La propuesta Peirce

Oscar Fernando Soto Agreda

Edgar Osejo Rosero

PRESENTACION

En el libro "Carnaval Matemático" de Martin Gardner, Alianza Editorial, 1984, páginas 37 y 38, el autor recuerda una propuesta para contar los números racionales del lógico americano **Sanders Peirce**. Propuesta por demás, atractiva y curiosa.

Durante una semana intentamos ahondar en las suspicacias de la propuesta sin otra bibliografía que nuestro entusiasmo. Disfrutamos de cada hallazgo y nos maravillamos de que en la sencillez de la misma aparecieran inmersas características insospechadas: hallamos su relación con la serie de Fibonacci, observamos su comportamiento que recuerda a los fractales, nos ayudamos de su relación con los números de Farey y en fin, conjeturamos muchas cosas. El objetivo era construir una función biyectiva entre los naturales y los racionales.

A cuenta gotas fuimos encontrando más relaciones que permitieron construir una biyección entre los racionales contenidos en el intervalo [0, 1/2] y los naturales, que presentamos en este artículo, y que puede extenderse fácilmente a una inyección de $\mathbb{Q}$ sobre $\mathbb{N}$.

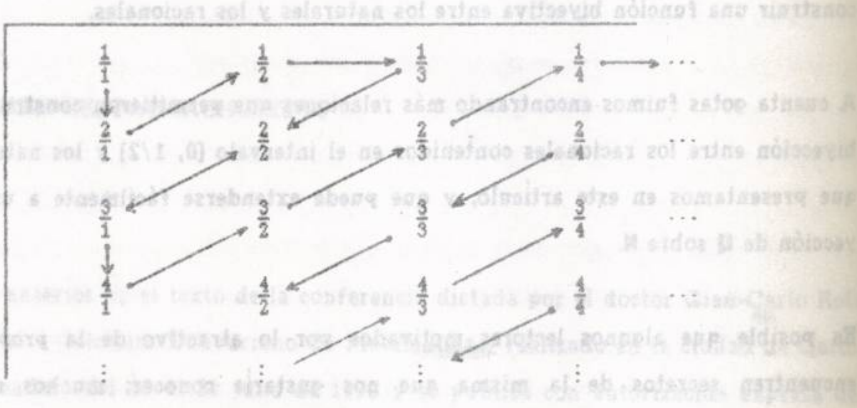
Es posible que algunos lectores motivados por lo atractivo de la propuesta, encuentren secretos de la misma que nos gustaría conocer; muchos de los hallazgos no aparecen en este artículo, por ser innecesarios en la construcción de la función.

1. ANTECEDENTES

1.1 Georg Ferdinand Ludwing Philipp Cantor estableció sus "terribles dinastías", según Luis Jorge Borges, de "números transfinitos" conocidos como alephs. En el escalón más bajo se encuentra el cardinal de los enteros positivos $\mathbb{N}$ llamado aleph cero ($\aleph_0$). Cualquier conjunto infinito que pueda ponerse en correspondencia biunívoca con los números naturales tiene como cardinal a aleph cero.

1.2 La intuición nos engaña fácilmente. Entre dos enteros consecutivos es fácil describir al menos $\aleph_0$ números racionales; por ejemplo, la secuencia $\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ de $\aleph_0$ elementos se ubica en el intervalo (0, 1]. Ahora bien, existen $\aleph_0$ intervalos cuyos extremos son enteros consecutivos, cada uno con al menos $\aleph_0$ racionales, por ende existen al menos $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0^2$ racionales. $\aleph_0^2$ se intuye, mayor que $\aleph_0$.

Cantor logra demostrar que los racionales conforman una sucesión numerablemente infinita equivalente a la de los números naturales y con ello tácitamente que $\aleph_0^2 = \aleph_0$. Cantor, simplemente, rotula con los naturales al conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ siguiendo el camino señalado por las flechas, consiguiendo



la composición biunívoca:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	
$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	...

1.3 En la demostración de numerabilidad de $\mathbb{Q}$ elaborada por Cantor, cada racional queda contado $\aleph_0$ veces; el 1 por ejemplo, aparece cada vez en la diagonal de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. ¿ Es posible contar cada racional una sola vez ?.

Estudiemos la propuesta del lógico americamo Charles Sanders Peirce (Collected Papers of Charles Sanders Peirce, Harvad University Press, 1933, páginas 578-580).

