Máximos y mínimos sin derivada

LIBARDO JACOME

Esta idea surgió cuando traté de analizar si la función $f: \mathrm{R} - \{-2,-3\} \to \mathrm{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 + 5x + 6}$$

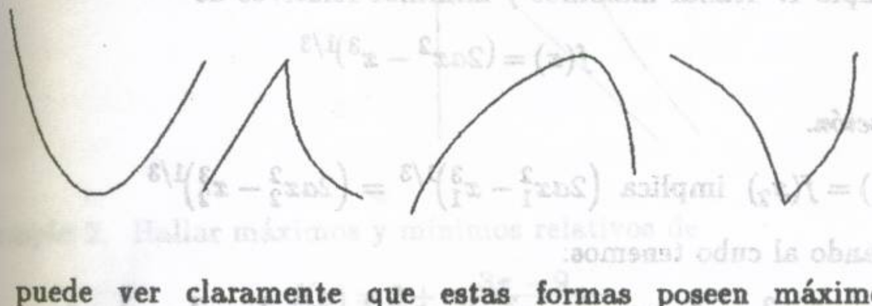
era biyectiva y si no era así buscar la forma de convertirla en biyectiva restringiendo el dominio.

Para mirar si f es 1-1 sabemos que hay que estudiar la implicación:

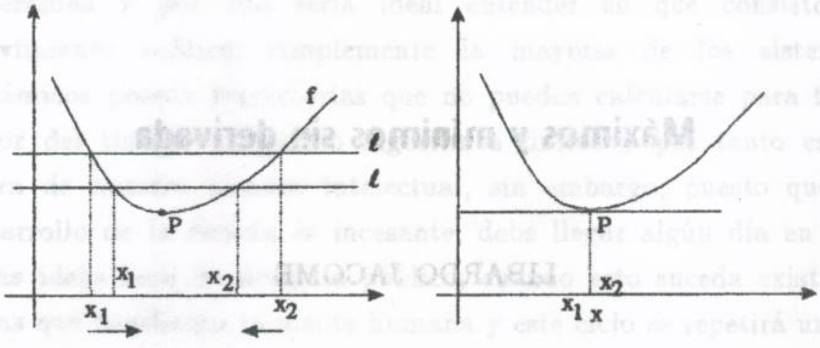
$$x_1, x_2 \in D_f \;/\; f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \; x_1 = x_2$$

Afortunadamente la función no es inyectiva y esto me ayudó para observar algo sorprendente.

Las funciones que no son 1-1 tienen en algunas regiones de su dominio formas como las siguientes:



Se puede ver claramente que estas formas poseen máximo o mínimo. Ahora bien, analicemos por ejemplo la primera figura, lo mismo se haría con las demás.



Claramente se mira que $f(x_1) = f(x_2)$ pero $x_1 \neq x_2$. Si la recta ℓ paralela al eje de las x se mueve hacia abajo de manera que intersecte f en dos puntos, x_1 se mueve a la derecha y x_2 se mueve hacia la izquierda.

Si seguimos desplazando ℓ paralelamente al eje de las x nos damos cuenta que la recta tocará por última vez a f en P, es decir en un punto de mínimo, en este caso, pero x_1 *coincidirá* con x_2.

Consideremos la igualdad $f(x_1) = f(x_2)$; nos interesa los puntos x_1, x_2 móviles donde $x_1 \neq x_2$ que se acercan al punto común x.

Resolviendo $f(x_1) = f(x_2)$ para aquellos puntos $x_1 \neq x_2$ realizaremos el reemplazo $x_1 = x_2 = x$ y resolviendo la ecuación hallaremos el punto de mínimo o máximo relativos.

Ejemplo 1. Hallar máximos y mínimos relativos de

$$f(x) = (2ax^2 - x^3)^{1/3}$$

Solución.

