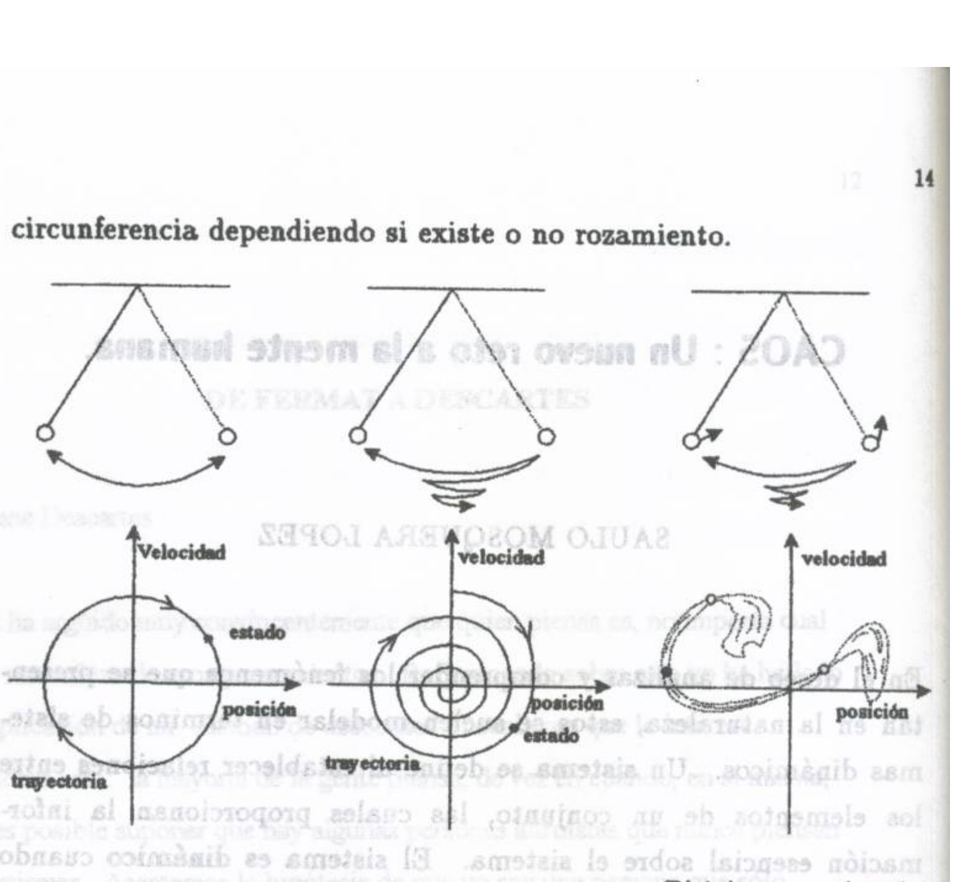
CAOS : Un nuevo reto a la mente humana.

SAULO MOSQUERA LOPEZ

En el deseo de analizar y comprender los fenómenos que se presentan en la naturaleza, estos se suelen modelar en términos de sistemas dinámicos. Un sistema se define al establecer relaciones entre los elementos de un conjunto, las cuales proporcionan la información esencial sobre el sistema. El sistema es dinámico cuando su estado cambia con el tiempo; se puede decir así que un sistema dinámico está formado por un conjunto de estados posibles y por una regla que describe como evoluciona el estado en el tiempo. Esta regla, conocida como la **dinámica**, determina, a partir de un estado inicial, un conjunto de estados que se denomina la **trayectoria**; esta se representa en el espacio de estados y sus coordenadas son las componentes del estado. Un ejemplo de un sistema dinámico es el de un péndulo. Su movimiento se determina por dos variables: posición y velocidad. Un punto en el plano, cuyas coordenadas son estas dos variables es el estado. La ecuación diferencial que describe como evoluciona dicho estado, y que se deduce a partir de las Leyes de Newton, conforma la dinámica del sistema.

A medida que el péndulo oscila, a uno y otro lado, el estado se mueve a lo largo de la trayectoria en el plano. Si el péndulo se mueve únicamente bajo la influencia de la Fuerza de Gravedad, las trayectorias son regulares llegando a ser una espiral o una circunferencia dependiendo si existe o no rozamiento.