2. PROPUESTA DE PEIRCE

2.1 Empezando con las fracciones $\frac{0}{1}$ y $\frac{1}{0}$ se suman los numeradores y denominadores por aparte para obtener la fracción $\frac{1}{1}$ que se coloca entre ellos así:

$$\frac{0}{1} \quad \frac{1}{1} \quad \frac{1}{0}$$

Repetimos esta operación con cada par de fracciones adyacentes situando la nueva fracción entre ellas. En el segundo paso obtenemos la serie

$$\frac{0}{1} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{1} \quad \frac{2}{1} \quad \frac{1}{0}$$

Estas cinco fracciones crecen a nueve por idéntico procedimiento:

$$\frac{0}{1} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{1} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{2}{1} \quad \frac{3}{1} \quad \frac{1}{0}$$

La presentación de la serie es la siguiente:

Pasos

$\boxed{0}$ $\quad \frac{0}{1} \quad \frac{1}{0}$

$\boxed{1}$ $\quad \frac{0}{1} \quad \frac{1}{1} \quad \frac{1}{0}$

$\boxed{2}$ $\quad \frac{0}{1} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{1} \quad \frac{2}{1} \quad \frac{1}{0}$

$\boxed{3}$ $\quad \frac{0}{1} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{1} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{2}{1} \quad \frac{3}{1} \quad \frac{1}{0}$

$\boxed{4}$ $\quad \frac{0}{1} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{1}{1} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{5}{3} \quad \frac{2}{1} \quad \frac{5}{2} \quad \ldots$

$\vdots$

En cada paso, los dígitos por encima de los vínculos repiten los dígitos situados encima en el paso anterior 01, 011, 01121, ... y los dígitos por debajo de los vínculos son los mismos que los situados encima en el orden inverso; en consecuencia dos fracciones cualesquiera equidistantes son mutuamente inversas.

El problema de contar $\mathbb{Q}$ se reduce, por lo anterior, a contar sólamente las fracciones propias ubicadas entre 0 y 1.

2.2 Los numeradores de las fracciones que van haciendo su aparición en la serie diseñan la siguiente ala con la misma repetición explicada en el parágrafo anterior:

Pasos

$\boxed{1}$ 1

$\boxed{2}$ 1 2

$\boxed{3}$ 1 2 3 3

$\boxed{4}$ 1 2 3 3 4 5 5 4

$\boxed{5}$ 1 2 3 3 4 5 5 4 5 7 8 7 7 8 7 5

$\vdots$

Los denominadores de estas fracciones son los mismos numeradores leídos en sentido inverso. De esta manera dos números equidistantes a y b de un renglón n de esta ala, leídos fraccionariamente como $\frac{a}{b}$ o $\frac{b}{a}$ determinan un racional que hace su aparición en el paso n de la serie 2.1 que corresponde a la propuesta de Peirce.

Esta ala vuelve a aparecer en el parágrafo 2.5.

2.3 **ORDEN**. Para dos fracciones positivas $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ tales que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ se tiene que

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

lo que demuestra que al ir llenando los escaños intermedios los racionales hacen su aparición ordenados de menor a mayor. Así, cada racional hace su aparición una única vez logrando en los pasos subsiguientes un carácter de permanencia.

2.4 **IRREDUCTIBILIDAD**. Dos enteros n y m son primos entre sí si y solo si existen enteros α y β para los cuales $n\alpha + m\beta = 1$.

Si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son tales que $ad - bc = -1$ entonces $(a+c)d - (b+d)c = -1$ y $a(b+d) - b(a+c) = -1$, hechos que se comprueban con un simple cálculo.

Esto es cierto en el paso 1; entonces la afirmación es válida para toda la tabla, lo cual comprueba que todas las fracciones de esta construcción son irreductibles.

En resumen cada racional aparece una sola vez y en su forma fraccionaria más simple, de modo que al ir cerrando las grietas podemos contar a las fracciones tomándolas por su orden de aparición.

