford University Press.

[3] Kivelä, M., Arenas, A., Barthélemy, M., Gleeson, J. P., Moreno, Y., Porter, M. A. (2014). Multilayer networks. *Journal of Complex Networks.* 2(3):203–271. DOI: 10.1093/comnet/cnu016.

[4] Linked Jazz Project. *Linked Jazz.* Disponible en: https://linkedjazz.org/

[5] Newman, M. E. J. (2003). The structure and function of complex networks. *SIAM Review.* 45(2):167–256. DOI: 10.1137/S003614450342480.

[6] Newman, M. E. J. (2010). *Networks: An Introduction.* Oxford University Press.

[7] Solá, L., Romance, M., Criado, R., Flores, J., García del Amo, A., Boccaletti, S. (2013). Eigenvector centrality of nodes in multiplex networks. *Chaos.* 23(3):033131. DOI: 10.1063/1.4818544.

Empirical validation of an affinity-driven directed random model

Diego Ruiz[1], Alejandra Murcia[1], Nino Pérez[1]

[1] Department of Mathematics, University of Cauca, Popayán, Colombia

✉ dfruiz@unicauca.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Abstract. Network analysis is fundamental to understanding complex systems across social, biological, and technological domains. We propose a model for heterogeneous directed random networks in which nodes carry type labels and connections are established through type-weighted attachment probabilities. The model is analyzed through two structural lenses: modularity and homophily. We derive closed-form expressions for degree evolution and characterize homophily at the node, group, and network levels. A key result is that, in directed networks with a response mechanism, the asymptotic values of node and group homophily differ—a distinction absent in undirected models. Validation against the Political Blogs network yields relative errors below 0.3% for group homophily and below 0.1% for directed modularity.

Keywords. Graphs, stochastic processes, social networks, directed graphs.

Network science has become an essential framework for representing and analyzing real-world phenomena, motivating the development of models that reproduce the structural properties and dynamics observed in complex systems [3, 8, 10, 7, 12]. Classical models typically assume node homogeneity [3, 8], an assumption that fails to capture the heterogeneity and directed nature of many empirical networks [5, 4]. In practice, nodes often carry distinct attributes that shape edge formation over time, giving rise to *homophily*—the tendency of nodes to connect preferentially with others of the same type—at the node, group, and network levels [2, 9], and to the emergence of *communities*: cohesive groups that are densely connected internally and sparsely connected across boundaries. Community detection is a central problem in network science; among the available methods, modularity maximization [6, 11] is one of the most widely adopted. We propose a dynamic model for heterogeneous directed random networks with two node types, built on three mechanisms: growth, affinity-driven random attachment, and network response. We analyze modularity dynamics and its asymptotic value, derive closed-form expressions for degree evolution, and characterize homophily at the node, group, and network levels. A key finding is that, by defining group homophily through outgoing edges, the asymptotic values of node and group homophily differ in directed networks with a response mechanism—a distinction absent in undirected models. The model is validated against the Political Blogs network [1], achieving relative errors below 0.3% for group homophily and below 0.1% for directed modularity.

References

[1] L. A. Adamic and N. Glance. The political blogosphere and the 2004 US election: divided they blog. In *Proceedings of the 3rd International Workshop on Link Discovery*, pages 36–43. ACM, 2005.

[2] T. Araújo and E. Fontainha. Are scientific memes inherited differently from gendered authorship? *Scientometrics*, 117:953–972, 2018.

[3] A.-L. Barabási and R. Albert. Emergence of scaling in random networks. *Science*, 286(5439):509–512, 1999.

[4] Ch. B'ayir, M. Essouifi, Y. El Ansari, A. Achahbar, and J. El Khamkhami. Stochastic modeling of malware propagation on reduced scale-free topology-based wireless sensor networks: dynamics, resilience, and countermeasures. *Journal of Mathematics and Computer Science*, 35(4):388–410, 2024.

[5] V. Ciotti, M. Bonaventura, V. Nicosia, P. Panzarasa, and V. Latora. Homophily and missing links in citation networks. *EPJ Data Science*, 5:1–14, 2016.

[6] A. Clauset, M. Newman, and C. Moore. Finding community structure in very large networks. *Physical Review E*, 70(6):066111, 2004.

[7] J. Gao, S. V. Buldyrev, H. E. Stanley, and S. Havlin. Networks formed from interdependent networks. *Nature Physics*, 8:40–48, 2012.

[8] M. O. Jackson and B. W. Rogers. Meeting strangers and friends of friends: How random are social networks? *American Economic Review*, 97(3):890–915, 2007.

[9] F. Karimi, M. Gênois, C. Wagner, P. Singer, and M. Strohmaier. Homophily influences ranking of minorities in social networks. *Scientific Reports*, 8(1):1–12, 2018.

[10] P. Moriano and J. Finke. Power-law weighted networks from local attachments. *Europhysics Letters*, 99(1):18002, 2012.

[11] M. Newman. *Networks*. Oxford University Press, 2nd edition, 2018.

[12] Diego Ruiz and Jorge Finke. Lyapunov-based anomaly detection in preferential attachment networks. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 29(2):363–373, 2019.

De arquitecturas neuronales categorizadas a una teoría de prueba subexponencial

Carlos Ernesto Ramírez Ovalle[1]

[1] Departamento de Ciencias Naturales y Matemáticas, Pontificia Universidad Javeriana Cali, Colombia

✉ carlosovalle@javerianacali.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. Este trabajo presenta una ruta matemática para extraer una disciplina lógica a partir de una familia de arquitecturas neuronales con comportamiento diferenciado de recursos. En lugar de imponer una lógica externa sobre el modelo, se parte de una categoría de bloques parametrizados etiquetados por zonas, donde se registra explícitamente qué información puede copiarse, descartarse o coercionarse entre zonas. A partir de esta disciplina categórica se reconstruye una firma subexponencial y se define un cálculo secuencial tensorial cuyas reglas estructurales dependen de las zonas extraídas. La contribución central es un resultado de extracción y corrección: la categoría arquitectural obtenida es monoidal simétrica, el cálculo asociado admite eliminación de corte y toda derivación se interpreta como un diagrama construido únicamente con las operaciones estructurales licenciadas por la arquitectura. Así, el trabajo propone un núcleo fundacional para el programa arquitectura neuronal–categoría–lógica, con énfasis en memoria, reutilización contextual y control formal de recursos.

Palabras claves. lógica lineal, subexponenciales, aprendizaje profundo categórico, teoría de prueba, arquitecturas neuronales

Descripción del trabajo

El punto de partida es una pregunta de frontera entre teoría de categorías, lógica lineal y aprendizaje automático: ¿puede una familia de arquitecturas neuronales inducir, por su propia organización interna, una lógica de recursos? La propuesta responde afirmativamente en un fragmento preciso. Se consideran contextos tipados etiquetados por zonas y bloques parametrizados que representan componentes computacionales. La composición secuencial y paralela de estos bloques produce una categoría arquitectural Arch_Z, relacionada con la perspectiva composicional del aprendizaje supervisado y del aprendizaje profundo categórico [3, 4].

La novedad no está en afirmar que las subexponenciales son útiles, sino en invertir la dirección usual. En vez de fijar primero una lógica y buscar una semántica, se registra qué operaciones estructurales son permitidas por la arquitectura: descarte, copia y coerción entre zonas. Esta información forma una disciplina coherente Lic. De ella se extrae una firma subexponencial

$$\Sigma_{\mathrm{Lic}} = (Z, \preceq, W_{\mathrm{Lic}}, C_{\mathrm{Lic}}),$$

donde W_{Lic} identifica las zonas con debilitamiento permitido y C_{Lic} las zonas con contracción permitida. El cálculo resultante es un fragmento tensorial de lógica lineal intuicionista con reglas estructurales indexadas por zonas, en la línea de las especificaciones algorítmicas con subexponenciales [5, 6].

El contenido técnico se organiza en tres niveles. Primero, se prueba que Arch_Z es una categoría monoidal simétrica. Segundo, se demuestra que el cálculo tensorial extraído admite eliminación de corte, apoyándose en la metateoría conocida de la lógica lineal y sus variantes subexponenciales [1, 2]. Tercero, se establece la corrección semántica: toda derivación del cálculo extraído se interpreta como un morfismo en

la clase de diagramas licenciados $\mathrm{Diag}_{\mathrm{Lic}}$, es decir, construido únicamente con los bloques arquitecturales y con las copias o descartes realmente autorizados por la disciplina inicial.

Un ejemplo con tres zonas ilustra la lectura conceptual. Una zona persistente puede copiarse y descartarse; una zona relevante puede copiarse pero no eliminarse silenciosamente; una zona lineal no admite ni copia ni descarte libres. Esta separación permite representar, de forma abstracta pero rigurosa, diferencias entre memoria persistente, contexto recuperado y observación actual. El trabajo no pretende ser una lógica completa de todos los transformadores, sino un primer núcleo formal donde la conducta estructural de una arquitectura se transforma en reglas lógicas auditables.

Referencias

[1] Andreoli, J.-M. (1992). Logic programming with focusing proofs in linear logic. *Journal of Logic and Computation* 2(3):297–347. DOI: 10.1093/logcom/2.3.297.

[2] Benton, P. N. (1995). A mixed linear and non-linear logic: Proofs, terms and models. In *Computer Science Logic*, LNCS 933, 121–135. Springer. DOI: 10.1007/BFb0022251.

[3] Fong, B., Spivak, D. I., and Tuyéras, R. (2019). Backprop as functor: A compositional perspective on supervised learning. In *LICS 2019*, 1–13. IEEE. DOI: 10.1109/LICS.2019.8785665.

[4] Gavranović, B., Lessard, P., Dudzik, A. J., Von Glehn, T., Araujo, J. G. M., and Veličković, P. (2024). Position: Categorical deep learning is an algebraic theory of all architectures. In *Proceedings of ICML 2024*, PMLR 235:15209–15241.

[5] Nigam, V., and Miller, D. (2009). Algorithmic specifications in linear logic with subexponentials. In *PPDP 2009*, 129–140. ACM. DOI: 10.1145/1599410.1599427.

[6] Xavier, B., Olarte, C., and Pimentel, E. (2022). A linear logic framework for multimodal logics. *Mathematical Structures in Computer Science* 32(9):1176–1204. DOI: 10.1017/S0960129522000366.

Riesgo y resiliencia fiscal del departamento del Cauca: Un análisis predictivo de cultivos ilícitos y su asociación con la economía regional

Mauren López [1], Wilmer Arévalo [1], Henry Laniado[1]

[1] Departamento de Matemáticas, Universidad del Cauca, Popayán, Colombia

✉ mlopezs@unicauca.edu.co, warevalo@unicauca.edu.co, hlaniado@unicauca.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. Este trabajo presenta una segunda fase de investigación sobre la relación entre cultivos de uso ilícito de coca y sostenibilidad fiscal del departamento del Cauca. La fase inicial proyectó el área sembrada de coca en 2022 con series municipales de Colombia entre 2001 y 2021, usando regresión polinómica y ARIMA, con mejor desempeño de este último. En esta nueva versión se incorpora un enfoque espacial/no paramétrico tipo *kriging* mediante procesos gaussianos, se comparan errores absolutos con pruebas de Friedman y Wilcoxon, y se refuerza el análisis fiscal mediante correlaciones, pruebas de permutación y suavizamiento LOESS. Los resultados confirman que ARIMA sigue siendo el modelo más robusto, mientras que el enfoque espacial no mejora la precisión predictiva. Para el Cauca se mantiene una asociación positiva entre hectáreas netas de coca e ingresos departamentales, aunque su interpretación exige cautela por el tamaño reducido de la muestra.

Palabras claves. cultivos ilícitos, ARIMA, Wilcoxon, Friedman, riesgo fiscal

Introducción

Los cultivos de uso ilícito de coca constituyen un fenómeno económico, social y territorial complejo en Colombia. En el Cauca, su persistencia plantea interrogantes sobre la sostenibilidad fiscal, los ingresos públicos y la deuda departamental. Este trabajo da continuidad a una investigación previa sobre la proyección municipal del área sembrada de coca para 2022 y su relación con variables fiscales del Cauca entre 2017 y 2023 [3, 7, 4]. Esta fase fortalece el estudio con una comparación más rigurosa de modelos y herramientas no paramétricas, pasando de una lectura descriptiva-predictiva a una evaluación estadística del riesgo fiscal en territorios afectados por economías ilícitas.

Metodología

En el componente nacional se usaron series históricas municipales de hectáreas sembradas de coca entre 2001 y 2021 para proyectar 2022. Se compararon regresión polinómica, ARIMA y un enfoque tipo *kriging* implementado mediante procesos gaussianos [6, 2, 5], evaluados con MAE, RMSE y MAPE. Los errores absolutos municipales fueron contrastados mediante Friedman y comparaciones pareadas de Wilcoxon [1]. Para el Cauca se analizaron hectáreas netas de coca, ingresos, gastos y deuda departamental entre 2017 y 2023, usando correlaciones de Pearson, Spearman y Kendall, pruebas de permutación y suavizamiento LOESS.

Resultados y discusión

Los resultados confirman que ARIMA continúa siendo el modelo con mejor desempeño para proyectar las hectáreas sembradas de coca en 2022. La regresión polinómica mejora de forma moderada, pero sigue siendo inferior, mientras que el enfoque tipo *kriging*/procesos gaussianos no supera a los modelos base. Esto evidencia que una mayor complejidad técnica no garantiza necesariamente una mejora predictiva.

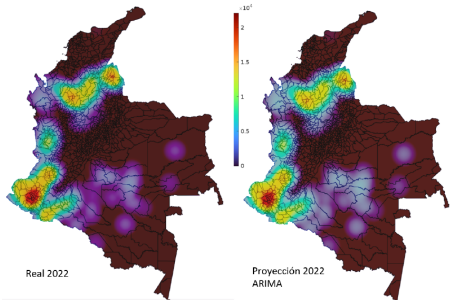


Figura 1: Proyecciones mapas de calor

En el caso del Cauca, la relación entre hectáreas netas de coca e ingresos departamentales se mantiene positiva, con evidencia más sólida en Pearson que en Spearman y Kendall. Las pruebas de permutación y el ajuste LOESS sugieren que la asociación debe interpretarse con prudencia, debido al número limitado de observaciones y a la posible presencia de factores externos.

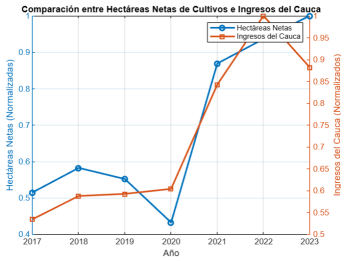


Figura 2: Correlación entre variables

Desde una perspectiva económica, los hallazgos sugieren que mayores ingresos en contextos de expansión de cultivos ilícitos no implican necesariamente un fortalecimiento fiscal estructural. La coexistencia entre ingresos crecientes, endeudamiento y limitada capacidad de ahorro es compatible con una bonanza aparente de corto plazo [4, 7].

Conclusiones

El estudio confirma la utilidad de ARIMA como herramienta de proyección para hectáreas sembradas de coca. La principal contribución de esta segunda fase es integrar validación estadística, análisis no paramétrico y perspectiva territorial, aportando una base más sólida para discutir riesgo fiscal, desarrollo regional y políticas públicas en territorios afectados por economías ilícitas.