(Dinámica sin rozamiento) (Dinámica con rozamiento) (Dinámica con amortiguamiento y fuerza externa)

Si al péndulo se le aplica además una fuerza periódica que depende del tiempo y un amortiguamiento entonces, para ciertos valores de la amplitud y la frecuencia, el movimiento entra en un regimen en el cual las trayectorias no se pueden predecir.

Para los sistemas dinámicos predominó, durante gran parte del siglo XIX, el pensamiento de Laplace el cual básicamente afirmaba que todos estos sistemas son deterministas, es decir, que a partir de únicamente condiciones iniciales dadas se podía predecir su futuro o su pasado; se pensaba que las únicas limitaciones a la capacidad de predecir el comportamiento de un sistema dinámico determinista se debían al gran tamaño o a la complejidad del sistema.

Contrariamente al pensamiento anterior en este siglo se descubrió que muchos sistemas deterministas poseen movimientos tan complejos que una predicción, a largo plazo, del estado del sistema resulta imposible. Fue el matemático Francés Henry Poincaré quien observó que algunos fenómenos impredecibles y fortuitos pueden ocurrir en sistemas elementales en los que un pequeño cambio en el presente crece de forma exponencial y por tanto produce un cambio mayor en el futuro. Este crecimiento exponencial de los errores es la propiedad básica para que ocurra el fenómeno conocido como CAOS y se dice que un tal sistema es caótico. En otras palabras, un sistema dinámico es caótico cuando posee "dependencia sensitiva con respecto a las condiciones iniciales" o equivalentemente si cualquier pequeña perturbación en el estado inicial del sistema conduce rápidamente al crecimiento de esta y por tanto anula la posibilidad de predecir, a largo plazo, el comportamiento del mismo. La aceptación de la existencia del movimiento caótico ha motivado a reconocer que sus consecuencias afectan la física, la química, la biología y en general a todas las ciencias, aunque existen opiniones encontradas sobre su relevancia en futuros desarrollos y orientaciones en el estudio de los sistemas dinámicos. Ejemplos de sistemas caóticos se presentan en muchas ramas de la ciencias, así se pueden mencionar: Cinética química, sistemas neuronales, dinámica de poblaciones, arritmia cardiaca, fluidos turbulentos, metereología, etc.

Los sistemas dinámicos caóticos son sistemas dinámicos no lineales, los cuales aparecen como modelos que expresan la razón de cambio en el tiempo de un número finito de variables en términos de ellas mismas. Aunque en muchas ocasiones los sistemas dinámicos, como modelo de procesos naturales, son sencillos de formular y en algunos sistemas simples se obtienen soluciones en forma explícita, es ahora conocido que, en general, soluciones que se expresen por medio de formulas algebraicas, para un sistema dinámico arbitrario son imposibles de obtener; así el comportamiento impredecible de los sistemas dinámicos caóticos no puede expresarse en términos de sistemas integrables y por tanto no existe manera de predecir su comportamiento. Sin embargo, utilizando el espacio de estados, es posible describir, parcialmente, de manera geométrica el comportamiento de tales sistemas. Por ejemplo en el caso del péndulo con rozamiento, este se detiene al cabo de un tiempo lo cual significa que las trayectorias se aproximan a un **punto fijo**, el cual por atraer a las trayectorias cercanas recibe el nombre de **atractor**. Si la energía perdida a causa del rozamiento se repone, de alguna manera, el péndulo repite su movimiento una y otra vez, en el espacio de estados este movimiento corresponde a una **órbita periódica**, la cual también atrae trayectorias cercanas. Este atractor recibe el nombre de **ciclo límite**.

Hasta hace cerca de 30 años los únicos atractores conocidos eran los puntos fijos, los ciclos límites y los denominados toros, sin embargo, en 1.963 E. Lorenz un metereólogo del Instituto Tecnológico de Masachusetts, en un intento por conocer el estado del tiempo atmosférico a largo plazo, propuso un ejemplo de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en dimensión tres que se comportaba de modo aparentemente aleatorio y no podía caracterizarse en términos de los atractores conocidos. Para este sistema mediante integración numérica obtuvo, con condiciones iniciales cerca al origen, soluciones que lo llevaron a descubrir la existencia de un conjunto de estructura complicada hacia el cual todas las trayectorias eran atraidas. El atractor que él observó fue el primer ejemplo "atractor caótico o extraño".