2.5 **EJES DE SIMETRIA**. En un paso m tres fracciones consecutivas $\frac{a}{b}$ $\frac{a+c}{b+d}$ $\frac{c}{d}$

generan racionales de la forma $\frac{a \cdot p + c \cdot q}{b \cdot p + d \cdot q}$ y $\frac{a \cdot q + c \cdot p}{b \cdot q + d \cdot p}$ que equidistan respecto de $\frac{a + c}{b + d}$ y son tales que si se suman sus numeradores y denominadores "generan" precisamente $\frac{a + c}{b + d}$. Entonces, cada racional que hace su aparición puede tomarse como eje de simetría en la ramificación de la serie. Los elementos p conforman la siguiente ala:

Pasos

$\boxed{m}$	1															
$\boxed{m+1}$	1	2														
$\boxed{m+2}$	1	2	3	3												
$\boxed{m+3}$	1	2	3	3	4	5	5	4								
$\boxed{m+4}$	1	2	3	3	4	5	5	4	5	7	8	7	7	8	7	5
$\vdots$																

Los elementos q son los mismos leídos en sentido inverso siendo cada racional que aparece engendrado a partir de la terna p y q elementos equidistantes de un renglón de esta ala. Por ejemplo, la terna $\frac{2}{5}\ \frac{3}{7}\ \frac{1}{2}$ aparece en el paso $m = 5$ si tomamos $p = 3$ y $q = 7$ que equidistan en el renglón 5 se conforma el racional $\frac{2 \cdot 3 + 1 \cdot 7}{5 \cdot 3 + 2 \cdot 7} = \frac{13}{29}$ que aparece cuatro renglones más abajo que $\frac{3}{7}$, es decir en el noveno paso de la serie correspondiente a la propuesta.

2.6 Queda demostrado como al tomar una terna consecutiva de la serie y continuarla, los elementos p y q siempre conforman las mismas alas lo que nos recuerda la teoría de los fractales.

Es fácil deducir un algoritmo de construcción de estas alas, basta con observar que:

2.6.1 Cada renglón duplica en elementos al anterior

2.6.2 La primera mitad de un nuevo renglón es el mismo anterior

2.6.3 La primera mitad de la segunda mitad de un renglón se forma con las sumas equidistantes, iniciando en los extremos, de los elementos del renglón anterior.

2.6.4 La segunda mitad es la misma de la parte 2.6.3 leída en sentido inverso.

2.7 UN BUEN EJERCICIO

¿ En el paso n-ésimo de la propuesta, aparecen todas las posibles fracciones de la forma $\frac{x}{n}$?.

Hemos escrito varios renglones y comprobado que en ellos se cumple. Esto no es ninguna demostración, simplemente es una observación. Talvez un acucioso lector del artículo elabore una prueba definitiva de esta conjetura.

3. BUSCANDO UN ALGORITMO

3.1 En el paso dos de la serie aparece como "eje" de simetría $\frac{1}{2}$; las fracciones sucesivas de la serie que equidistan de $\frac{1}{2}$ son de la forma $\frac{a}{b}$ y $\frac{b-a}{b}$ ya que deben sumar $\frac{1}{2}$, hecho que permite reducir el problema de enumerar $\mathbb{Q}$ simplemente contando los racionales que aparecen en el intervalo [0, 1/2]. La presentación de esta "nueva" serie es como sigue

Pasos

$\boxed{1}$ $\quad \frac{0}{1}$

$\boxed{2}$ $\quad \frac{0}{1} \quad \frac{1}{2}$

$\boxed{3}$ $\quad \frac{0}{1} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{1}{2}$

$\boxed{4}$ $\quad \frac{0}{1} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{1}{2}$

$\boxed{5}$ $\quad \frac{0}{1} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{2}{7} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{3}{7} \quad \frac{1}{2}$

$\boxed{6}$ $\quad \frac{0}{1} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{2}{9} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{3}{11} \quad \frac{2}{7} \quad \frac{3}{10} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{4}{11} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{5}{13} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{5}{12} \quad \frac{3}{7} \quad \frac{4}{9} \quad \frac{1}{2}$

⋮

Aquí, cada columna está conformada por racionales con idéntico numerador a y denominador perteneciente a la progresión aritmética $b + na$ siendo n un natural.

Por ejemplo la octava columna que encabeza $\frac{3}{7}$ posee como denominadores los elementos de la secuencia $\left\{7 + 3n \mid n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{7, 10, 13, 16, \ldots\right\}$. Cada columna posee $\aleph_0$ elementos.

De ahora en adelante llamaremos **generador** a cada fracción r entre 0 y $\frac{1}{2}$ que encabece una columna en la nueva presentación de la serie.