Referencias

[1] Conover, W. J. (1999). *Practical Nonparametric Statistics*. Wiley.
[2] Cressie, N. (1993). *Statistics for Spatial Data*. Wiley.
[3] Datos Abiertos del Gobierno de Colombia. Base histórica de cultivos de coca en Colombia.
[4] Departamento Nacional de Planeación. (2023). Reportes fiscales territoriales y estadísticas de desempeño fiscal departamental.
[5] Hastie, T., Tibshirani, R., Friedman, J. (2009). *The Elements of Statistical Learning*. Springer.
[6] Hyndman, R. J., Athanasopoulos, G. (2021). *Forecasting: Principles and Practice*. OTexts.
[7] UNODC. Sistema Integrado de Monitoreo de Cultivos Ilícitos (SIMCI). Informes anuales sobre cultivos de coca en Colombia.

Estimación robusta de la matriz de covarianzas para el diseño de estrategias óptimas en la selección de portafolios

Danny A. Córdoba[1], Henry Laniado[2]

Universidad del Cauca, Popayán, Colombia [1] [2]

✉ dancordoba@unicauca.edu.co, hlaniado@unicauca.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. El objetivo de este trabajo es determinar el comportamiento de dos nuevas estrategias para optimizar los rendimientos en la selección de portafolios enfocándose en la estimación robusta de la matriz de covarianzas mediante percentiles (Σ_q), su variante (Σ_M) la cual contiene un sumando mediana y el uso de encogimientos (Shrinkage) para el buen condicionamiento de la matriz. Posteriormente se hará la comparación con las estrategias clásicas de inversión como covarianza Shrinkage (SRK), ponderación inversa al riesgo (PIR), filtrado de datos mediante umbralización covarianza Denoising (DNS), encogimiento analítico no lineal (LW2020) y la estrategia equiponderada $1/N$ para el mercado de valores. Como conclusión, se encuentra evidencia de mejor desempeño de las estrategias Σ_q y Σ_M con respecto a las estrategias mencionadas en términos de riesgo, ratio de Sharpe y costos de transacción.

Palabras claves. Portafolios de inversión, matriz de covarianzas, percentil óptimo.

Introducción

La optimización de carteras es un área fundamental de las finanzas cuantitativas, cuyo desarrollo formal inicia en Harry Markowitz [7] con su modelo de media-varianza enfocando la importancia del retorno de un activo y a la vez su riesgo asociado. A partir de este aporte surgieron numerosas contribuciones, las cuales coinciden en la búsqueda de un mejor rendimiento de las carteras, muchas de ellos mejorando los errores de estimación de la matriz de covarianzas como Laloux et al [4], Ledoit y Wolf [5] y [6]. Por otro lado, están los métodos que no realizan el cálculo de covarianzas como Puerta y Laniado [8] y la inversión equiponderada (1/N) [2]. Sin embargo, aunque estas técnicas tradicionales son funcionales, persiste la sensibilidad a casos atípicos en el caso de cálculo de covarianzas generando inestabilidad en los modelos de construcción de portafolios robustos y la falta de análisis en el comportamiento correlacionado en la estrategia ponderación inversa al riesgo (PIR) y equiponderada (1/N), generando problemas en carteras sectoriales.

Propuesta

La propuesta a presentar se basa en un enfoque novedoso para la estimación de la matriz de covarianzas mediante percentiles y encogimientos. El objetivo es analizar y determinar los parámetros óptimos para estas estrategias mediante un proceso de validación, esto permite determinar el ajuste de un percentil a la cartera presente. Los datos usados provienen de la página web Kenneth French Data Library [3], donde se seleccionaron retornos mensuales en el período (01/1990-01/2020). Esta serie de tiempo se procesará mediante el modelo de *Rolling horizon* con un tamaño de ventana fijo de 120 y rebalanceo mensual; todo con el fin de realizar una comparación con las estrategias antes mencionadas, analizando

su variabilidad, rendimiento bruto y asumiendo costos de transacción.
Para un portafolio aleatorio de 30 activos de [3] se muestran los resultados en el Cuadro 1 que resume el análisis para dicha cartera.

Activos	**Resultados**	Σ_q	Σ_M	**SRK**	**DNS**	**LW2020**	**PIR**	**1/N**
30	Media	1.1001	1.0750	1.0757	1.0475	1.1632	1.1707	1.1638
	D.Estándar	3.4922	3.4532	3.4425	3.4909	4.7562	4.3343	4.5619
	Ratio de Sharpe	0.3150	0.3113	0.3125	0.3001	0.2446	0.2701	0.2551

Cuadro 1: Resultados con costos de transacción.

Se observa que, en este escenario empírico, las estrategias propuestas Σ_q y Σ_M son competitivas frente a las estrategias clásicas (SKR), (DNS), (LW2020), (PIR) y (1/N). En particular, Σ_q alcanza el mayor ratio de Sharpe, mostrando una relación favorable entre rentabilidad y riesgo. Por su parte, Σ_M presenta un buen control del riesgo y un desempeño cercano al de las mejores estrategias. Estos resultados sugieren que los estimadores propuestos pueden contribuir a mejorar la construcción de portafolios al reducir la inestabilidad numérica y favorecer un mejor balance entre rentabilidad y riesgo.

Referencias

[1] Cont, R. (2001). Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues. *Quantitative Finance*, 1(2), 223–236. doi:10.1080/713665670

[2] DeMiguel, V., Garlappi, L., & Uppal, R. (2009). Optimal Versus Naive Diversification: How Inefficient is the 1/N Portfolio Strategy? *The Review of Financial Studies*, 22(5), 1915–1953.

[3] French, K. R. (n.d.). *Data Library*. Tuck School of Business, Dartmouth College. Disponible en: https://mba.tuck.dartmouth.edu/pages/faculty/ken.french/data_library.html

[4] Laloux, L., Cizeau, P., Bouchaud, J. P., Potters, M. (1999). Noise dressing of financial correlation matrices. *Physical Review Letters* 83(7). DOI: 10.1103/PhysRevLett.83.1467.

[5] Ledoit, O., Wolf, M. (2004). A well-conditioned estimator for large-dimensional covariance matrices. *Journal of Multivariate Analysis* 88(2). DOI: 10.1016/j.jmva.2003.08.002.

[6] Ledoit, O., Wolf, M. (2020). Analytical nonlinear shrinkage of large-dimensional covariance matrices. *The Annals of Statistics* 48(5). DOI: 10.1214/20-AOS1915.

[7] Markowitz, Harry M. (1952). "Portfolio Selection." *The Journal of Finance*, 7(1), 77–91. DOI: 10.1111/j.1540-6261.1952.tb01525.x.

[8] Puerta, A., Laniado, H. (2010). Diseño de estrategias óptimas para la selección de portafolios, un análisis de la ponderación inversa al riesgo (PIR). *Lecturas de Economía* 73(73). DOI: 10.17533/udea.le.n73a7873.

Validación psicométrica de un índice compuesto formativo para la evaluación multidimensional del impacto de egresados universitarios: modelo ISIA

Mireya García[1], Fabian Llano[1], Laura Linares [1]

[1] Universitaria Agustiniana, Bogotá, Colombia

✉ mireya.garcia@uniagustiniana.edu.co, fabian.llano@uniagustiniana.edu.co, laura.linares@uniagustiniana.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. Este estudio valida psicométricamente el índice Sintético de Impacto Agustiniano (ISIA), un índice compuesto formativo diseñado para evaluar el impacto de egresados universitarios en cuatro dimensiones: inserción laboral, crecimiento económico, formación continua y compromiso social/valores. Aplicado a 392 egresados de Contaduría Pública y Gastronomía de la Universitaria Agustiniana (cohortes 2022–2023), el ISIA mostró estabilidad (media 0,437, IC95 % [0,424, 0,450]), robustez frente a variaciones de pesos (correlación de Spearman promedio 0.997) y validez discriminante significativa entre programas (d de Cohen = 1,11, $p < 0{,}001$). Los coeficientes α por dimensión resultan bajos, lo que coincide con la literatura sobre índices formativos. El aporte central es un protocolo replicable de validación de índices compuestos formativos en investigación educativa, que integra criterios formativos y reflectivos con interpretación diferenciada, ofreciendo evidencia sólida sobre la utilidad práctica del ISIA para clasificar egresados y orientar decisiones institucionales.

Palabras claves. Índice compuesto formativo, validación psicométrica, análisis de sensibilidad, evaluación educativa.

Introducción

La evaluación del impacto de los egresados es un campo metodológicamente exigente. Los marcos internacionales convergen en cuatro dimensiones: pertinencia, equidad, calidad percibida e impacto social; sin embargo, los instrumentos disponibles tienden a reportar indicadores aislados sin integrarlos en una métrica sintética comparable [2]. Esta fragmentación dificulta tanto la comparabilidad entre programas como la interpretación causal de los efectos formativos. En particular, las instituciones de educación superior con misión humanista enfrentan una limitación adicional, ya que sus propósitos formativos incorporan dimensiones axiológicas y comunitarias que la teoría del capital humano no captura por sí sola [3]. Pese a que enfoques como las capacidades de Sen [5] o el capital social cívico de Putnam ofrecen un sustento normativo para ampliar la medición, su operacionalización empírica sigue siendo escasa [1].

Por lo anterior, se considera como pregunta de investigación: ¿el ISIA, en su versión V1 aplicada al estudio piloto 2022 a 2023, satisface los criterios de validación pertinentes a un índice compuesto formativo (estabilidad, robustez de pesos, validez discriminante por criterio externo, cobertura conceptual)? Además, cabe preguntarnos ¿cómo se interpretan los criterios reflectivos clásicos (alfa de Cronbach, ajuste factorial confirmatorio) bajo este paradigma de medición?

Construcción conceptual del ISIA

El impacto agustiniano se define como el conjunto de transformaciones verificables y narrables que la formación universitaria produce en el egresado y en su entorno inmediato, en las dimensiones del ser

(valores e identidad ética), del saber (competencias técnicas y analíticas) y del hacer con otros (acción solidaria, liderazgo comunitario y transferencia social). Esta definición articula la teleología institucional con los referentes normativos del enfoque de capacidades [5] y del capital social cívico [4], e integra las dimensiones económicas como condición necesaria pero no suficiente del impacto. La fórmula general del ISIA es un promedio ponderado de los cuatro subíndices dimensionales normalizados al rango cero a uno mediante normalización Min-Max: $ISIA = 0{,}35D_1 + 0{,}25D_2 + 0{,}20D_3 + 0{,}20D_4$ Cada subíndice D_i se calcula como suma ponderada de sus ítems componentes una vez normalizados. Los puntos de corte para la categorización del egresado son ISIA menor que 0.40 (impacto bajo), entre 0.40 y 0.65 (impacto medio) y mayor o igual a 0.65 (impacto alto). Estos umbrales se establecieron a partir de la distribución empírica de la base piloto y de las consideraciones operativas para las acciones institucionales subsiguientes.

Resultados

La investigación se aplicó a una muestra de 392 egresados de Contaduría Pública y Tecnología en gestión gastronómica (cohortes 2022–2023), de los cuales en 343 casos se contó con datos laborales completos. Los resultados muestran un índice estable (media 0,437, IC95 % bootstrap $[0{,}424, 0{,}450]$) y altamente robusto frente a perturbaciones en los pesos teóricos (correlación de Spearman promedio 0,997 en 1000 simulaciones). La validez discriminante fue significativa: el ISIA diferenció claramente entre programas académicos (d de Cohen $= 1{,}11$, $p < 0{,}001$) y mostró diferencias moderadas según condición parental ($d = 0{,}52$), mientras que no hubo diferencias significativas por género.

Los indicadores reflectivos tradicionales (alfa de Cronbach, AFC, KMO) resultaron bajos, hallazgo esperado en constructos formativos y atribuible a ítems binarios con prevalencia reducida ($< 10\,\%$), que además muestra las limitaciones de índices como el alfa de Cronbach como criterio de calidad [6]. Este diagnóstico justifica el rediseño del instrumento (V2), que incorpora ítems ordinales tipo Likert, mayor granularidad en escalas de ingreso y cargo, indicadores de movilidad social y participación comunitaria no formalizada.

Referencias

[1] Dodd, M., Brummette, J., Hazleton, V. (2015). A social capital approach: An examination of Putnam's civic engagement and public relations roles, *Public relations review* 41(4): 472-479. DOI: 10.1016/j.pubrev.2015.05.001.

[2] Galarza, C., Vivero, C., Menoscal, J. (2024). Seguimiento a egresados y su importancia para las instituciones de educación superior. *Sinergia académica* **7**(3): 73-89. DOI: 10.51736/69shfk78.

[3] Leoni, S. (2025). A Historical Review of the Role of Education: From Human Capital to Human Capabilities. *Review of political economy* 37(1): 227-244. DOI: 10.1080/09538259.2023.2245233.

[4] Putnam, R. (2000). *Bowling alone: The collapse and revival of American community.* New York, US: Simon & Schuster paperbacks.

[5] Sen, A. (1999). *Development as freedom.* Oxford, UK: Oxford University Press.

[6] Sijtsma, K. (2009). On the use, the misuse, and the very limited usefulness of Cronbach's alpha. *Psychometrika* 74(1): 107-120. DOI: 10.1007/s11336-008-9101-0.

Predicción de enlaces en redes teóricas y empíricas

Uver Andres Ortega Hoyos[1], Diego Fernando Ruiz Solarte[1]

[1] Universidad del Cauca, Popayán, Colombia

✉ uortega@unicauca.edu.co, dfruiz@unicauca.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. La predicción de enlaces (link prediction) es un problema central en el análisis de redes complejas. En esta conferencia presentaremos los fundamentos matemáticos del problema, incluyendo índices de similitud basados en vecindad local (Common Neighbors, Jaccard, Adamic-Adar, Resource Allocation, Preferential Attachment) y métodos de aprendizaje supervisado. Comparamos cuatro clasificadores (Random Forest, Regresión Logística, SVM y KNN) sobre un conjunto de datos real, obteniendo que la Regresión Logística alcanza el mejor AUC-ROC (0.9426) pero con 370 falsos negativos, mientras que Random Forest presenta un equilibrio superior con solo 160 falsos negativos y un AUC-ROC de 0.9360. Se analiza además el comportamiento de estos métodos en redes generadas mediante el modelo de Barabási-Albert y en redes sociales reales, mostrando cómo la elección del mejor predictor depende de la densidad y estructura de cada red.
Palabras claves. Predicción de enlaces, redes complejas, Random Forest, Barabási-Albert, grafos

Estudio de redes complejas

La predicción de enlaces (link prediction) es uno de los problemas centrales en el análisis de redes complejas. Formalmente, dada una red $G = (V, E)$ donde V es el conjunto de nodos y E el conjunto de enlaces observados, se trata de estimar la probabilidad $P(u, v)$ de que exista una conexión entre dos nodos $u, v \in V$ que actualmente no están conectados, o de que dicha conexión aparezca en el futuro [1, 2].

El enfoque más extendido para abordar este problema es el uso de índices de similitud basados en la topología de la red. Estos índices asignan un valor a cada par de nodos en función de su posición estructural, y su desempeño varía significativamente según el tipo de red [1]. Los más utilizados se dividen en varias familias, como se muestra a continuación.

Métodos de vecindad local: utilizan exclusivamente la información de los vecinos inmediatos. Entre ellos destacan:
Se denota por $\Gamma(v)$ al conjunto de vecinos del nodo v en la red, es decir, $\Gamma(v) = \{u \in V : (u, v) \in E\}$.

- Common Neighbors (CN): $S_{uv} = |\Gamma(u) \cap \Gamma(v)|$.
- Coeficiente de Jaccard: $S_{uv} = \frac{|\Gamma(u) \cap \Gamma(v)|}{|\Gamma(u) \cup \Gamma(v)|}$.
- Adamic-Adar (AA): $S_{uv} = \sum_{z \in \Gamma(u) \cap \Gamma(v)} \frac{1}{\log |\Gamma(z)|}$.
- Resource Allocation (RA): $S_{uv} = \sum_{z \in \Gamma(u) \cap \Gamma(v)} \frac{1}{|\Gamma(z)|}$.
- Preferential Attachment (PA): $S_{uv} = |\Gamma(u)| \cdot |\Gamma(v)|$.