$f(x_1) = f(x_2)$ implica $\left(2ax_1^2 - x_1^3\right)^{1/3} = \left(2ax_2^2 - x_2^3\right)^{1/3}$

elevando al cubo tenemos:

$$2ax_1^2 - x_1^3 = 2ax_2^2 - x_2^3 \Rightarrow 2ax_1^2 - 2ax_2^2 + x_2^3 - x_1^3 = 0$$

y factorizando:

$$2a(x_1^2 - x_2^2) + (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_2x_1 + x_1) = 0$$

o sea

$$2a(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) - (x_1 - x_2)(x_2^2 + x_2x_1 + x_1) = 0$$

$$(x_1 - x_2)\big(2a(x_1 + x_2) - (x_2^2 + x_2x_1 + x_1)\big) = 0$$

de donde

$$x_1 - x_2 = 0 \quad \vee \quad 2a(x_1 + x_2) - (x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2) = 0$$

$x_1 - x_2 = 0$ no interesa.

Consideremos los puntos móviles para los cuales

$$2a(x_1 + x_2) - (x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2) = 0$$

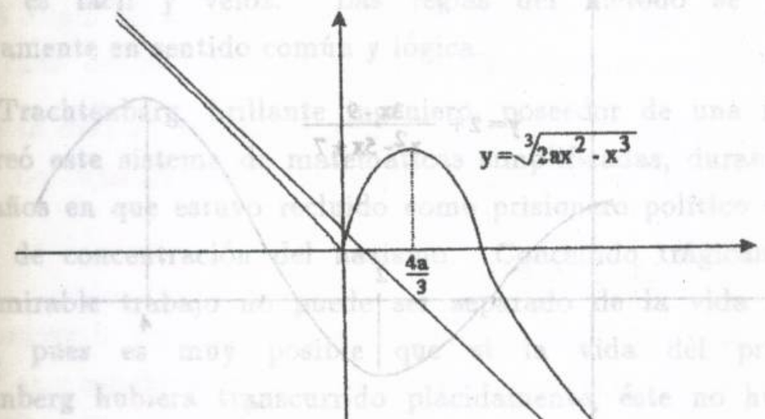
Haciendo $x_1 = x_2 = x$ quedaría:

$$2a(2x) - (x^2 + x^2 + x^2) = 0 \text{ o sea } 4ax - 3x^2 = 0\,,\ x(4a - 3x) = 0$$

de donde

$$x_0 = 0 \ \text{ ó } \ x_0 = \frac{4a}{3}$$

Para qué hay en $x_0 = 0$ y en $x_0 = \frac{4a}{3}$ analizamos el signo de $f(x) - f(x_0)$ cuando $x > x_0$ y $x < x_0$ con x próximo a x_0.



Ejemplo 2. Hallar máximos y mínimos relativos de

$$f(x) = 2 + \frac{3x - 9}{x^2 - 5x + 7}$$

Solución. Sea $f(x_1) = f(x_2)$

$$2+\frac{3x_1-9}{x_1^2-5x_1+7}=2+\frac{3x_2-9}{x_2^2-5x_2+7}$$

$$\frac{3x_1-9}{x_1^2-5x_1+7}=\frac{3x_2-9}{x_2^2-5x_2+7}$$

$$(3x_1-9)(x_2^2-5x_2+7)=(3x_2-9)(x_1^2-5x_1+7)$$

$$x_1x_2^2-15x_1x_2+21x_1-9x_2^2+45x_2-63=$$
$$3x_2x_1^2-15x_2x_1+21x_2-9x_1^2+45x_1-63$$

Cancelando y factorizando tenemos:

$$(x_2-x_1)\big(3x_1x_2-9(x_2+x_1)+24\big)=0$$

interesa

$$3x_1x_2-9(x_2+x_1)+24=0$$

hacemos $x_1=x_2=x$

$$3x^2-18x+24=0$$

Resolviendo: $x=2$, $x=4$, **que realmente son los puntos donde hay máximo o mínimo.**