Las ideas geométricas en las cuales se sustenta la comprensión del comportamiento caótico son los de estirado y plegado que se producen en el espacio de estados. La divergencia exponencial constituye una propiedad local: puesto que los atractores permanecen en una región acotada del espacio de estados, en uno de ellos las trayectorias no pueden diverger de manera exponencial indefinidamente y por tanto el atractor debe plegarse sobre si mismo.

puede eliminarse recurriendo simplemente al análisis numérico ya que la extrema sensibilidad a los errores, imposible de eludir en cualquier método aproximado, dificulta los cálculos en el computador para tiempos cortos y los imposibilita a largo plazo.

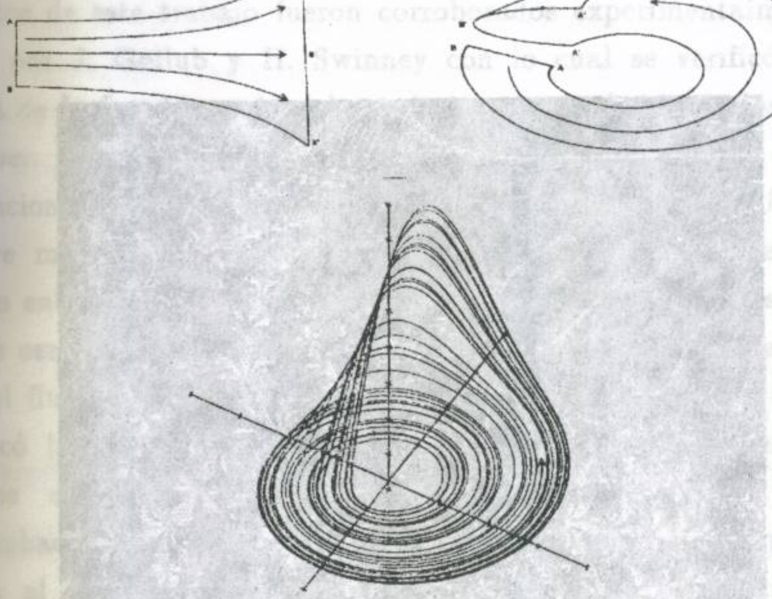


Fig. 2. El atractor geométrico de Rössler

Aunque las trayectorias diverjan y sigan caminos cada vez más alejados, en algún instante habrán de acercarse de nuevo entre sí; cuando eso sucede las trayectorias se mezclan en un conjunto que conforma un atractor extraño, es decir, en un ejemplo de un fractal: esto es un conjunto que cuando se magnifica una y otra vez siempre se parece a la imágen original. Ejemplos de fractales son los conjuntos de Julia y Mandelbrot, cuyas muestras visuales se pueden generar, a partir de algoritmos matemáticos, en un ordenador.

Precisamente el rápido desarrollo del computador y la matemática subyacente en el caos han traido cambios sustanciales en los métodos de análisis de sistemas dinámicos no lineales; sin embargo, puesto que un sistema caótico es no integrable esta dificultad no puede eliminarse recurriendo simplemente al análisis númerico ya que la extrema sensibilidad a los errores, imposible de eludir en cualquier método aproximado, dificulta los cálculos en el computador para tiempos cortos y los imposibilita a largo plazo.