Métodos de caminos y rutas: incorporan información de caminos de longitud superior. El índice de Katz, por ejemplo, suma todos los caminos ponderados exponencialmente según su longitud.

Métodos basados en aprendizaje supervisado: en lugar de usar un índice fijo, se entrena un clasificador (Random Forest, Regresión Logística, SVM, KNN) con múltiples características topológicas extraídas para cada par de nodos.

Resultados experimentales

En nuestro trabajo comparamos cuatro clasificadores sobre un conjunto de datos real. No existe un clasificador universalmente óptimo [1], sino que el rendimiento depende de las propiedades estructurales de cada red. Nuestros resultados confirman esta observación.

La Regresión Logística obtuvo los mejores valores de AUC-ROC (0.9426) y AUC-PR (0.9356). Sin embargo, su número de falsos negativos (370) fue más del doble que el de Random Forest (160). Esto significa que, aunque la Regresión Logística acierta más verdaderos positivos en términos absolutos, también falla en detectar muchas conexiones que realmente existen. Random Forest resulta más equilibrado, especialmente cuando es crítico no perder enlaces reales. Este tipo de compensaciones entre métricas ha sido ampliamente discutido en la literatura [2].

El análisis de importancia de características en Random Forest muestra que *preferential attachment* fue el predictor más relevante, seguido de *adamic_adar* y *resource allocation*. Los vecinos comunes (*common neighbors*) y el coeficiente de Jaccard tuvieron un peso mucho menor. Esto indica que, en la red analizada, la probabilidad de conexión entre dos nodos depende principalmente del producto de sus grados.

También trabajamos con redes generadas mediante el modelo de Barabási-Albert, que producen distribuciones de grado en ley de potencias. En estas redes sintéticas, el índice de *preferential attachment* alcanza valores de AUC superiores a 0.98, ya que el mecanismo de crecimiento del modelo es explícitamente preferencial. Sin embargo, un clasificador entrenado exclusivamente con redes de Barabási-Albert no generaliza bien a redes reales, porque estas últimas presentan propiedades adicionales (comunidades, clustering, ruido) que el modelo sintético no reproduce. A continuación se presentan los valores detallados de rendimiento para cada clasificador evaluado.

Tabla 1: Comparación de métricas para los cuatro clasificadores.

Modelo	**AUC-ROC**	**AUC-PR**	**VP**	**FP**	**FN**	**VN**
Random Forest	0.9360	0.9239	1449	290	160	1625
Logistic Regression	0.9426	0.9356	1590	149	370	1415
SVM	0.9257	0.8869	1529	210	263	1522
KNN	0.9127	0.8726	1441	298	193	1592

Referencias

[1] Kumar, A., Singh, S. S., Singh, K., Biswas, B. (2020). Link prediction techniques, applications, and performance: A survey. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 553: 124289.

[2] Lü, L., Zhou, T. (2011). Link prediction in complex networks: A survey. *Physica A* 390(6): 1150-1170.

Diseño de una versión robusta de la regresión logística

Karold Guzmán[1], Adrián Fajardo[1], Henry Laniado[1]

[1] Departamento de Matemáticas, Universidad del Cauca, Popayán, Colombia

✉ karoldguzman@unicauca.edu.co, estivenest@unicauca.edu.co, hlaniado@unicauca.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. La regresión logística es un método ampliamente utilizado para la clasificación supervisada con etiqueta binaria; sin embargo, su desempeño se ve seriamente afectado por la presencia de valores atípicos. Es conocido que la estimación clásica basado en el método de máxima verosimilitud es altamente sensible a la presencia de datos atipicos,por lo tanto los coeficientes estimados pueden resultar poco confiables, afectando la estabilidad y la capacidad predictiva del modelo. En este trabajo se propone un método de estimación robusta para la regresión logística que limita la influencia de observaciones atípicas y preserva la estabilidad bajo distintos esquemas de contaminación. El método se evalúa mediante estudios de simulación considerando diferentes niveles de contaminación y dimensionalidad. Los resultados muestran que la propuesta evidencia una mejora al estimador clásico, de forma especial en escenarios de alta dimensionalidad, donde mantiene estabilidad y buen desempeño predictivo incluso bajo altos niveles de contaminación.
Palabras claves. Regresión logística, Estimación logística robusta, Valores atípicos, Alta dimensionalidad

Introducción

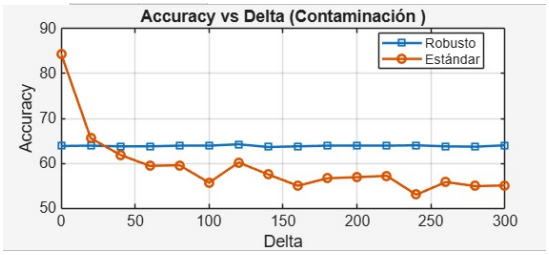
La regresión logística constituye una de las herramientas más utilizadas para el análisis de datos con respuesta binaria, debido a su formulación probabilística, facilidad de implementación e interpretabilidad. Su aplicación se extiende a múltiples áreas como la salud, la economía, la minería de datos y el aprendizaje automático, donde permite modelar la relación entre una variable respuesta y un conjunto de covariables, tal como se describe en [4]. En estos contextos, el modelo facilita la toma de decisiones mediante la estimación de probabilidades asociadas a la ocurrencia de eventos de interés, como se discute en [5]. Asimismo, su estructura permite interpretar de manera clara el efecto de las variables explicativas, lo que ha contribuido a su amplia adopción en problemas aplicados.

A pesar de sus ventajas, la regresión logística clásica presenta limitaciones importantes cuando los datos contienen ruido, errores de medición o valores atípicos. Estas situaciones son frecuentes en aplicaciones reales y afectan de manera significativa la estimación de los parámetros, ya que el método de máxima verosimilitud, comúnmente utilizado, es altamente sensible a observaciones extremas. Como se analiza en [1], esta sensibilidad está relacionada con la presencia de funciones de influencia no acotadas, lo que evidencia la falta de robustez del enfoque tradicional y puede generar inestabilidad en las predicciones, así como una disminución en el desempeño de los clasificadores.

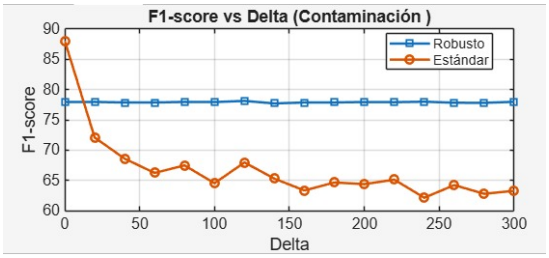
En este contexto, la regresión logística robusta surge como una alternativa que busca desarrollar métodos de estimación menos sensibles a la contaminación de los datos, manteniendo propiedades estadísticas adecuadas incluso bajo desviaciones de los supuestos ideales [5]. Desde esta perspectiva, herramientas como la función de influencia permiten analizar y controlar el impacto de observaciones atípicas sobre el estimador, proporcionando un marco teórico sólido para el diseño de procedimientos robustos. En particular, el estudio de funciones de influencia acotadas resulta clave para garantizar que observaciones extremas no dominen el proceso de estimación.

Resultados

Este estudio se complementa con una evaluación empírica mediante métricas de clasificación como *accuracy* y *F1-score*, con el fin de analizar el desempeño del método propuesto en distintos escenarios, incluyendo situaciones con presencia de valores atípicos y distintos niveles de contaminación en los datos.



(a) Accuracy bajo contaminación con $\alpha = 30\,\%$.



(b) F1-score bajo contaminación con $\alpha = 30\,\%$.

Figura 1: Descripción general de las métricas de Accuracy y F1-score

Los resultados obtenidos evidencian un contraste importante entre ambos enfoques. En ausencia de ruido ($\delta = 0$), el modelo estándar presenta métricas de Accuracy y F1-score superiores; sin embargo, esta ventaja desaparece rápidamente a medida que aumenta la contaminación. Como se observa en las gráficas, mientras el rendimiento del modelo clásico se degrada progresivamente, la propuesta robusta mantiene una estabilidad considerable.

Este comportamiento muestra que el modelo robusto sacrifica parte de la precisión inicial a cambio de una mayor resistencia frente a datos contaminados. En niveles moderados de contaminación, el método robusto supera sistemáticamente al modelo estándar, evidenciando una mayor confiabilidad en escenarios simulados como de alta dimensión.

Referencias

[1] Feng, Y., Bi, Y., An, X. (2014). Robust logistic regression with applications. *Statistical Methods & Applications*. 23(1): 147–162.
https://doi.org/10.1007/s10260-013-0255-3

[2] Maronna, R. A., Martin, R. D., Yohai, V. J. (2006). *Robust Statistics: Theory and Methods*. Chichester: John Wiley & Sons.
https://onlinelibrary.wiley.com/doi/book/10.1002/0470010940

[3] McCullagh, P., Nelder, J. A. (1989). *Generalized Linear Models*. London: Chapman & Hall.
https://doi.org/10.1007/978-1-4899-3242-6

[4] Menard, S. (2002). *Applied Logistic Regression Analysis*. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.
https://us.sagepub.com/en-us/nam/applied-logistic-regression-analysis/book226130

[5] Tibshirani, R. (2014). *Robust Statistics and Machine Learning*.
https://statweb.stanford.edu/~tibs/sta305files/

Extensión del concepto de percentil α a funciones continuas

Maria P. Bautista [1], Henry Laniado [1]

[1] Departamento de Matemáticas Universidad del Cauca, Popayán, Colombia

✉ paularodriguez@unicauca.edu.co, hlaniado@unicauca.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. En este trabajo se propone extender el enfoque de la mediana (percentil $\alpha = 0{,}5$) estudiado para funciones continuas hacia la construcción de percentiles más generales considerando $\alpha \in (0, 1)$, con el fin de desarrollar un marco teórico y muestral más amplio para medidas de posición asociadas a funciones continuas. La metodología estudiada aquí no se limita únicamente a la mediana, en efecto, la principal contribución de la investigación consiste en su generalización y así definir el concepto general de percentiles de una función f. Se presentan las propiedades teóricas deseables, se adaptan y reformulan a escenarios más generales ciertos resultados y teoremas desarrollados hasta el momento solo para la mediana funcional. Se exponen aplicaciones del nuevo concepto en el análisis de datos funcionales para relevantes contextos prácticos como las finanzas, medio ambiente, biología, entre otros.

Palabras claves. Mediana, Función continua, Medida de Lebesgue, Percentiles, Integral de Lebesgue.

Introducción

En el análisis matemático y estadístico, la mediana de una función continua ha sido objeto de diferentes investigaciones [1, 3] debido a sus aplicaciones prácticas. Sin embargo, muchos de estos estudios se han centrado exclusivamente en el caso particular correspondiente al percentil $\alpha = 0{,}5$. En consecuencia, la teoría disponible resulta escasa o insuficiente para abordar el cálculo y análisis de los demás percentiles en espacios funcionales continuos.

La presente investigación toma como punto de partida la regresión cuantílica estudiada en [2], quienes demostraron que cualquier percentil discreto puede ser hallado minimizando una función de pérdida asimétrica con pesos α y $(1-\alpha)$. Seguidamente, se analiza el marco teórico propuesto por [1, 3], quienes trasladaron el problema de optimización al espacio de funciones continuas utilizando operadores integrales simétricos. Para una función continua $f(x)$ sobre un dominio Ω, ellos definieron la mediana funcional minimizando la siguiente integral.

$$A(t) = \int_{\Omega} |f(x) - t|\, dx$$

La limitación de este enfoque radica en que sus hallazgos se restringen exclusivamente al centro de la distribución ($\alpha = 0{,}50$), debido a la simetría inherente de la función de distancia utilizada. Por lo tanto, la metodología de este trabajo consiste en sintetizar el enfoque asimétrico considerado en [2] con el operador continuo introducido en [3] para romper dicha restricción de simetría y generalizar el cálculo de cualquier percentil en el espacio continuo.

Metodología

Para lograr esta generalización, en esta charla se expone una nueva metodología general para la definición de la integral de costo asimétrico, denotada como $A_\alpha(t)$. Se construye dividiendo el dominio

en conjuntos de nivel y ponderando las distancias entre $f(x)$ y el parámetro t. Específicamente, se asigna un peso α cuando $f(x) \geq t$, y un peso $(1-\alpha)$ cuando $f(x) \leq t$, obteniendo la siguiente expresión analítica general:

$$A_\alpha(t) = \alpha \int_{\{x\in\Omega: f(x)\geq t\}} |f(x) - t|\, dx + (1-\alpha) \int_{\{x\in\Omega: f(x)\leq t\}} |f(x) - t|\, dx \tag{1}$$

Finalmente, el α-ésimo percentil funcional continuo, denotado como P_α, se define formalmente como el argumento que minimiza globalmente dicho operador integral. Es decir

$$P_\alpha = \min_{t\in\mathbb{R}} A_\alpha(t) \tag{2}$$

A partir de esta formulación general, se procede a demostrar analíticamente las propiedades topológicas del funcional, tales como la existencia y unicidad del mínimo, y su aplicación en casos de estudio específicos evaluando las condiciones de primer orden ($A'_\alpha(t) = 0$).

Resultados

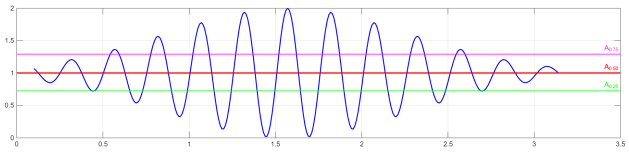


Figura 1: $y = e^{-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2} \cos\left(25\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right) + 1$

La Figura (1) ilustra la geométrica de la optimización simétrica descrita por [1, 3]. La línea roja marca la posición exacta de la mediana ($P_{0,50}$) para una función oscilatoria continua, la cual minimiza la integral del error absoluto.

Conclusión

El funcional asimétrico $A_\alpha(t)$ trasciende a un marco analítico riguroso para calcular cualquier percentil continuo. Esta generalización resulta fundamental abriendo nuevas vías de modelamiento robusto para caracterizar medidas de dependencia estadística entre conjunto de funciones y sus aplicaciones.

Referencias

[1] Bivens, I. C., & Klein, B. G. (2015). The Median Value of a Continuous Function. *Mathematics Magazine*, 88(1), 39-51.

[2] Koenker, R., & Bassett, G. (1978). Regression Quantiles. Econometrica, 46(1), 33-50.

[3] Noah, S. G. (2007). The Median of a Continuous Function. *Real Analysis Exchange*, 33(1), 269-274.

Análisis de robustez de redes viales: un caso de estudio de la ciudad de Popayán

John Harold Trochez Montano[1], Diego Fernando Ruiz Solarte[1]

[1] Universidad del Cauca, Popayán, Colombia

✉ johntro@unicauca.edu.co, dfruiz@unicauca.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. Las ciudades son sistemas complejos cuyo funcionamiento depende básicamente de sus redes de infraestructura vial, particularmente de la estructura de calles que constituye la base sobre la cual se movilizan personas, bienes y servicios. En este contexto, la teoría de grafos emerge como una herramienta fundamental para modelar y analizar estas redes, donde las aristas representan las calles y los nodos, las intersecciones. El presente trabajo se centra en el estudio de la robustez y la conectividad de la red vial de Popayán ante fallos dirigidos y aleatorios. A diferencia de los enfoques tradicionales centrados en nodos, se propone un análisis basado en la centralidad de aristas, identificando aquellas calles con mayor relevancia estructural. Mediante la simulación de escenarios de eliminación de aristas, siguiendo métricas como centralidad de intermediación y una extensión de la centralidad del vecino más cercano, se evalúa el comportamiento de la infraestructura vial. Si bien el valor de Fiedler clásico se define para grafos no dirigidos, aquí se emplea el laplaciano de Chung para grafos dirigidos, calculando su generalización como una medida de qué tan difícil es desconectar la red. Los resultados permiten cuantificar la conectividad global y la fragmentación, ofreciendo una perspectiva sobre la vulnerabilidad y robustez del sistema.