Exceptuando $\frac{0}{1}$ que aparece en el paso 1, todo otro generador es mayor que $\frac{1}{3}$ de modo que un racional $r \neq 0$ es generador si y solo si $\frac{1}{3} < r \leq \frac{1}{2}$. ¿ En qué renglón hace su aparición cada r ?.

3.1.1 Generador de una fracción

Elegida la fracción $\frac{a}{b}$ puede ocurrir que $\frac{a}{b} < \frac{1}{3}$ en cuyo caso no es un generador. Como $a < b$ existe un único natural n tal que $\frac{1}{3} < \frac{a}{b - na} < \frac{1}{2}$, tal n está dado por la expresión $[\![b/a - 2]\!]$ donde los corchetes corresponden a la función "parte entera". La fracción $\frac{a}{b}$ hace su aparición n renglones más abajo que su generador $\frac{a}{b - na}$. Por ejemplo, para la fracción $\frac{3}{95}$ se consigue $n = 29$ y su generador es $\frac{3}{95 - 29 \cdot 3} = \frac{3}{8}$, $\frac{3}{8}$ aparece en el renglón 5; de hecho $\frac{3}{95}$ lo hace en el renglón 34.

3.2 Los generadores r se construyen a partir de la terna consecutiva $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{1}{2}$ que aparece en el paso $m = 4$.

De acuerdo a lo anterior, si $r = \frac{a}{b}$ y $r < \frac{2}{5}$, $\frac{a}{b} = \frac{1 \cdot p + 2 \cdot q}{3 \cdot p + 5 \cdot q}$ o si $r > \frac{2}{5}$ se tiene $\frac{a}{b} = \frac{1 \cdot p + 2 \cdot q}{2 \cdot p + 5 \cdot q}$ donde p y q son elementos equidistantes de un renglón x del ala 2.2. Esto significa que el generador $r = \frac{a}{b}$ hace su aparición en el renglón $x+4$ de la serie 3.1.

Probemos que p y q se determinan biunívocamente a partir de $\frac{a}{b}$. En efecto: si $\frac{a}{b} < \frac{2}{5}$ se consigue que $p = 2b - 5a$ y $q = 3a - b$ y además como existen enteros α y β tales que $a\alpha + b\beta = 1$ es cierto que $(\alpha + 3\beta)p + (2\alpha + 5\beta)p = 1$ lo que indica como p y q son primos entre sí, esto es, $\frac{p}{q}$ aparece en la serie. Si $\frac{a}{b} > \frac{2}{5}$ se halla que $p = 5a - 2b$ y $q = b - 2a$ y además

$$(\alpha + 2\beta)p + (2\alpha + 5\beta)q = 1 \text{ si } a\alpha + b\beta = 1$$

3.3 Algoritmo para ubicar el renglón

Los parágrafos 2.2, 2.5 y 3.1.1 diseñan el siguiente algoritmo:

Dado el fraccionario $\frac{a}{b}$ con a y b primos entre si y siendo $0 \leq \frac{a}{b} \leq \frac{1}{2}$, para ubicar el renglón donde aparece $\frac{a}{b}$ se procede así:

3.3.1 Se halla el generador de $\frac{a}{b}$ colocando $a_1 = a$ y $b_1 = b - na$ donde $n = [\![b/a - 2]\!]$ según 3.1.1.

3.3.2 Para el generador $\frac{a_1}{b_1}$, si $\frac{a_1}{b_1} < \frac{2}{5}$ ponemos $p = 2b_1 - 5a_1$ y $q = 3a_1 - 2b_1$ y si $\frac{a_1}{b_1} > \frac{2}{5}$ se coloca $p = 5a_1 - 2b_1$ y $q = b_1 - 2a_1$ según 3.2.

3.3.3 Ubicamos el renglón x de la tabla 2.2 donde el par p, q se encuentran equidistantes. El racional $\frac{a}{b}$ aparece en el renglón $n + x + 4$ de la tabla 3.1.

3.3.4 El proceso se puede reiterar tomando el racional $\left(\frac{p}{q} \text{ o } \frac{q-p}{q}\right)$ si $p < q$ ó $\left(\frac{q}{p} \text{ o } \frac{p-q}{p}\right)$ en caso contrario.