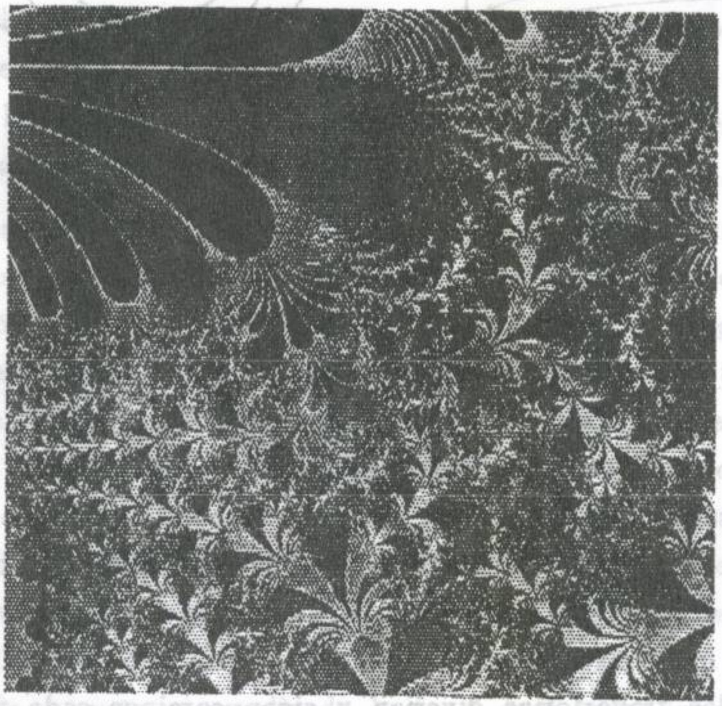


Fig. 3. El conjunto de Julia $\pi i e^z$

Qué tan abundantes son los sistemas caóticos? Si se escoge aleatoriamente un sistema dinámico, qué probabilidad existe de que sea integrable o caótico?. Como respuesta C. Siegel, demostró que dado cualquier sistema dinámico, integrable o no, existen infinitos otros que no son integrables, cuyas ecuaciones se diferencian del dado tanto como se desee y que no existen, en general, infinitos sistemas integrables con la misma propiedad. De esto se deduce que los sistemas caóticos forman un conjunto no contable.

En cuanto a sistemas dinámicos las ideas de Lorenz permanecieron ignoradas durante algunos años, pero después de 1970 el matemático F. Takens y el físico D. Ruelle estudiaron la transición del orden al caos en el movimiento de los fluidos. Los resultados teóricos de este trabajo fueron corroborados experimentalmente en 1974 por J. Gollub y H. Swinney con lo cual se verificó que la teoría de L. Landau, sobre el movimiento estocástico de los fluidos a saber: "El movimiento de un fluido está formado por muchas oscilaciones diferentes e independientes. A medida que el fluido se mueve más de prisa, adquiriendo mayor turbulencia, las oscilaciones entran de una en una. Aunque cada oscilación por separado puede ser simple, la complicación del movimiento combinado hace que el flujo sea impredecible", era incorrecta y por el contrario se verificó la conjetura de Lorenz de que en la turbulencia de los fluidos se encuentran los atractores caóticos. En 1978 M. Feigenbaum observó que en el punto donde un sistema pasa del orden al caos aparecía una suceción infinita de bifurcaciones de doble período y que este punto era precisamente el único punto de acumulación de ésta sucesión. Este fenómeno ocurre en muchos sistemas dinámicos y esta determinado por la llamada ***Constante de Feigenbaum*** cuyo valor es 4.669202.... Los hechos teóricos correspondientes a estas observaciones fueron probados por P. Collet y otros en 1980 y complementariamente por O. Lanford en 1982.

Una lista de Matemáticos y Físicos que han dedicado sus esfuerzos a comprender y explicar el movimiento caótico sería muy extensa, menciono únicamente a J. Guckemheimer y A. Smale quienes, en mi opinión, han proporcionado las ideas fundamentales sobre las cuales descansa el estado actual de la dinámica no lineal.

Para finalizar es necesario mencionar el hecho de que, queramos o no, el caos se encuentra a nuestro alrededor donde menos lo esperamos y por ello sería ideal entender en qué consiste el movimiento caótico; simplemente la mayoría de los sistemas dinámicos poseen trayectorias que no pueden calcularse para todo valor del tiempo utilizando algoritmos finitos y por tanto están fuera de nuestro alcance intelectual, sin embargo, puesto que el desarrollo de la ciencia es incesante, debe llegar algún día en que estas ideas sean de dominio público; cuando esto suceda existirán otras que desafiarán la mente humana y este ciclo se repetirá una y otra vez.

BIBLIOGRAFIA

[1] Drutchfield, J. P., *Chaos*. Scientific American, december, 1986.

2. Guckemheiemer, J. *Chaos: Science or non-science*. Nonlinear Science Today. Vol.1, Nro.1. 1991.

3. Mosquera, S. *El Sistema de Lorenz*. Tesis de Maestría. Universidad del Valle. 1992.

4. Thompson, J. M. and Stewart H. B. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Jhon Wiley and Sons. New Yorrk. 1986.

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
PROGRAMA DE MATEMATICAS Y ESTADISTICA
SAN JUAN DE PASTO