Palabras claves. Robustez, intermediación, conectividad, Fiedler, laplaciano.

Numerosos fenómenos reales, incluyendo las redes de transporte urbano, se modelan mediante grafos donde las vías representan aristas y las intersecciones, vértices [6, 4]. Este enfoque de modelado permite aplicar herramientas matemáticas y computacionales para analizar la estructura, el comportamiento y la vulnerabilidad de estos sistemas complejos. Las redes de infraestructura, particularmente las viales, enfrentan constantemente alteraciones que comprometen su operatividad. Estas perturbaciones pueden clasificarse en dos categorías principales: ataques aleatorios, que incluyen eventos imprevistos como accidentes, desastres naturales o deterioro físico de componentes; y ataques dirigidos, que son intervenciones intencionales como cierres programados de vías principales por intereses particulares o ataques deliberados a la infraestructura [1, 5, 4]. Ambos tipos de alteraciones pueden ocasionar cambios significativos en las propiedades estructurales de la red, así como afectaciones negativas en las sociedades que dependen de ellas para su movilidad diaria, acceso a servicios y desarrollo económico.

Para evaluar cómo estas alteraciones afectan la estructura de la red, se utiliza el concepto de robustez, definida como la capacidad que tiene una red de mantener su conectividad estructural ante fallos aleatorios o ataques dirigidos [5, 4]. Existen diversas medidas estructurales para cuantificar esta propiedad [5], entre las cuales destacan las medidas de centralidad por su aplicabilidad en el estudio de redes de transporte vial. Dado que en una red vial la operatividad está determinada por el estado de las vías (aristas) y no solo por las intersecciones (vértices), el análisis se centra en medidas de centralidad para aristas: la centralidad de intermediación, que identifica aristas puente en los caminos más cortos [6, 8], y una extensión de la centralidad de arista del vecino más cercano [2]. Ambas métricas permiten identificar aquellas calles que cumplen un papel estructural clave dentro de la red. Si bien en la literatura clásica el valor de Fiedler y la matriz laplaciana se definen para grafos no dirigidos [6, 5]; en este trabajo la red vial se modela como un grafo dirigido; por lo tanto, se emplea el laplaciano de Chung para digrafos

y se calcula una generalización del valor de Fiedler a partir de su segundo autovalor más pequeño [3]. Esta métrica permite evaluar qué tan difícil es desconectar la red y cómo esta propiedad se degrada progresivamente ante ataques dirigidos y aleatorios. El objetivo del proyecto es identificar los componentes críticos de la red vial urbana de la ciudad de Popayán, mediante estas métricas y simular ataques a las aristas para analizar cómo su eliminación afecta la conectividad global de la red [7], aportando criterios fundamentados para la planificación urbana y la gestión de infraestructuras críticas [1].

La relevancia de este estudio radica en que, a diferencia de enfoques tradicionales centrados en vértices, el análisis basado en aristas permite una representación más fiel de la realidad vial, donde las calles son los elementos que efectivamente pueden ser intervenidos, cerrados o colapsados. Además, la metodología propuesta puede extenderse a otros tipos de redes de infraestructura, como redes eléctricas, de agua potable o de telecomunicaciones, donde los enlaces también juegan un papel crítico en la operatividad del sistema.

Referencias

[1] Alatrista-Salas, H., Núñez del Prado Cortez, M., & Rodríguez-López, M. G. (2019). Robustness of densely populated urban networks in relation to the spread of traffic. *TECHNO REVIEW. International Technology, Science and Society Review / Revista Internacional de Tecnología, Ciencia y Sociedad*, *8*(1), 1–10. DOI: 10.37467/gka-revtechno.v8.2042

[2] Bröhl, T., & Lehnertz, K. (2022). A straightforward edge centrality concept derived from generalizing degree and strength. *Scientific Reports*, *12*(1), 4407. DOI: 10.1038/s41598-022-08254-5

[3] Chung, F. (2005). Laplacians and the Cheeger inequality for directed graphs. *Annals of Combinatorics*, *9*(1), 1–19. DOI: 10.1007/s00026-005-0237-z

[4] Duan, Y., & Lu, F. (2014). Robustness of city road networks at different granularities. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, *411*, 21–34. DOI: 10.1016/j.physa.2014.05.064

[5] Freitas, S., Yang, D., Kumar, S., Tong, H., & Chau, D. H. (2021). Graph vulnerability and robustness: A survey. *arXiv*. DOI: 10.48550/arXiv.2105.00419

[6] Newman, M. E. J. (2010). *Networks: An introduction*. Oxford University Press.

[7] Wu, J., Barahona, M., Tan, Y.-J., & Deng, H.-Z. (2011). Spectral measure of structural robustness in complex networks. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics—Part A: Systems and Humans*, *41*(6), 1244-1252. DOI: 10.1109/TSMCA.2011.2116117

[8] Yang, R. (2024). Effective edge centrality via neighborhood-based optimization [Preprint]. arXiv. DOI: 10.48550/arXiv.2402.12623

Análisis Numérico de la Probabilidad de Extinción en Procesos Especiales de Ramificación

Christiam F. Pistala[1], Catalina M. Rúa-Alvarez[2], Pablo M. Rodríguez[3]

[1] Universidad CESMAG, San Juan de Pasto, Colombia.
[2] Universidad de Nariño, San Juan de Pasto, Colombia.
[3] Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Brasil.
✉ cfpistala@unicesmag.edu.co, catalina.rua@udenar.edu.co, pablo@de.ufpe.br

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. Los procesos de ramificación son modelos estocásticos que surgen como un enfoque analítico para determinar la extinción de apellidos de familias aristócratas de una población [4] y posteriormente se aplican para estudiar fenómenos en los cuales un individuo se reproduce, generando nuevos individuos con la capacidad de dividirse y dar lugar a nuevas generaciones. Una de las preguntas centrales en este contexto es determinar las condiciones bajo las cuales el proceso se extingue. La probabilidad de extinción de estos procesos está estrechamente relacionada con la identificación de los puntos fijos de una función denominada función generadora de probabilidad. Para aproximar dichos puntos fijos, en este trabajo se usan los métodos del punto fijo y de Newton, implementados en R y Python.

Los conceptos presentados en esta investigación se aplican en un caso de estudio presentado en [2], donde se modela la transmisión de la desinformación en entornos digitales mediante procesos de ramificación. Los algoritmos numéricos desarrollados en esta investigación permitieron generar mapas de calor detallados, los cuales revelan cómo varía el comportamiento de la propagación de la desinformación en función de los parámetros del modelo, proporcionando así una herramienta valiosa para el análisis de este fenómeno en escenarios digitales.

Palabras claves. Procesos de ramificación, Probabilidad de extinción, Función generadora de probabilidad, Método de Newton, Método de punto fijo

Los procesos de ramificación surgen como un enfoque analítico para estudiar fenómenos en los cuales un individuo se reproduce, generando nuevos individuos con la capacidad de dividirse y dar lugar a una nueva generación. Una de las preguntas más intrigantes en este contexto es determinar las condiciones bajo las cuales el proceso se extingue. Este problema tiene aplicaciones significativas en diversos campos como la biología (modelos de población y evolución), la informática (algoritmos y estructuras de datos), la epidemiología (propagación de enfermedades), la física nuclear (reacciones en cadena) y el marketing digital (difusión de información y campañas publicitarias), entre otros [1, 2, 3, 6, 8].

Desde los trabajos pioneros de Galton y Watson, quienes establecieron deducciones fundamentales sobre la probabilidad de extinción en procesos de ramificación [4, 5], se han desarrollado múltiples enfoques teóricos para estudiar tanto la probabilidad como los tiempos de extinción en estos procesos y sus variantes. Un elemento central en este análisis es la determinación de un punto fijo de la llamada "función generadora de probabilidades", tal como se presenta en [7, 8, 10]. El análisis de la probabilidad de extinción en procesos de ramificación combina relevancia teórica y aplicaciones prácticas. En el plano teórico, un resultado esencial establece que esta probabilidad está directamente relacionada con los puntos fijos de la función generadora de probabilidades [10, 11], cuya resolución puede ser especialmente compleja dependiendo del modelo específico de ramificación. Desde una perspectiva práctica, los métodos numéricos ofrecen una herramienta poderosa para aproximar estos puntos fijos, permitiendo no solo estimar la probabilidad de extinción, sino también simular el comportamiento del proceso. El estudio de

propiedades como la convergencia, la estabilidad y el error de estos métodos es crucial para garantizar la validez de las aproximaciones y extraer conclusiones confiables desde el análisis numérico [12].

En esta investigación se llevó a cabo un estudio teórico y numérico de las ecuaciones que determinan la probabilidad de extinción en procesos de ramificación específicos. El análisis se enfocó inicialmente en los fundamentos teóricos de la probabilidad y en los resultados clásicos asociados al proceso de Bienaymé Galton Watson (PBGW), explorando sus propiedades esenciales, como la generación de descendencia y las condiciones que definen la extinción del proceso. Posteriormente, se extendió el enfoque hacia variaciones del proceso original, dando lugar a procesos de ramificación más complejos, como los procesos multitipo, que incorporan diferentes clases de individuos, y otras extensiones relevantes en aplicaciones prácticas más detalles sobre estos procesos especiales se pueden ver en [1, 2, 10]. Estas variaciones permiten modelar fenómenos más ricos y ajustados a escenarios reales, como la dinámica de poblaciones heterogéneas, epidemias o sistemas de reacción en cadena. En este sentido, en este trabajo se presentarán los principales resultados al usar técnicas de probabilidad y análisis numérico para aproximar, de manera eficiente, la probabilidad de extinción en procesos de ramificación, disponible con mayor detalle en [9].

Referencias

[1] Allen, L. J. (2010). *An introduction to stochastic processes with applications to biology*. 2nd edition. CRC Press. ISBN: 9781439818824.

[2] Gómez, L. M., Valdivino, V. J., Rodríguez, P. M. (2024). The impact of effective participation in stopping misinformation: An approach based on branching processes. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*.

[3] Grimmett, G., Stirzaker, D. (2020). *Probability and Random Processes*. Oxford University Press. ISBN: 978-0-19-884759-5.

[4] Kendall, D. G. (1966). Branching processes since 1873. *Journal of the London Mathematical Society*. 1(1): 385–406.

[5] Kendall, D. G. (1975). The genealogy of genealogy: Branching processes before (and after) 1873. *Bulletin of the London Mathematical Society*. 7(3): 225–253.

[6] Martínez Quintana, R. (2004). *Aportaciones a la teoría de los procesos de ramificación multitipo*. Tesis de doctorado no publicada. Universidad de Extremadura.

[7] Ospina Martínez, R. (2001). Proceso de Galton-Watson. *Revista Colombiana de Estadística*. 24: 13–26.

[8] Penna, A. (2022). *Cadeias de Markov: Processos de ramificações e suas aplicações*. Tesis de Maestría en Matemática Aplicada y Computacional. Universidade Estadual Paulista.

[9] Pistala, C. F. (2025). *Análisis numérico de la probabilidad de extinción en procesos especiales de ramificación*. Tesis de maestría. Universidad de Nariño.

[10] Rodríguez, P. M. (2012). *Processos de ramificação: teoría e aplicações*. ICMC-USP, São Carlos.

[11] Schinazi, R. B. (2014). *Classical and Spatial Stochastic Processes*. Springer.

[12] Terán-Tarapués, J. A. (2018). *Generalización del método de Newton y sus aplicaciones*. Trabajo de grado. Universidad de Nariño.

Estrategias Híbridas de Selección de Portafolios: Redundancia Geométrica y Regularización Espectral

Edwin Chamorro[1], Henry Laniado[1]

[1] Departamento de Matemáticas, Universidad del Cauca, Popayán, Colombia

✉ echamo@unicauca.edu.co, hlaniado@unicauca.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. Se propone una familia de Estrategias Híbridas de selección de portafolios que mitiga simultáneamente el ruido muestral y la colinealidad, integrando la reducción de redundancia geométrica —basada en factores de inflación de la varianza (VIF)— con estimadores robustos de covarianza y regularización espectral. La evaluación fuera de muestra sobre cuatro escenarios de dimensionalidad creciente ($N = 6, 10, 40, 70$) demuestra que, mientras la minimización de varianza clásica colapsa a $N = 70$ (Sharpe neto $= -0{,}0016$, *turnover* $= 2{,}14$), los modelos híbridos comprimen la rotación en más de un 99 % y preservan un Sharpe neto de 0,22, superando consistentemente a la regla $1/N$ y a la paridad de riesgo inversa.
Palabras claves. Portafolios, mínima varianza, alta dimensionalidad, regularización espectral.

Introducción

El modelo de media-varianza de Markowitz [3] constituye el marco fundamental de la teoría moderna de portafolios; sin embargo, la inversión directa de la matriz de covarianza muestral amplifica los errores de estimación, generando ponderaciones inestables y una rotación (*turnover*) operativamente inviable bajo costos friccionales [1]. Este colapso se agrava en alta dimensionalidad: cuando N crece, la covarianza muestral se vuelve mal condicionada, produciendo portafolios sobreconcentrados con rotación destructiva. Para cerrar esta brecha, se propone una familia de estrategias que *separan* la escala de riesgo individual de la dependencia sistémica, prescindiendo de la inversión matricial y empleando estimadores robustos combinados con la tolerancia VIF [5].

Metodología

Peso híbrido. Sea $H \in \mathcal{S}_N^{++}$ un estimador robusto de la covarianza del vector de rentabilidades $X \in \mathbb{R}^N$. Para $i = 1, \ldots, N$, el peso del activo i es:

$$w_i = \frac{\phi_i}{\sum_{j=1}^{N} \phi_j}, \qquad \phi_i = \frac{1}{\sigma_i\, d_i} = \frac{1}{H_{ii}^{3/2}(H^{-1})_{ii}}, \tag{1}$$

donde $\sigma_i = \sqrt{H_{ii}}$ es la desviación estándar robusta y $d_i = H_{ii}(H^{-1})_{ii}$ es el factor de redundancia, que verifica $1/d_i = 1 - R_i^2$, con R_i^2 el coeficiente de determinación de la regresión de X_i sobre el resto. Activos correlacionados ($R_i^2 \to 1$) son penalizados; activos independientes ($R_i^2 \to 0$) reciben mayor peso.

Variantes híbridas. La fusión convexa dinámica $H_{\text{Híb}} = \lambda H_A + (1-\lambda) H_B$, con $\lambda = \kappa(H_A)^{-1}/[\kappa(H_A)^{-1} + \kappa(H_B)^{-1}]$, genera: **LF** —Ledoit-Wolf [2] con Fast_MCD [6]— y **DK** —filtrado espectral RMT con KASP [4]—.

Propiedades teóricas. Los pesos (1) satisfacen: (*i*) bajo independencia ($H = \sigma^2 I$), $w_i = 1/N$; (*ii*) invariancia ante reescalado uniforme; (*iii*) bajo correlación homogénea ($\rho_{ij} = \rho$), colapso exacto a la Ponderación Inversa al Riesgo (PIR), delimitando el dominio de superioridad de la estrategia.