3.4 EJEMPLOS

3.4.1 Ubiquemos el renglón en el que aparece $\frac{45}{116}$. Para él, $n = [\![b/a - 2]\!] = 0$ lo que equivale a decir que este racional es generador. como $\frac{45}{116} < \frac{2}{5}$ se encuentra que $p = 7$ y $q = 19$ y por ende $\frac{45}{116}$ aparece cuatro renglones más abajo de donde lo hace el radional $\frac{7}{19}$.

Nuevamente $\frac{1}{3} < \frac{7}{19} < \frac{2}{5}$ y para él se halla $p = 3$, $q = 2$ lo cual significa que: $\frac{7}{19}$ aparece cuatro renglones más abajo de donde lo hace $\frac{2}{3}$ ó $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$ aparece en el renglón 3; $\frac{7}{19}$ lo hace en el 7 y por ende $\frac{45}{116}$ en el 11.

3.4.2 ¿ En qué renglón aparece $\frac{3}{10}$?.

Aquí ocurre que $\frac{3}{10} < \frac{1}{3}$. Por 3.3.1 se consigue $n = 1$ y su generador es $\frac{3}{7}$. Como $\frac{3}{7}$ es mayor que $\frac{2}{5}$ se consigue por 3.3.2, $p = q = 1$ de donde $x = 1$. Así que $\frac{3}{10}$ hace su aparición en el renglón $6 = 1 + 1 + 4$ de la tabla 3.1.

El racional $\frac{12}{31}$ aparece en el renglón 8, $\frac{343}{15625}$ lo hace en el 62, $\frac{7}{18}$ en el renglón 7 y $\frac{12}{19}$ en el octavo.

3.5 UBICACION DE LA COLUMNA

En el parágrafo 2.4 vimos como dos fracciones vecinas $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ en cualquier paso de la serie son tales que $a \cdot d + 1 = b \cdot c$.

Conocido el renglón en el que aparece una fracción $\frac{c}{d}$ su vecino a izquierda $\frac{x}{y}$ $\left(\text{denotaremos } \frac{x}{y} \; \frac{c}{d}\right)$, se conoce al resolver la congruencia $d \cdot x \equiv -1 (\text{mód}\, c)$ que posee única solución ya que d y c son primos entre sí, para el caso $y = \dfrac{dx + 1}{c}$.

El vecino a izquierda $\frac{x}{y}$ de $\frac{c}{d}$ aparece en el paso anterior al que lo hace $\frac{c}{d}$. Si $\frac{x}{y}$ aparece por vez primera en la columna m en el siguiente lo hace en la columna $2m - 1$ y p renglones más abajo se ubica en la columna $2^p(m - 1) + 1$.

En cada renglón los elementos que hacen su aparición ocupan lugares pares mientras los que ya han logrado carácter de permanencia lo hacen en columnas impares, además cada racional está ubicado en la columna donde hace la aparición su generador.

3.5.1 **El algoritmo.** Para ubicar la columna de la serie 3.1 en la que se ubica el generador $r = \frac{a}{b}$ que hace su aparición en el renglón n se procede como sigue:

3.5.1.1 Calculamos $\frac{a_1}{b_1}$ vecino a izquierda de $\frac{a}{b}$: $\frac{a_1}{b_1}$ $\frac{a}{b}$

3.5.1.2 Ubicamos el renglón n_1 donde aparece $\frac{a_1}{b_1}$

3.5.1.3 Reiteramos el proceso de hallar vecino a izquierda hasta encontrar un vecino $\frac{a_p}{b_p}$ de un renglón n_p en una columna conocida m_p. Con ello, construimos una cola de vecinos a izquierda como sigue:

Racional	$\frac{a_p}{b_p}$	$\frac{a_{p-1}}{b_{p-1}}$	$\frac{a_{p-2}}{b_{p-2}}$	$\cdots$	$\frac{a_2}{b_2}$	$\frac{a_1}{b_1}$	$\frac{a}{b}$
Renglón	n_p	n_{p-1}	n_{p-2}	$\cdots$	n_2	n_1	n
Columna	m_p	m_{p-1}	m_{p-2}	$\cdots$	m_2	m_1	m