Resultados

Se aplicó un backtest *rolling-window* de 120 meses con costos del $0,5\,\%$ sobre cuatro conjuntos de datos Fama-French. La Tabla 1 muestra las métricas fuera de muestra.

Cuadro 1: Sharpe Neto (SR) y *Turnover* (TO) mensual OOS.

Dataset	N	**Sharpe Neto**			**Turnover**	
		MinVar	Híb. LF	Híb. DK	MinVar	Híb. LF
6FF	6	0,330	0,285	0,280	0,178	0,001
10M	10	0,265	0,259	0,261	0,150	0,001
data48	40	0,063	0,196	0,200	0,546	0,004
100P	70	−0,002	0,219	0,220	2,142	0,003

1926–2024 (6FF, 10M); 1963–2024 (data48, 100P).

En baja dimensionalidad ($N = 6$), los híbridos mantienen SR $\approx$ 0,28–0,29. A $N = 70$, el colapso de Markowitz es total: turnover 2,142 y SR negativo; Híb. LF contiene la rotación en $0,003$ (reducción del $99,8\,\%$) preservando SR $= 0,219$.

Conclusión

La Estrategia Híbrida resuelve los dos fallos principales de Markowitz: inestabilidad de ponderaciones y exceso de rotación bajo costos friccionales. El filtro VIF produce carteras robustas ante outliers, invariantes ante reescalado y con inmunidad dimensional demostrable; las variantes LF y DK son soluciones eficientes para mercados con fricciones reales.

Referencias

[1] DeMiguel, V., Garlappi, L., Uppal, R. (2009). Optimal versus naive diversification: How inefficient is the $1/N$ portfolio strategy? *Review of Financial Studies*, 22(5), 1915–1953.

[2] Ledoit, O., Wolf, M. (2004). Honey, I shrunk the sample covariance matrix. *The Journal of Portfolio Management*, 30(4), 110–119.

[3] Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *The Journal of Finance*, 7(1), 77–91.

[4] Ortiz, S., Laniado, H., Peña, D., Prieto, F. J. (2026). Dimension reduction for outlier detection in high-dimensional data. *Journal of Multivariate Analysis*, 211, 105531.

[5] Puerta, A., Laniado, H. (2010). Diseño de estrategias óptimas para la selección de portafolios: un análisis de la PIR. *Lecturas de Economía*, (73), 243–273.

[6] Rousseeuw, P. J., Van Driessen, K. (1999). A fast algorithm for the minimum covariance determinant estimator. *Technometrics*, 41(3), 212–223.

ResNet con funciones de activación adaptativas Morph

Oscar Herrera Alcantara[1]

[1] Universidad Autonoma Metropolitana, Ciudad de Mexico, Mexico

✉ oha@azc.uam.mx

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. La arquitectura ResNet ha propiciado un avance significativo en el aprendizaje profundo. ResNet incluye conexiones de salto entre capas que permiten que los gradientes se propaguen por la red neuronal sin desvanecerse [1]. En la búsqueda de nuevas funciones de activación, se ha propuesto la función Rectificador Lineal ReLU con excelentes resultados, al grado de ser considerada el estado del arte en funciones de activación del aprendizaje profundo [4, 3]. Si en lugar de usar una conexión de salto, se usara una función tipo ReLU o cualquier otra que la aproxime y la generalice, se pueden aportar nuevas ventajas. En esa búsqueda de funciones de activación, se ha propuesto Morph, una función paramétrica inspirada en el cálculo fraccionario y en la teoría de wavelets [2]. Morph es capaz de ajustar su forma a otras funciones de activación típicas en redes neuronales al modificar el orden de la derivada fraccional y parámetros de escalamiento y traslación. Los experimentos han permitido evaluar las ventajas y desventajas de usar funciones adaptativas, como Morph, cuando ajustan su forma con los datos de entrenamiento. Los resultados son alentadores y permiten sustentar la hipótesis de que usar funciones adaptativas, en lugar de conexiones de salto entre capas de ResNet, permite mejorar el desempeño en comparación con funciones de activación estáticas.

Palabras claves. Resnet, Función de activación, Cálculo fraccionario, wavelets.

Referencias

[1] He, K., Zhang, X. Ren, S. and Sun, J. (2016). Deep Residual Learning for Image Recognition, in *Proc. IEEE Conf. Comput. Vis. Pattern Recognit. (CVPR)*. 770–778. DOI: 10.48550/arXiv.1512.03385.

[2] Herrera-Alcántara, O. and Arellano-Balderas, S. (2024). Adaptive Morphing Activation Function for Neural Networks, *Fractal and Fractional.* 8(8):444, 2024. DOI: 10.3390/fractalfract8080444.

[3] Nair V. and Hinton, G. E. (2010). Rectified Linear Units Improve Restricted Boltzmann Machines, in *Proc. 27th Int. Conf. Mach. Learn. (ICML)*. 807–814.

[4] Dubey, S. R., Singh, S. K., and Chaudhuri, B. B.. (2022). Activation functions in deep learning: A comprehensive survey and benchmark, *Neurocomputing.* 503: 92–108. DOI: 10.1016/j.neucom.2022.06.111.

Analítica de datos: resultados de trabajos interdisciplinarios

Maria A. Marmol M.[1], Juneth A. Terán T.[1]

[1] Universidad Cesmag, San Juan de Pasto, Colombia

✉ mamarmol@unicesmag.edu.co, jateran@unicesmag.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. La actual disponibilidad de datos en diferentes áreas tanto empresariales como sociales ha generado la necesidad de estudiar técnicas de analítica de datos que permitan transformar información en conocimiento útil para la toma de decisiones. En este trabajo se presentan resultados de la aplicación de dichas técnicas en proyectos interdisciplinarios desarrollados en el Diplomado en Analítica de Datos de la Universidad Cesmag, en los que se emplearon metodologías que incluyen análisis exploratorio de datos, visualización, modelado predictivo y aprendizaje automático, utilizando herramientas como Python y Power BI. Los casos analizados evidencian la capacidad de estas herramientas para la identificación de patrones, predicción de comportamientos y apoyo a la toma de decisiones.

Palabras claves. Análisis de datos, modelos predictivos, visualización de datos

El crecimiento en la generación, análisis y almacenamiento de datos ha impulsado el desarrollo de nuevas metodologías para la extracción de conocimiento y el apoyo a la toma de decisiones [1, 2]. En este contexto, la analítica de datos se ha consolidado como un campo interdisciplinario que integra herramientas provenientes de la matemática, la estadística, la computación y la inteligencia artificial para abordar problemas de creciente complejidad [3].

Términos como Business Intelligence, Big Data, Data Warehouses, Data Lakes, Storytelling, Machine Learning y Deep Learning, resultan muy comunes actualmente y es por esto que la presentación y análisis de los resultados obtenidos en los trabajos presentados por los estudiantes del Diplomado en Analítica de Datos permitirá evidenciar cómo los fundamentos matemáticos y computacionales pueden integrarse para la resolución de problemas reales.

En este trabajo se presentan además de los principales resultados, los métodos analíticos y computacionales del modelado de datos, de dos proyectos finales del Diplomado en Analítica de Datos de la Universidad Cesmag. El primero es Análisis de Siniestros Viales en Bogotá D.C., cuyo enfoque es la predicción de gravedad mediante el uso de Machine Learning y el segundo corresponde a la Identificación de Variables Preponderantes para la Detección de Conexiones Maliciosas (malware).

El primer proyecto, se trabajó sobre un Dataset con 96.152 registros de siniestros viales ocurridos en Bogotá entre las fechas 2015 a 2020. En el cual, a partir de variables contextuales disponibles en registros administrativos públicos y mediante el modelo Random Forest se logró verificar la correcta predicción de la gravedad de un siniestro vial bajo las condiciones indicadas. Adicionalmente, se entregó ciertas recomendaciones para la gestión vial [4, 6].

Por otro lado, en el segundo proyecto se utilizó un Dataset compuesto por aproximadamente un millón de observaciones. Este contiene diversas variables relacionadas con la conexión digital, entre las que se incluyen el tráfico de red (bytes enviados y recibidos), el número de conexiones salientes, las conexiones a direcciones IP desconocidas, la frecuencia de solicitudes DNS, el uso de puertos inusuales, la transferencia anómala de datos y la comunicación con servidores externos, entre otras. Para el análisis de la información se emplearon técnicas de aprendizaje automático supervisado, específicamente el algoritmo

Random Forest, con el fin de identificar las variables que aportan una mayor cantidad de información sobre el fenómeno estudiado. La aplicación de esta metodología permitió alcanzar los objetivos planteados en términos de reducción de la dimensionalidad de los datos y clasificación de los tipos de conexión [5, 6].

Finalmente, es importante resaltar que la presentación de estos trabajos, donde se evidencia la relevancia de la resolución de problemas reales mediante el uso de herramientas computacionales y metodologías del análisis de datos, es una pequeña muestra del fuerte potencial de esta área en las aplicaciones.

Referencias

[1] Hastie, T., Tibshirani, R., Friedman, J. (2009). *The Elements of Statistical Learning*. Springer.

[2] James, G., Witten, D., Hastie, T., Tibshirani, R. (2021). *An Introduction to Statistical Learning*. Springer.

[3] Bishop, C. M. (2006). *Pattern Recognition and Machine Learning*. Springer.

[4] Goodfellow, I., Bengio, Y., Courville, A. (2016). *Deep Learning*. MIT Press.

[5] Paulsen, L., Lindsay, E. (2024). Learning analytics dashboards are increasingly becoming about learning and not just analytics: A systematic review. *Education and Information Technologies*, 29, 14279–14308.

[6] Ersozlu, Z., Taheri, S., Koch, I. (2024). A review of machine learning methods used for educational data. *Education and Information Technologies*, 29, 22125–22145.

Aprendizaje automático aplicado a la predicción de la calidad de suelos agrícolas

Luz Elena Vargas

Universidad de Cartagena, Cartagena, Colombia
✉ lvargaso@unicartagena.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. La evaluación de la calidad del suelo constituye un elemento fundamental para la planificación agrícola y la gestión sostenible de los recursos naturales. Sin embargo, los métodos convencionales de monitoreo requieren campañas de muestreo y análisis de laboratorio que pueden limitar su aplicación a grandes escalas espaciales. En este trabajo se presenta una aproximación basada en algoritmos de aprendizaje automático para la predicción de la calidad de suelos agrícolas a partir de información edáfica y variables derivadas de sensores remotos. Se comparan diferentes técnicas de modelación con el propósito de identificar aquellas que ofrecen mejor capacidad predictiva en la estimación de un índice de calidad del suelo. Los resultados permiten evidenciar el potencial de los enfoques de machine learning para capturar relaciones complejas entre variables ambientales y generar estimaciones útiles para el análisis territorial. Esta investigación contribuye al desarrollo de herramientas de análisis de datos aplicadas a la agricultura de precisión, el monitoreo ambiental y la gestión sostenible de los recursos edáficos.

Palabras claves. calidad del suelo; agricultura de precisión; sensores remotos; análisis de datos.

El aprendizaje automático se ha consolidado como una herramienta relevante para el análisis de información ambiental y agrícola, debido a su capacidad para modelar relaciones complejas entre variables y mejorar los procesos de predicción. En el contexto de los suelos agrícolas, estas técnicas permiten integrar información procedente de diferentes fuentes y generar aproximaciones útiles para la evaluación de la calidad edáfica.

La calidad del suelo es un concepto multidimensional asociado con la fertilidad, la productividad agrícola y la sostenibilidad de los sistemas productivos. Su estimación mediante técnicas computacionales representa una alternativa eficiente para complementar los métodos convencionales de evaluación, especialmente cuando se requiere analizar información en escalas regionales.

En este trabajo se exploran algoritmos de aprendizaje automático orientados a la predicción de la calidad de suelos agrícolas. La propuesta busca resaltar el aporte del análisis de datos en la construcción de modelos predictivos que apoyen la toma de decisiones en agricultura de precisión y gestión ambiental.

Los resultados muestran que los enfoques basados en machine learning constituyen herramientas prometedoras para el estudio de los recursos edáficos, al permitir la integración de datos de campo, información geoespacial y variables ambientales. Asimismo, se destaca su utilidad para fortalecer los procesos de monitoreo, clasificación y planificación agrícola.

Referencias

[1] Breiman, L. (2001). Random Forests. *Machine Learning*, 45(1), 5–32.

[2] Padarian, J., Minasny, B., & McBratney, A. B. (2020). Machine learning and soil sciences: A review aided by machine learning tools. *Soil*, 6(1), 35–52.

[3] Hengl, T. et al. (2021). African soil properties and nutrients mapped at 30 m spatial resolution using two-scale ensemble machine learning. *Scientific Reports*, 11, 6130.

[4] Wadoux, A. M. J. C., Minasny, B., & McBratney, A. B. (2021). Machine learning for digital soil mapping: Applications, challenges and suggested solutions. *Earth-Science Reviews*, 210, 103359.

[5] Zeraatpisheh, M. et al. (2022). Digital mapping of soil properties using multiple machine learning in a semi-arid region. *Geoderma*, 408, 115589.

Análisis de Componentes Principales No Lineales para datos mixtos: formalización, cartas de control y aplicación cardiovascular

Aymara Martínez Aragón[1], Juan David Giraldo Otálvaro[1], Nubia Esteban Duarte[1]

[1] Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales, Colombia
✉ aymartinezar@unal.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. El Análisis de Componentes Principales No Lineales (NLPCA) extiende el PCA clásico a datos mixtos mediante escalamiento óptimo (OS) y el algoritmo de mínimos cuadrados alternantes (ALS). Este trabajo presenta una formalización matemática unificada de ambas técnicas, explicita sus diferencias estructurales y propone una metodología novedosa de cartas de control multivariado en el marco del NLPCA. La aplicación sobre el conjunto de datos del Proyecto Corazones de Baependi ($n = 1{,}227$, 28 variables mixtas) muestra que el NLPCA supera al PCA en capacidad discriminante por género, raza y edad, y que las cartas de control propuestas detectan observaciones atípicas no visibles con herramientas lineales.

Palabras claves. Análisis de Componentes Principales No Lineales; escalamiento óptimo; datos mixtos; cartas de control multivariado; Corazones de Baependi.

Introducción

En contextos como la epidemiología cardiovascular o el control de calidad industrial, las bases de datos contienen simultáneamente variables cuantitativas y cualitativas (ordinales o nominales), conformando *datos mixtos* [1]. El PCA clásico no puede manejar estas variables directamente; el NLPCA, desarrollado en el marco del sistema Gifi [4], resuelve este problema mediante el escalamiento óptimo y el algoritmo ALS [2, 5]. Sin embargo, la conexión teórica explícita entre ambas técnicas rara vez se formaliza en un único marco unificado [6], y la extensión al control estadístico de procesos no ha sido abordada previamente.

Formalización unificada: PCA y NLPCA

Sea $X \in \mathbb{R}^{n\times p}$ la matriz de datos. El **PCA** busca cargas $V = [v_1, \ldots, v_q]$ que maximizan la varianza de las proyecciones $Y = XV$, sujetas a $V^\top V = I_q$. El **NLPCA** opera sobre matrices indicadoras $G_j \in \{0,1\}^{n\times c_j}$ de las variables cualitativas y minimiza la función de pérdida conjunta

$$\sigma(Y, \{\Phi_j\}) = \frac{1}{pm} \sum_j \|Y - G_j\Phi_j\|^2,$$

sujeta a $Y^\top Y/n = I_q$. La diferencia estructural fundamental es que el PCA impone ortonormalidad sobre la *matriz de cargas* V, mientras que el NLPCA la impone sobre la *matriz de puntuaciones* Y. Una consecuencia directa es que el NLPCA puede generar subespacios de dimensión superior a p, ya que el rango máximo del sistema es $C - m$ (suma de categorías menos número de variables cualitativas), potencialmente mayor que p.

Cartas de control basadas en NLPCA

Se proponen dos modalidades de cartas de control en el contexto del NLPCA:

(a) Cartas para variables cuantificadas óptimamente. El escalamiento óptimo asigna coordenadas numéricas a cada categoría; se construyen elipses de control en el espacio de cuantificaciones para detectar categorías con comportamiento atípico.

(b) Cartas basadas en las componentes NLPCA. Análogamente al PCA, se construye la carta elipsoidal con las dos primeras componentes no lineales y la carta T^2 de Hotelling con las componentes restantes: $T_i^2 = (x_i - \bar{x})^\top S^{-1}(x_i - \bar{x})$, donde x_i son las puntuaciones del individuo i y S la matriz de covarianzas muestral. Esta estructura dual replica en el espacio no lineal la metodología establecida para el PCA [7].

Aplicación: Corazones de Baependi

Los datos provienen del Proyecto Corazones de Baependi [8, 3]: $n = 1{,}227$ adultos de Minas Gerais (Brasil) con 28 variables mixtas en cuatro dominios: antropométrico, cardiovascular/renal, salud mental y sociodemográfico.

El NLPCA alcanzó el 80% de varianza acumulada con 16 dimensiones (máximo posible: 28). Las cuantificaciones óptimas mostraron que raza, renta y estado civil son no monotónicas, mientras que edad y escolaridad sí respetan el orden original de sus categorías.

Los biplots del NLPCA discriminaron con mayor claridad que los del PCA: individuos de raza negra se concentraron en el cuadrante de mayor riesgo cardiovascular y renal; el grupo de mayor edad (57–100 años) presentó el perfil más crítico en salud mental y consumo de sustancias; la raza amarilla mostró mayor escolaridad pero también mayor prevalencia de depresión y ansiedad.

Las cartas de control detectaron individuos con urea o creatinina extremadamente elevadas no visibles en el biplot bidimensional. En la relación Escolaridad–Renta, individuos de altos ingresos resultaron atípicos independientemente de su nivel educativo.

Conclusiones

Se ha presentado una formalización unificada PCA–NLPCA que clarifica sus diferencias estructurales y proporciona un marco coherente para la investigación aplicada. La propuesta de cartas de control basadas en NLPCA extiende las herramientas de control estadístico de procesos a datos mixtos. La aplicación sobre Corazones de Baependi confirma la mayor capacidad discriminante del NLPCA y valida las cartas propuestas como herramienta de vigilancia epidemiológica.

References

[1] Almalki, S. (2016). Integrating quantitative and qualitative data. *J. Educ. Learning.* 5(3): 288–296.

[2] De Leeuw, J., Young, F. W., Takane, Y. (1976). Additive structure in qualitative data. *Psychometrika.* 41(4): 471–503.

[3] Egan, K. J., et al. (2016). Baependi Heart Study cohort profile. *BMJ Open.* 6(10).

[4] Gifi, A. (1990). *Nonlinear Multivariate Analysis.* Wiley.

[5] Linting, M., et al. (2007). Nonlinear PCA: introduction and application. *Psychol. Methods.* 12(3): 336–358.

[6] Michailidis, G., De Leeuw, J. (1998). The Gifi system. *Stat. Science.* 13(4): 307–336.

[7] Montgomery, D. C. (2012). *Statistical Quality Control* (7th ed.). Wiley.

[8] de Oliveira, C. M., et al. (2008). Heritability of cardiovascular risk factors: Baependi. *BMC Med. Genet.* 9(1): 1–8.

Pósteres Analísis de Datos y Sistemas Complejos

Comité Científico: Alejandra Rada (Universidade Federal do ABC, Brasil), Pablo M. Rodríguez (Universidade Federal de Pernambuco, Brasil), Santiago Velasco-Forero (Centre for Mathematical Morphology (CMM), Mines Paris, PSL University, Francia).

- ⋆ **Predicción del sentido de la rentabilidad en un portafolio de inversión usando modelos de clasificación supervisada**, Isabella Quijano Fernández, Henry Laniado, Universidad del Cauca, Colombia.
- ⋆ **Estructuras fractales como sistemas iterativos complejos: del triángulo al tetraedro de Sierpinski**, Andrés Camilo Enríquez Guerrero, Juan David Tarapuez, Alvaro Yussed Enríquez, Catalina M. Rúa-Alvarez, Universidad de Nariño, Colombia.
- ⋆ **Uso de dimensionales como alternativa a las representaciones moleculares para potencial aplicación en síntesis de cristales orgánicos vía ANN**, Sebastian Cossio Lopez, Juan Alegría, Universidad del Cauca, Colombia, Sofía Mamián, Vitor Paschoal, Universidade Federal del ABC, Brasil.
- ⋆ **Introducción a la modelación de trayectorias de hormigas mediante autómatas celulares**, Laura Katherin Salas Salas, Saulo Enrique Giménez, Johan Santiago Tarapues, Catalina M. Rúa-Alvarez, Universidad de Nariño, Colombia.
- ⋆ **El triángulo de Sierpinski desde dos enfoques matemáticos: el triángulo de Pascal y los autómatas celulares elementales**, Edisson Andrés Jojoa Mejía, Catalina M. Rúa-Alvarez, Universidad de Nariño, Juneth Andrea Terán Tarapués, Universidad CESMAG, Colombia.
- ⋆ **Introducción a la aplicación de cadenas de Markov y métodos numérico en rumores**, Juan David Rodriguez Guancha, Catalina M. Rúa-Alvarez, Universidad de Nariño, Colombia.
- ⋆ **Simulación computacional de la difusión de rumores en grafos anillo**, Zuleyma Stefania Parreño Arteaga, Juan Camilo Muñoz, John H. Castillo, Catalina M. Rúa-Alvarez, Universidad de Nariño, Colombia.

Predicción del sentido de la rentabilidad en un portafolio de inversión usando modelos de clasificación supervisada

Isabella Quijano [1], Henry Laniado[1]

[1] Departamento de Matemáticas, Universidad del Cauca, Popayán, Colombia

✉ iquijano@unicauca.edu.co, hlaniado@unicauca.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. En el contexto de mercados financieros cada vez más volátiles y complejos, la incorporación de modelos matemáticos avanzados en la gestión de inversiones se ha consolidado como una estrategia relevante para reducir la incertidumbre y fortalecer la toma de decisiones. Este estudio aplica modelos de clasificación supervisada para predecir el sentido de la rentabilidad de un portafolio diversificado de alto valor de capitalización, usando datos históricos del período 2019–2024. El objetivo es identificar patrones que permitan determinar cuál modelo ofrece mejor equilibrio entre precisión predictiva y utilidad en decisiones reales de inversión. Con este análisis se busca optimizar el rendimiento del portafolio y proponer un marco de referencia aplicable a contextos financieros reales.

Palabras claves. aprendizaje automático, gestión de inversiones, modelos de clasificación supervisada, optimización de portafolios, gestión de riesgos

Introducción

Los modelos de clasificación supervisada han sido ampliamente utilizados en finanzas para analizar patrones en series temporales y predecir tendencias del mercado. En este estudio se consideran cuatro enfoques principales: Support Vector Machine (SVM), Árboles de Decisión, K-Nearest Neighbors (KNN) y Regresión Logística. Cada modelo aborda el problema de clasificación desde una perspectiva distinta, lo cual permite comparar su capacidad predictiva en escenarios financieros de alta variabilidad.

El modelo SVM se basa en la construcción de hiperplanos que separan clases en espacios de alta dimensionalidad, usando funciones kernel como lineal, RBF y polinómica. Los Árboles de Decisión emplean una estructura jerárquica basada en reglas y criterios como entropía e índice Gini. El método KNN clasifica observaciones según la mayoría de sus vecinos más cercanos, mientras que la Regresión Logística estima la probabilidad de ocurrencia de un evento binario mediante la función sigmoide.

Estos enfoques permiten capturar patrones financieros complejos y evaluar su utilidad en la predicción de retornos bursátiles. En particular, la comparación entre modelos y el uso de técnicas de selección de características pueden mejorar la robustez de las predicciones en mercados volátiles.

Metodología

El desarrollo metodológico inició con la recopilación de precios históricos de las acciones seleccionadas para el portafolio. Luego, las series fueron normalizadas y revisadas para eliminar valores atípicos que pudieran afectar el desempeño de los modelos. También se realizaron pruebas de estacionariedad y transformaciones de datos para mejorar la estabilidad de las series, junto con técnicas de extracción de características.

Después del preprocesamiento, se aplicaron los modelos de clasificación supervisada seleccionados. Para mejorar su desempeño, se utilizaron validación cruzada y optimización de hiperparámetros mediante Grid

Search, buscando reducir el sobreajuste y fortalecer la generalización. Además, se probaron particiones de entrenamiento y prueba de 70–30, 80–20 y 85–15 para identificar la configuración con mejor desempeño.

La evaluación de los modelos se realizó mediante F1-score, AUC-ROC y matrices de confusión, métricas que permiten analizar la precisión global y los errores de clasificación. De forma complementaria, se desarrollaron análisis de sensibilidad para observar cómo las fluctuaciones del mercado afectan la estabilidad y precisión de los modelos implementados.

Resultados y discusión

Los resultados muestran diferencias claras en el desempeño de los modelos evaluados. El modelo SVM presentó la mejor capacidad de predicción frente a los demás métodos, debido a su habilidad para encontrar fronteras de decisión óptimas en datos de alta dimensionalidad. Además, su capacidad para reducir el sobreajuste permitió obtener una clasificación más estable en un contexto financiero de alta variabilidad.

La Regresión Logística también mostró un desempeño aceptable, aunque presentó cierta tendencia a generar falsos positivos, lo que sugiere posibles mejoras mediante técnicas de ajuste o selección de variables. Por su parte, KNN evidenció limitaciones para identificar patrones no lineales por su dependencia de la métrica de distancia y del número de vecinos. Finalmente, el Árbol de Decisión obtuvo menor precisión por su sensibilidad al sobreajuste y su inestabilidad ante cambios en el conjunto de entrenamiento.

En conjunto, el SVM fue el modelo con mejor desempeño para predecir el sentido de la rentabilidad del portafolio, al mostrar mayor estabilidad y precisión. Aunque la Regresión Logística obtuvo resultados aceptables, las limitaciones de KNN y Árbol de Decisión evidencian que la elección adecuada del modelo es fundamental para apoyar la toma de decisiones financieras.

Conclusiones

El estudio permitió evidenciar que el modelo SVM es el más adecuado para predecir el sentido de la rentabilidad financiera, ya que ofrece mejores resultados en precisión y estabilidad. Asimismo, se demuestra que los modelos matemáticos y de aprendizaje automático pueden apoyar la toma de decisiones en inversiones, especialmente al analizar grandes volúmenes de información y detectar patrones difíciles de identificar mediante métodos tradicionales.

No obstante, la predicción financiera sigue siendo un desafío por la volatilidad y el comportamiento estocástico de los mercados. Por ello, el modelado matemático no debe asumirse como una garantía absoluta de predicción, sino como un recurso analítico que contribuye a optimizar estrategias de inversión, fortalecer la gestión del riesgo y mejorar la toma de decisiones basada en datos.

Referencias

[1] Rentabilidad y valor bursátil de la acción *Cotización NASDAQ-Tesla Acciones Hoy.*
[2] Rentabilidad y valor bursátil de la acción *Cotización NASDAQ-Meta Acciones Hoy.*
[3] Machine Learning Supervisado. *Introducción a Support Vector Machine (SVM).*
[4] Fangfang Lee. *Understanding Logistic Regression: ¿Qué es la regresión logística?*
[5] Julien Suze. *K-nearest neighbors: ¿Qué es el algoritmo KNN?*
[6] Eda Kavlakoglu. *Algoritmo de aprendizaje supervisado no paramétrico: ¿Qué es un árbol de decisión?*

Estructuras fractales como sistemas iterativos complejos: del triángulo al tetraedro de Sierpinski

Juan David Tarapuez[1], Andres Camilo Enriquez[1], Alvaro Yussed Enríquez[1], Catalina M. Rúa-Alvarez[1]

[1] Universidad de Nariño, Pasto, Colombia

✉ jdtarapuez24b@udenar.edu.co, acenriquez24b@udenar.edu.co, ayenriquez24b@udenar.edu.co, catalina.rua@udenar.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. La geometría fractal ofrece un marco fundamental para el estudio de estructuras complejas generadas a partir de reglas iterativas simples, relacionando procesos recursivos y autosimilitud. En este trabajo se analiza el triángulo de Sierpinski y su extensión al caso tridimensional, el tetraedro de Sierpinski, como ejemplos de sistemas dinámicos discretos con propiedades de autosimilitud y escalamiento. A partir de la construcción recursiva en dos dimensiones, se analiza la generalización del concepto de área hacia el volumen, estableciendo relaciones matemáticas que describen el comportamiento del fractal en cada iteración. Finalmente, se propone una aproximación computacional para la visualización del fractal mediante herramientas como Python, permitiendo representar la estructura tridimensional y analizar sus propiedades algebraicas y geométricas.

Palabras claves. Triángulo de Sierpinski, tetraedro de Sierpinski, fractales, visualización computacional, recursión.

La geometría fractal surge como una extensión de la geometría clásica para describir estructuras caracterizadas por irregularidad, complejidad y autosimilitud, presentes tanto en fenómenos naturales como en construcciones matemáticas como en los espacios p-ádicos que generan patrones tipo fractal. Desde los trabajos de Mandelbrot, se ha reconocido que objetos como las costas que delimitan el mar y la tierra, las nubes o las estructuras biológicas exhiben patrones que requieren herramientas más específicas para su modelación [3]. En este contexto, los fractales se definen como conjuntos generados mediante procesos iterativos que producen detalle a múltiples escalas y cuya dimensión puede ser no entera [2].

Uno de los ejemplos más representativos de este tipo de estructuras es el triángulo de Sierpinski, el cual se construye a partir de la subdivisión iterativa de un triángulo equilátero y la eliminación de su región central. Este fractal presenta propiedades tales como que su área decrece con cada iteración y converge a cero, mientras que su perímetro crece, generando una estructura compleja con autosimilitud muy llamativa e interesante [2].

Más allá de su construcción geométrica, los fractales pueden interpretarse como sistemas dinámicos discretos definidos por reglas recursivas [3]. En este sentido, su estudio se vincula estrechamente con la teoría de sistemas complejos, donde patrones globales emergen a partir de interacciones locales simples. Tal como se plantea en la literatura, los fractales constituyen la huella geométrica de procesos iterativos no lineales y de fenómenos caóticos. Esta perspectiva permite relacionar la geometría fractal con áreas como la física, la biología y la ciencia de datos, en las que es fundamental comprender estructuras multiescala y comportamientos emergentes [1, 4, 5].

En particular, la extensión de fractales desde el plano bidimensional al espacio tridimensional representa un paso relevante tanto desde el punto de vista matemático como computacional. Mientras que en dos dimensiones el análisis se centra en magnitudes como el área, en el caso tridimensional se introduce el volumen, lo que permite explorar nuevas relaciones de escalamiento y comportamiento límite. Así el estudio de fractales tridimensionales se enmarca dentro de una tendencia interdisciplinar que integra

matemáticas, computación científica y análisis de datos. La capacidad de modelar estructuras autosimilares en tres dimensiones permite no solo avanzar en la comprensión de la geometría abstracta, sino también aportar herramientas para el estudio de fenómenos reales, como redes biológicas, sistemas de transporte o procesos de crecimiento [4, 5]. En este contexto, la extensión del triángulo de Sierpinski al espacio tridimensional se presenta como un punto de partida para mostrar la conexión entre estructuras matemáticas puras y el análisis de sistemas complejos, destacando el papel de la recursividad, la autosimilitud y la dimensión fractal en la descripción de la complejidad [2].