Es claro que $n_p < n_{p-1} < \ldots < n_2 < n_1 < n$ y que al final de la cola queda conocida la columna m_p, con este valor nos dirigimos a conocer m haciendo:

$$m_{p-1} = 2^{n_{p-1} - n_p}\left(m_p - 1\right) + 2$$

$$m_{p-2} = 2^{n_{p-2} - n_{p-1}}\left(m_{p-1} - 1\right) + 2$$

$$\vdots$$

$$m_i = 2^{n_i - n_{i+1}}\left(m_{i+1} - 1\right) + 2$$

$$\vdots$$

$$m \;=\; 2^{n - n_1}\left(m_1 - 1\right) + 2$$

3.5.2 **Ejemplos**

3.5.2.1 En el séptimo renglón aparece $\frac{7}{18}$, busquemos la columna que ocupa. La cola de vecinos queda así:

Racional	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{13}$	$\frac{7}{18}$
Renglón	3	5	6	7
Columna	2	m_2	m_1	m

Con esto se consigue: $m_2 = 2^2(2-1)+2 = 6$, $m_1 = 2(6-1)+2 = 12$ y $m = 2(12-1)+2 = 24$, lo que asegura como $\frac{7}{18}$ hace su aparición en la columna 24.

$\frac{12}{19}$ aparece en la columna 52 del octavo paso

$\frac{81}{1000}$ aparece en la columna 14.330 del paso 26.

4. LA ENUMERACION

4.1 Es fácil ahora, asignar a cada racional $\frac{a}{b}$ entre 0 y $\frac{1}{2}$ un único número natural por su orden de apareción en la serie, así:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} \frac{0}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{7} & \frac{3}{8} & \frac{3}{7} & \frac{1}{6} & \frac{2}{9} & \frac{3}{11} & \frac{3}{10} & \frac{4}{11} & \frac{5}{13} & \frac{5}{12} & \frac{4}{9} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 \end{array}$$

Se deduce que al racional r que aparece en el renglón $n \geq 2$ y en la columna m se le rotula con el natural

$$\boxed{s = 2^{n-3} + 1 + \frac{m}{2}}$$

Por ejemplo $\frac{3}{10}$ aparece en el renglón 6 y columna 8 y por tanto queda contado con el natural $s = 2^{6-3} + 1 + \frac{8}{2} = 13$; $\frac{5}{53}$ aparece en el renglón 14 columna 12 y por ende le corresponde el natural 2055; al racional $\frac{81}{1000}$ le corresponde el natural 8395774.

4.2 ACTUANDO A LA INVERSA

Dado un natural n, para encontrar el racional que se cuenta con él, se procede como sigue:

4.2.1 Se calcula el natural p tal que $2^{p-2} < n-1 < 2^{p-1}$

4.2.2 Se llama $m = n-(2^{p-2}+1)$

4.2.3 El racional r entre 0 y $\frac{1}{2}$ que ocupa el lugar n por orden de aparición está en el renglón $p+1$ y columna $2m$.

4.2.4 El racional buscado está entre los racionales que en el renglón anterior p ocupan los lugares m y $m+1$. el proceso se reitera hasta encontrar dos vecinos conocidos y se contruye con ellos el racional tomando siempre el que ocupa lugar par.

4.3 Un ejemplo

A qué racional le corresponde el número 1000 ?.

El racional buscado aparece en el renglón 12, columna 974, lo construyen los números que en el renglón 11 ocupan las columnas 487 y 488, estos aparecen de los que en el renglón 10 ocupan los lugares 244 y 245 ...

El proceso se resume en el siguiente cuadro

Pasos	Columnas		Racionales		
$\boxed{2}$	1	2	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{2}$	
$\boxed{3}$	2	3	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
$\boxed{4}$	4	5	:		
$\boxed{5}$	8	9			

$\boxed{6}$	16	17	$\frac{3}{7}_{15}$	$\frac{4}{9}_{16}$	$\frac{1}{2}_{17}$
$\boxed{7}$	31	32			
$\boxed{8}$	61	62	$\frac{4}{9}_{61}$	$\frac{9}{20}_{62}$	$\frac{5}{11}_{63}$
$\boxed{9}$	122	123			
$\boxed{10}$	244	245	$\frac{22}{49}_{244}$	$\frac{9}{20}_{245}$	
$\boxed{11}$	487	488	$\frac{22}{49}_{487}$	$\frac{31}{69}_{488}$	
$\boxed{12}$	974		$\frac{53}{118}_{974}$		

Con los subíndices hemos indicado la columna en que se ubican los racionales en cada renglón. Con el ejemplo se ilustra como el racional $\frac{53}{118}$ hace su aparición en el lugar 1000.

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
DEPTO. DE MATEMATICAS Y ESTADISTICA
PASTO (N).