En este poster se presenta la extensión del triángulo de Sierpinski, a el tetraedro de Sierpinski. Desde una perspectiva computacional, se propone la generación de representaciones tridimensionales mediante algoritmos en Python y herramientas de visualización científica. Este enfoque permite interpretar estas estructuras como modelos simplificados de sistemas complejos, donde emergen patrones globales a partir de reglas locales. Los resultados obtenidos se logran a través del Semillero de Investigación MathSiCA con apoyo de la Vicerrectoría de Investigación e Interacción Social de la Universidad de Nariño.

Referencias

[1] Ahmed, B. (2024). Fractal Geometry in Nature: Applications in Physics and Mathematical Theory. *Frontiers in Applied Physics and Mathematics*. 1(2): 129-145. DOI: doi.org/10.71465/fapm14

[2] Guerrero, D. J. (2023). Fractales, matemáticas y algoritmos. Tesis de pregrado. Universidad de Nariño, Colombia.

[3] Mandelbrot, B. B. (1983). The Fractal Geometry of Nature. *W. H. Freeman and Company*. New York, USA.

[4] Rowland, C., Harland, B,, Smith, J., Moslehi, S., Dalrymple-Alford, J., Taylor, R. P. (2022). Investigating Fractal Analysis as a Diagnostic Tool That Probes the Connectivity of Hippocampal Neurons. *Frontiers in Physiology*. 13: 1-12. DOI: doi.org/10.3389/fphys.2022.932598

[5] Saqr, K., Tupin, S., Ohta, M. (2020). Physiologic blood flow is turbulent. *Scientific Reports*. 10. DOI: doi.org/10.7910/DVN/OM1T42

Uso de *dimensionales* como alternativa a las representaciones moleculares para potencial aplicación en síntesis de cristales orgánicos vía ANN

Sebastián Cossio[1], Juan Alegría[1], Sofía Mamián[1], Vitor Paschoal[2]

[1]Universidad del Cauca, Popayán, Colombia

[2] Universidade Federal do ABC, São Paulo, Brasil

✉ sebastiancossio@unicauca.edu.co, jjalegriae@unicauca.edu.co, esmamian@unicauca.edu.co, vitor.paschoal@ufabc.edu.br

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026

San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. En la actualidad, las redes neuronales se han convertido en una de las subáreas más importantes de la inteligencia artificial dada su capacidad para aprender patrones a partir de grandes bases de datos. Su impacto abarca múltiples áreas, desde el reconocimiento de imágenes, el procesamiento del lenguaje natural, así como su aplicación en la ciencia de los materiales, entre otras. Las redes neuronales basadas en grafos (GNN, del inglés *Graph Neural Networks*) aliadas a la química cuántica de alto nivel en sistemas de referencia, se emplean como herramientas fundamentales para el descubrimiento de nuevos materiales. Sin embargo, los costos computacionales y la representación de las moléculas por medio de grafos plantean un desafío en términos de escalabilidad computacional, así como limitaciones en la capacidad discriminativa de algunos modelos debido a la representación de estructuras químicas topológicamente similares pero con propiedades químicas distintas. Este estudio desarrolla representaciones expresivas y eficientes, combinando un nuevo objeto matemático: el *dimensional* en las redes neuronales para mejorar la predicción de propiedades moleculares y el diseño de nuevos materiales.

Palabras claves. Redes neuronales artificiales, Ciencia de datos, Ciencia de materiales.

Uno de los enfoques relevantes en el área de la ciencia de los materiales, es el uso de técnicas de aprendizaje de máquina para la exploración, diseño y generación de nuevos materiales sintéticos, con el propósito de reducir el tiempo requerido tanto para la exploración experimental en el laboratorio, así como para optimizar los materiales y recursos humanos involucrados en el proceso [6]. Un ejemplo de ello es la búsqueda de nuevos cristales orgánicos con potencial para la generación de terahertz (THz) [3]. Uno de los distintos mecanismos para la generación de THz, se basa en el uso de cristales orgánicos formados por moléculas conjugadas que incorporan grupos grupos electrodonadores y electroatractores. En este contexto, las GNN en combinación con cálculos de química cuántica de alto nivel en sistemas de referencia, se emplean como herramientas fundamentales para el descubrimiento de nuevos materiales con capacidad de generación de THz [2]. Las GNN están diseñadas para trabajar con datos que representan estructuras, como el caso de moléculas químicas, las cuales se pueden representar con grafos. Una GNN "aprende" representaciones vectoriales de los nodos o de las aristas, combinando información local y estructural; el núcleo de este "aprendizaje" es el "message passing" o "paso del mensaje", el cual se puede describir en cuatro fases: 1. Todos los nodos reciben información de sus vecinos. 2. Cada nodo "absorbe" la información recibida. 3. Se actualiza la representación. 4. Se repite el proceso hasta alcanzar un criterio de parada [4]. Una de las principales desventajas de las GNN es el alto costo computacional, principalmente en el "message passing"; esto se acentúa cuando las bases de datos con las que se trabaja son de gran tamaño, lo que propicia un proceso de aprendizaje lento. Adicionalmente, la expresividad es limitada dado que las GNN tienen dificultad para diferenciar estructuras químicas diferentes, pero

similares topológicamente [5].

En el trabajo [1] se propone un objeto matemático, denominado el *dimensional*, el cual se proyecta como una alternativa a las estructuras de datos basadas en grafos. El autor desarrolla el álgebra, así como las funciones y las operaciones aplicables a los datos representados. Su enfoque innovador se centra en los *dimensionales* que permiten caracterizar las estructuras por medio de autómatas, lo que permite "traducir" parte de su álgebra como cadenas de un lenguaje generado que, al interpretarlo, permite acceder y operar los nodos del grafo representado.

En este trabajo mostramos que los *dimensionales* son una alternativa interesante para la abstracción y manipulación de los datos, particularmente en estructuras moleculares que son potenciales candidatas para síntesis de cristales orgánicos con propiedades ópticas para aplicación en telecomunicaciones. Así, por ejemplo la molécula de etanol CH_3CH_2OH tiene asociada una matriz X de características [7] a partir de la cual se extrae la información necesaria para definir los 9 dimensionales $g_i(i, A_i)$, donde A_i es la matriz del *dimensional* g_i e $i = 0, ..., 8$ representan los 9 átomos de la molécula en un orden establecido reemplazando la representación clásica por el *dimensional*.

Referencias

[1] Alegría Escobar, J. J. (2025). *Una generalización de los árboles binarios*. Tesis de Maestría en Ciencias Matemáticas, Universidad del Cauca, Popayán.

[2] Boiko, D. A., Reschützegger, T., Sanchez-Lengeling, B., et al. (2025). Advancing molecular machine learning representations with stereoelectronics-infused molecular graphs. *Nature Machine Intelligence*. 7:771–781. DOI: 10.1038/s42256-025-01031-9.

[3] Shin, B.-R., Puc, U., Park, Y.-J., Kim, D.-J., Lee, C.-W., Yoon, W., Yun, H., Kim, C., Rotermund, F., Jazbinsek, M., Kwon, O.-P. (2023). Design of High-Performance Organic Nonlinear Optical and Terahertz Crystals by Controlling the van der Waals Volume. *Advanced Functional Materials*. 34(5). DOI: 10.1002/adfm.202308193.

[4] Dong, Y., Pan, F., Gui, Y., Jiang, W., Wan, Y., Zheng, R., Jin, H. (2025). Comprehensive Architecture Search for Deep Graph Neural Networks. *IEEE Transactions on Big Data*. DOI: 10.1109/TBDATA.2025.3552336.

[5] You, J., Liu, B., Ying, R., Pande, V., Leskovec, J. (2018). Graph Convolutional Policy Network for Goal-Directed Molecular Graph Generation. *Advances in Neural Information Processing Systems*. 31:6410–6421.

[6] Heid, E., Greenman, K. P., Chung, Y., Li, S.-C., Graff, D. E., Vermeire, F. H., Wu, H., Green, W. H., McGill, C. J. (2024). Chemprop: A Machine Learning Package for Chemical Property Prediction. *Journal of Chemical Information and Modeling*. 64(1):9–17. DOI: 10.1021/acs.jcim.3c01250.

[7] Schneider, N., Sayle, R. A., Landrum, G. A. (2015). Get Your Atoms in Order—An Open-Source Implementation of a Novel and Robust Molecular Canonicalization Algorithm. *Journal of Chemical Information and Modeling*. 55(10):2111–2122. DOI: 10.1021/acs.jcim.5b00543.

Introducción a la modelación de trayectorias de hormigas mediante autómatas celulares

Laura Katherin Salas[1], Saulo Enrique Giménez[1], Johan Santiago Tarapues[1], Catalina M. Rúa-Alvarez[1]

[1] Universidad de Nariño, Pasto, Colombia

✉ lksalas25a@udenar.edu.co, segimenez25a@udenar.edu.co, jstarapues25a@udenar.edu.co, catalina.rua@udenar.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. El comportamiento colectivo de las hormigas constituye un ejemplo común de sistemas complejos autoorganizados, donde patrones globales emergen a partir de interacciones locales simples mediadas principalmente por señales químicas. En este trabajo se presenta una aproximación introductoria a la modelación de trayectorias de hormigas mediante herramientas discretas básicas, como autómatas celulares.

Desde la perspectiva biológica, se describen los mecanismos de forrajeo y coordinación basados en la estigmergia, donde las hormigas depositan y siguen rastros de feromonas que permiten la construcción de rutas eficientes hacia fuentes de alimento, donde estos movimientos origina redes dinámicas de senderos que reflejan la adaptación colectiva de la colonia según el alimento disponible del hábitat. A partir de esta base conceptual, se exploran modelos matemáticos introductorios que, aunque no representan de manera completa el comportamiento real, constituyen un punto de partida para la modelación: la hormiga de Langton y el juego de la vida de Conway. Estos modelos permiten evidenciar cómo reglas locales deterministas o probabilísticas pueden generar comportamientos emergentes complejos. Finalmente, se realizan simulaciones computacionales en Python como herramienta para visualizar y analizar trayectorias generadas.

Palabras claves. Autómatas celulares, trayectoria de hormigas, estigmergia, forrajeo.

El comportamiento de las hormigas ha sido ampliamente reconocido como un modelo natural de sistemas complejos autoorganizados, en los cuales no existe un control centralizado, pero emergen patrones colectivos altamente eficientes a partir de interacciones locales simples. Este fenómeno ha sido estudiado en la biología, donde la coordinación de la colonia se explica mediante el mecanismo de estigmergia, basado en la modificación del entorno a través de señales químicas como las feromonas [1].

Desde una perspectiva biológica, el forrajeo en las hormigas puede entenderse como un sistema autoorganizado en el cual la activación de las obreras y el control de las búsquedas externas dependen de interacciones químico–táctiles estrictamente locales dentro del nido. En este contexto, la decisión de salir a explorar está influenciada por la frecuencia de encuentros y contactos antenales con otras hormigas que regresan de manera exitosa, las cuales transportan señales químicas asociadas a la presencia de alimento en el entorno [4]. Estos mecanismos de retroalimentación química permiten a la colonia evaluar la viabilidad del ambiente externo y coordinar su actividad colectiva, constituyendo un sistema adaptativo altamente eficiente.

Además, estos procesos no son completamente deterministas, sino que incorporan componentes de exploración aleatoria que favorecen la adaptación a entornos cambiantes. Este equilibrio entre exploración y explotación ha sido identificado como un principio clave en la eficiencia del comportamiento colectivo en sistemas biológicos [3, 6]. De esta forma, la trayectoria de las hormigas puede interpretarse como el resultado de dinámicas locales que generan estructuras globales complejas.

Desde el punto de vista matemático y físico, estos procesos pueden representarse mediante modelos discretos que capturan la dinámica del sistema a partir de reglas locales [5]. Entre estos, los autómatas celulares constituyen una herramienta fundamental para describir sistemas en los que el estado global emerge de la interacción entre elementos vecinos en una malla discreta [7]. Ejemplos como el juego de la vida de Conway evidencian cómo configuraciones simples pueden evolucionar hacia patrones altamente complejos, estableciendo una conexión entre reglas locales y comportamientos emergentes.

De manera complementaria, la hormiga de Langton introduce un agente que interactúa con el entorno mediante reglas deterministas simples, generando trayectorias complejas que alternan entre comportamientos caóticos y estructuras altamente ordenadas. Aunque este modelo no pretende reproducir fielmente el comportamiento biológico de las hormigas, proporciona un marco conceptual para comprender cómo dinámicas complejas pueden surgir a partir de reglas elementales [2].

Si bien estos modelos no representan de manera exacta el comportamiento biológico de las hormigas, permiten comprender cómo la complejidad puede emerger a partir de reglas locales simples, lo que constituye un punto de partida relevante en el estudio de sistemas complejos. En este sentido, el presente trabajo propone una aproximación introductoria a la modelación de trayectorias de hormigas, estableciendo un puente entre la explicación biológica y la modelación matemática discreta, tomando como punto de partida modelos básicos como los autómatas celulares apoyado en herramientas computacionales como Python para la simulación y visualización de trayectorias. Los resultados obtenidos se logran a través del Semillero de Investigación MathSiCA con apoyo de la Vicerrectoría de Investigación e Interacción Social de la Universidad de Nariño.

Referencias

[1] Dorigo, M., Maniezzo, V., Colorni, A. (1996). Ant system: Optimization by a colony of cooperating agents. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*. 26(1), 29-41. DOI: doi.org/10.1109/3477.484436

[2] Langton, C. G. (1986). Studying artificial life with cellular automata. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 22(1-3), 120-149. DOI: doi.org/10.1016/0167-2789(86)90237-X

[3] Nagesh, I., Walker, S. M., Taylor, G. K. (2019). Motor output and control input in flapping flight: a compact model of the deforming wing kinematics of manoeuvring hoverflies. *Journal of the Royal Society Interface*. 16(157), 1-13. DOI: doi.org/10.1098/rsif.2019.0435

[4] Pagliara, R., Gordon, D. M., Leonard, N. E. (2018). Regulation of Harvester Ant Foraging as a Closed-Loop Excitable System. *PLOS Computational Biology*. 14 (12), 1-25. DOI: doi.org/10.1371/journal.pcbi.1006200

[5] Trujillo, J. (2023). Aplicaciones de la matemática en la biología [Ponencia]. *XX Semana de la Matemática*. Centro Regional Universitario de Veraguas, Panamá. DOI: doi.org/10.13140/RG.2.2.18047.83366

[6] Shiraishi, M., Takeuchi, R., Nakagawa, H., Nishimura, S. I., Awazu, A., Nishimori, H. (2019). Diverse stochasticity leads a colony of ants to optimal foraging. *Journal of Theoretical Biology*. 465, 7-16. DOI: doi.org/10.1016/j.jtbi.2019.01.002

[7] Wolfram, S. (2002). A New Kind of Science. *Wolfram Media*. Champaign, USA.

El triángulo de Sierpinski desde dos enfoques matemáticos: el triángulo de Pascal y los autómatas celulares elementales

Edisson Andres Jojoa[1], Catalina M. Rúa-Alvarez[1], Juneth Andrea Terán[2]

[1] Universidad de Nariño, Pasto, Colombia
[2] Universidad CESMAG, Pasto, Colombia
✉ eajojoa22B@udenar.edu.co, catalina.rua@udenar.edu.co, jateran@unicesmag.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. El triángulo de Sierpinski, el triángulo de Pascal y los autómatas celulares elementales son estructuras matemáticas que, aunque se generan a partir de reglas diferentes, presentan relaciones sorprendentes. Este trabajo presenta una exploración computacional implementada en Python, orientada al estudio de la generación del triángulo de Sierpinski a partir del triángulo de Pascal y de autómatas celulares. Se analizan las semejanzas entre los patrones obtenidos mediante ambos enfoques, destacando las relaciones matemáticas que permiten la aparición de una misma estructura fractal a partir de reglas simples.

Palabras claves. Triángulo de Sierpinski, triángulo de Pascal, autómatas celulares elementales, fractal

El Triángulo de Sierpinski es un fractal que se construye a partir de un triángulo equilátero mediante un proceso iterativo de subdivisión y eliminación de la región central como se puede observan en [4].

Por otro lado, el Triángulo de Pascal se construye colocando unos en los laterales del triángulo y un término del interior del triángulo se obtiene a partir de la suma de los dos que le preceden en la fila anterior de forma recursiva, también se obtienen con la fórmula de los coeficientes binomiales [6].

Ya los Autómatas Celulares Elementales, representan sistemas dinámicos discretos de gran interés en la matemática computacional, debido a su capacidad para exhibir comportamientos altamente complejos y estructuras autoorganizadas a partir de reglas sencillas de transición local [1, 7]. Aunque la definición formal de los autómatas celulares puede consultarse en [5], en este trabajo nos enfocamos en los autómatas celulares elementales de Wolfram que consisten en una línea de celdas, donde cada celda puede asumir uno de dos estados: 0 (blanco) o 1 (negro), dependiendo de las reglas establecidas en [8]. Los autómatas celulares son usados en la modelación de muchas aplicaciones como son el comportamiento dinámico de pandemias en redes e incluso en los modelos de crecimiento urbano o de tumores [2, 3].

El triángulo de Sierpinski, el triángulo de Pascal y los autómatas celulares elementales de Wolfram increíblemente se pueden relacionar. En este trabajo se presentan componentes teóricos y simulaciones computacionales en Python con los cuales se logra relacionar el triángulo de Pascal con aritmética modular y diferentes reglas de autómatas celulares elementales con el triángulo de Sierpinski. También se analizan las semejanzas de diferentes reglas de generación de autómatas celulares elementales con el triángulo de Sierpinski y la variación dinámica de sus patrones según la condición inicial establecida. Finalmente, se clasifican y agrupan algunos de estos autómatas celulares con este fractal con el fin de identificar relaciones matemáticas.

Referencias

[1] Burguillo, J. C. (2018). Cellular Automata. En *Self-organizing Coalitions for Managing Complexity*, pp. 57–67. Springer.

[2] Caninas, P. G., Calegari, P. C., Pereira-Franco, A. J. (2023). Um estudo sobre árvores geradoras como alternativas conexas para o controle de doença em um grafo de infecção. *Anais do LV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*. DOI: 10.59254/sbpo-2023-175142

[3] Clarke, K. C. (2019). Mathematical Foundations of Cellular Automata and Complexity Theory. D'Acci, L. (eds) The Mathematics of Urban Morphology. *Modeling and Simulation in Science, Engineering and Technology*. Birkhäuser, Cham. DOI: doi.org/10.1007/978-3-030-12381-9_8

[4] Guerrero, D. J. (2023). Fractales, matemáticas y algoritmos. Tesis de pregrado. Universidad de Nariño, Colombia.

[5] Kari, J. (2005). Theory of Cellular Automata: A Survey. *Theoretical Computer Science*, 334, 3–33.

[6] Cano Rojas, A. y Rojas Matas, Á. (2016). Autómatas celulares y aplicaciones. *UNIÓN-Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 12(46).

[7] Wolfram, S. (1983). Statistical mechanics of cellular automata. *Reviews of Modern Physics*, 55(3).

[8] Wolfram, S. (2002). *A New Kind of Science*. Wolfram Media, Champaign, Illinois.

Introducción a la aplicación de cadenas de Markov y métodos numérico en rumores

Juan David Rodriguez Guancha[1], Catalina M. Rúa-Alvarez[1]

[1] Universidad de Nariño, Pasto, Colombia

✉ jdrodriguez22b@udenar.edu.co, catalina.rua@udenar.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. La modelación de la difusión de información en poblaciones constituye un problema fundamental en matemáticas aplicadas, debido a la presencia de interacciones individuales con un componente aleatorio significativo. Los modelos deterministas clásicos, como los modelos compartimentales tipo SIR o Maki–Thompson, permiten describir la evolución promedio del sistema, pero no capturan adecuadamente la variabilidad inherente a los procesos de interacción.
En este trabajo se presenta un estudio introductorio sobre el uso de cadenas de Markov de tiempo discreto como herramienta para modelar la difusión de información desde una perspectiva estocástica. Se analiza el comportamiento a largo plazo del sistema mediante el cálculo del estado estacionario asociado a la matriz de transición, el cual se formula como un problema de álgebra lineal. Dado que la resolución directa de estos sistemas puede resultar costosa computacionalmente cuando el número de estados aumenta, se analizan los métodos iterativos de Jacobi y Gauss-Seidel como alternativas eficientes para aproximar el estado estacionario. Finalmente, se propone una implementación computacional en Python que permite comparar la eficiencia y precisión de dichos métodos.

Palabras claves. Cadenas de Markov, estado estacionario, métodos iterativos, difusión de información

El análisis de procesos de difusión en poblaciones es un problema central en diversas áreas de las matemáticas aplicadas, con implicaciones en epidemiología, ciencias sociales y teoría de redes. Modelos clásicos como el modelo SIR, propuesto por Kermack y McKendrick, y el modelo de Maki–Thompson para la propagación de rumores, han permitido describir la dinámica de estos procesos mediante sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. Si bien estos enfoques deterministas proporcionan una descripción promedio del comportamiento del sistema, presentan limitaciones cuando las interacciones individuales tienen un componente aleatorio significativo. En fenómenos como la difusión de información o rumores, la variabilidad en las interacciones puede generar diferencias sustanciales respecto a los resultados predichos por modelos deterministas [2, 3].

En este contexto, Ver cómo se difunde una información en una población es algo que resulta interesante, porque no sigue ningún patrón fijo. Cada persona reacciona distinto, y eso hace que los modelos basados en ecuaciones diferenciales no sean suficientes para describir bien el fenómeno, ya que trabajan con promedios y dejan por fuera la aleatoriedad que hay en cada interacción [1]. Los modelos estocásticos, particularmente las cadenas de Markov, constituyen una herramienta adecuada para describir sistemas en los cuales la evolución depende probabilísticamente del estado actual. La idea es que el sistema puede estar en distintos estados y pasa de uno a otro con cierta probabilidad que depende únicamente del estado actual, no de lo que ocurrió antes [5]. Estas cadenas permiten modelar procesos dinámicos mediante matrices de transición que describen las probabilidades de cambio entre estados, estableciendo una conexión directa con el álgebra lineal [4].

Sin embargo, cuando el número de estados crece, resolver ese sistema de forma directa se vuelve computacionalmente muy costoso. Por eso los métodos iterativos de Jacobi y Gauss-Seidel son una opción más práctica, pues aproximan la solución paso a paso sin necesidad de resolver el sistema completo de

una vez y ofrecen una alternativa eficiente al construir sucesivas aproximaciones que convergen hacia la solución, reduciendo el costo computacional [6].

En este trabajo se estudian las cadenas de Markov de tiempo discreto como herramienta para modelar ese tipo de procesos, y se analizan los métodos numéricos iterativos de Jacobi y Gauss-Seidel para calcular el estado estacionario de dichas cadenas,los métodos se implementan en Python y se evalúa tanto la precisión como la eficiencia de cada uno. Como aplicación, se trabaja con un modelo de difusión de información, comparando el enfoque estocástico con el determinista.

Referencias

[1] Belen, S. (2008). *The behaviour of stochastic rumours*. PhD thesis. The University of Adelaide.

[2] Díaz, A. C. (2022). Introducción a la modelación de propagación de rumores en redes. Tesis de pregrado. Universidad de Nariño, Colombia.

[3] Ferraz de Arruda, G., Rodrigues, F., Rodríguez, P., Cozzo, E., Moreno, Y. (2018). A general Markov chain approach for disease and rumour spreading in complex networks. *Journal of Complex Networks*. 6(2), 215–242. DOI: doi.org/10.1093/comnet/cnx024

[4] Kolman, B., Hill, D. R. (2013). *Álgebra Lineal*. 8.ª ed. Pearson Educación.

[5] Ross, S. M. (2014). *Introduction to Probability Models*. 11.ª ed. Academic Press.

[6] Terán Tarapues, J. A. (2018). *Generalización del método de Newton y sus aplicaciones*.

Simulación computacional de la difusión de rumores en grafos anillo

Zuleyma Stefania Parreño[1], Juan Camilo Muñoz[1], John H. Castillo[1], Catalina M. Rúa-Alvarez[1]

[1] Universidad de Nariño, Pasto, Colombia

✉ zsparreno23a@udenar.edu.co, jcmunoz23a@udenar.edu.co, jhcastillo@udenar.edu.co, catalina.rua@udenar.edu.co

ALTENCOA11-2026, 5 al 9 de octubre, 2026
San Juan de Pasto, Universidad de Nariño

Resumen. La difusión de rumores en poblaciones puede modelarse mediante el modelo de Maki-Thompson, que permite representar la dinámica de propagación mediante reglas de interacción entre individuos. En este trabajo se presenta un análisis numérico del modelo desde una versión determinista y una estocástica. En primer lugar, respectivamente, se estudia el modelo con ecuaciones diferenciales ordinarias que describe la evolución promedio de las proporciones de individuos en cada estado y se realiza una exploración numérica variando los parámetros del modelo con el fin de analizar su influencia en la dinámica del sistema. Luego se continúa con la formulación estocástica y su simulación utilizando el algoritmo de Gillespie. Este enfoque permite modelar la evolución del sistema sobre estructuras de red, en particular sobre grafos anillo, donde las interacciones están restringidas a vecinos inmediatos, sirviendo como caso base por su simplicidad. Los resultados obtenidos mediante simulaciones en Python se comparan con resultados teóricos recientes en la literatura. Finalmente, en este trabajo se discute la extensión del modelo a grafos más generales para la difusión de información más realista en redes complejas.

Palabras claves. Maki-Thompson, algoritmo de Gillespie, anillo, determinista, estocástico.

La difusión de rumores en una población constituye un fenómeno complejo que ha sido ampliamente estudiado en diversas áreas, como las ciencias sociales, la epidemiología y la teoría de redes [1]. En estos procesos, la propagación de la información depende de interacciones entre individuos. Modelos matemáticos como el propuesto por Maki y Thompson permiten describir este fenómeno mediante la clasificación de los individuos en tres estados: ignorantes (x), propagadores o informantes (y) y supresores o neutros (z) [2, 6, 7].

Desde una perspectiva determinista, de forma generalizada el modelo de Maki–Thompson puede representarse mediante el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que describe la evolución temporal de las proporciones de individuos [1, 6], dado por

$$\begin{cases} x'(t) = -\lambda x(t)y(t), \\ y'(t) = \lambda x(t)y(t) - \alpha y(t)(1-x(t)), \\ z'(t) = \alpha y(t)(1-x(t)), \end{cases}$$

donde las proporciones de individuos satisfacen la condición de conservación $x(t) + y(t) + z(t) = 1$.

Este enfoque permite analizar el comportamiento promedio del sistema, estudiar su dinámica a largo plazo y evaluar el impacto de los parámetros sobre la propagación del rumor, pero no incorpora explícitamente la aleatoriedad presente en las interacciones individuales. Para capturar la naturaleza estocástica del fenómeno, como se describe en [4], el modelo puede formularse mediante un conjunto de reacciones que describen las interacciones elementales entre individuos, de la forma

$$Y + X \xrightarrow{\lambda} Y + Y, \quad Y + Y \xrightarrow{\alpha} Z + Y, \quad Y + Z \xrightarrow{\alpha} Z + Z.$$

Esta representación permite interpretar el sistema como un proceso estocástico, cuya dinámica puede simularse mediante algoritmos de tipo Monte Carlo. En particular en [5], el algoritmo de Gillespie proporciona un marco riguroso para la simulación exacta de sistemas de reacciones, permitiendo reproducir trayectorias individuales de cadenas de Markov en tiempo continuo. Sin embargo, una limitación importante tanto del modelo determinista como de su formulación estocástica es la hipótesis de mezcla homogénea, la cual supone que todos los individuos pueden interactuar con igual probabilidad. En la realidad, las interacciones necesitan estructuras que permitan contacto, como redes sociales o espacios físicos, lo que hace necesario introducir modelos sobre grafos [1, 3].

En este contexto, el uso de grafos permite representar la población como un conjunto de nodos conectados mediante aristas, restringiendo las interacciones a vecinos específicos. Como punto de partida se considera el grafo anillo que puede representarse con listas circulares en Python y permite comparar los resultados numéricos con los de propagación de rumores en redes obtenidos recientemente en [2]. Este grafo representa un modelo inicial de interacción local que permite estudiar el efecto de la estructura de la red en la difusión de rumores, sirviendo como caso base para entender redes más complejas.

En este trabajo se presenta un estudio numérico del modelo determinista mediante la variación de parámetros, con el objetivo de analizar su comportamiento dinámico. Luego se implementa una simulación estocástica basada en el algoritmo de Gillespie sobre grafos anillo, permitiendo comparar los resultados obtenidos con los del modelo determinista y con resultados teóricos existentes. Adicionalmente, se exploran variaciones en los parámetros del modelo. Finalmente, se plantea una discusión sobre la extensión del modelo a grafos más generales, abriendo la posibilidad de estudiar la influencia de la estructura de la red en la dinámica de difusión de información, lo cual constituye un problema de interés en el estudio de sistemas complejos y redes.

Referencias

[1] Díaz, A. C. (2022). Introducción a la modelación de propagación de rumores en redes. Tesis de pregrado. Universidad de Nariño, Colombia.

[2] Díaz, A. C, Rodríguez, P. M., Rúa-Alvarez, C. M. (2026). *How far can a rumor travel without shortcuts?*. Chaos, Solitons & Fractals. 205(117871), 1-12. DOI: doi.org/10.1016/j.chaos.2026.117871

[3] Diestel, R. (2017). Graph Theory. Fifth Ed. *Springer-Verlag*. San Francisco, CA, USA.

[4] Ferraz de Arruda, G., Rodrigues, F., Rodríguez, P., Cozzo, E., Moreno, Y. (2018). *A general Markov chain approach for disease and rumour spreading in complex networks*. Journal of Complex Networks. 6(2), 215–242. DOI: doi.org/10.1093/comnet/cnx024

[5] Gillespie, D. T. (1977). *Exact stochastic simulation of coupled chemical reactions*. The Journal of Physical Chemistry. 81(25), 2340–2361. DOI: doi.org/10.1021/j100540a008

[6] Nekovee, M., Moreno, Y., Bianconi, G., Marsili, M. (2007). *Theory of rumour spreading in complex social networks*. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 374(1), 457-470. DOI: doi.org/10.1016/j.physa.2006.07.017

[7] Rada, A., Coletti, C., and Lebensztayn, E., Rodíguez, P. (2021). *The role of multiple repetitions on the size of a rumor*. SIAM Journal on Applied Dynamical Systems. 20, 1209-1231. DOI: doi.org/10.1137/20M1345657