# TRISECCION DE ANGULOS

Libardo Manuel Jácome

## INTRODUCCION.

Uno de los problemas de la antigüedad fue el de trisección del ángulo, usando únicamente regla y compás euclidianos. Muchos eminentes matemáticos lo resolvieron pero utilizando instrumentos sofisticados o la regla y el compás en un sentido más amplio.

Desde 1937 se sabe que este problema carece de solución en virtud del teorema de Wantzel, pero en el V Coloquio Regional de Matemáticas, la profesora Clara Elena Sánchez de la Universidad Nacional, nos comenta que a pesar de conocer este teorema hay personas que abrigan la esperanza de poder resolverlo y presentan "soluciones" a este problema, pero claro, siempre se encuentra el error.

En esta oportunidad no pretendo dar una "solución" más, pero sí resolver el problema de trisección aunque sea en mínima parte, en concreto dando una lista de ángulos, su construcción y el método para efectuar la operación mencionada.

## PREPARATIVOS.

En primer lugar, supongamos que hemos trisecado el ángulo AOB de medida $\alpha$ entonces se podrán trisecar los ángulos de medida:

1) $\alpha/2^n$, $n \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha \leq 360^o$

2) $\alpha 2^m$, $m \in \mathbb{N}$.

donde $0 < \alpha \leq 180$ y m de tal forma que $0 < \alpha 2^m \leq 360$.

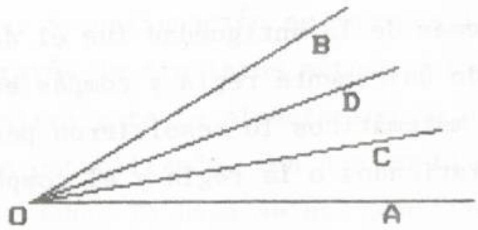


FIG. 1

De lo anterior tenemos que si por algún procedimiento dividimos el ángulo AOB en tres partes iguales (Fig. 1), ya podremos trisecar infinito número de ángulos.

Para trisecar el ángulo de medida $\alpha/2$ basta aplicar un teorema de Geometría Elemental que dice: la medida del ángulo inscrito en una circunferencia es la mitad del arco comprendido entre sus lados.

Con centro en O y radio arbitrario describimos la circunferencia que intercepta a los rayos OA, OC, OD y OB en los puntos: P, Q, R y S respectivamente.

En el arco PKS tomamos un punto arbitrario L y unimos este punto con P, Q, R y S.

Los rayos LQ y LR trisecan al ángulo PLS. (Fig. 2).

Si queremos trisecar el ángulo de medida $\alpha/4$ repetimos el proceso con el ángulo PLS de medida $\alpha/2$.

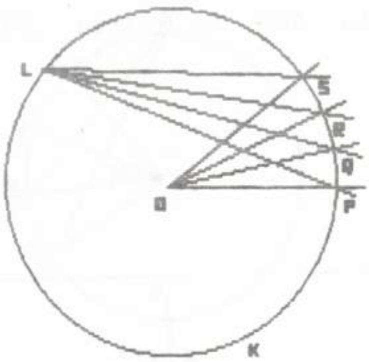


FIG. 2

Si el ángulo AOB tiene como medida $0 < \alpha \leq 180$, se pueden trisecar todos los ángulos de medida $2^m\alpha$, $m \in \mathbb{N}$ con la limitante de que m queda agotado cuando $\alpha 2^m \leq 360$. Trazamos una circunferencia que pase por los puntos O, A, B; en la construcción queda determinado el centro T de la circunferencia y los puntos M y N.

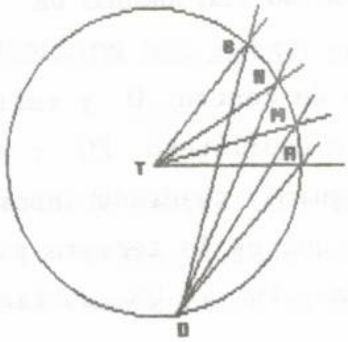


FIG. 3

Unimos T con A, M, N y B. El ángulo ATB (doble de AOB) queda trisecado por los rayos OM y ON.

## TRISECCION DEL ANGULO DE 270º

Es quizá la más sencilla de las trisecciones, pues una vez construído el ángulo AOB de medida $270^\circ$ basta prolongar AO y BO.


FIG. 4

El lector puede comprobar fácilmente que el ángulo AOB queda dividido en tres ángulos, cada uno de medida $90^\circ$. Esto significa que se pueden trisecar los ángulos de medida: $135^\circ$, $67.5^\circ$, ..., $270^\circ/2^n$, ..., $n \in N$

## TRISECCION DEL ANGULO DE 90º

En la circunferencia de centro O y radio r construimos el lado del triángulo equilátero PQ y el lado del cuadrado PR y QS (Triángulo y cuadrado inscritos). La cuerda PQ subtiende un arco que es la tercera parte de la circunferencia y las cuerdas PQ y QS subtienden arcos de 1/4 de circunferencia.

Ahora $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)$. Esto significa que $\widehat{QR} = (1/3)\ \widehat{QS}$.

Podemos apreciar claramente que $\widehat{SQ}$ mide 90º y por tanto $\widehat{RQ}$ medirá 30º.

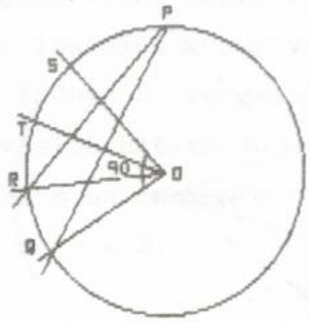



FIG. 5

Es decir el arco $\widehat{SQ}$ quedará dividido en tres partes iguales cuando localicemos el punto T tal que $\widehat{ST} = \widehat{TR}$ lo cual es muy sencillo.

Lo anterior significa que el ángulo QOS queda trisecado por los rayos OR y OT. (Fig. 5). Luego se pueden trisecar los ángulos de medidas 180º, 360º, 45º, 22.5º,...,90º/$2^n$..

## TRISECCION DEL ANGULO DE 72º

En una circunferencia de centro O y radio r tomo un punto arbitrario p y construyo el lado del triángulo equilátero inscrito PQ así como también el ángulo a trisecar QOS de medida 72º. A continuación dibujo el lado del pentágono regular inscrito PR. Ahora 1/3-1/5 = (2/3)(1/5). Esto significa que $\widehat{PQ} - \widehat{PR} = \widehat{QR} = (2/3)\widehat{QS}$. Tomemos en la circunferencia un punto T entre R y Q tal que $\widehat{QT} = \widehat{TR}$ en tonces, el ángulo QOS queda trisecado por los rayos OR y OT.

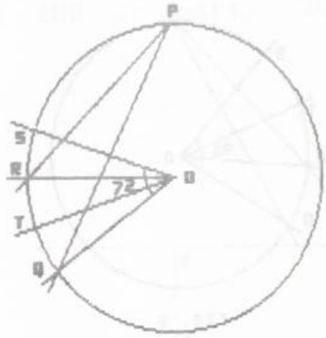


FIG. 6

Se pueden trisecar los ángulos de medidas: 144º, 288º, 36º, 18º, 9º, 4.5º, etc.

Así podríamos seguir trisecando más ángulos, pero de pronto se vuelve monótono, por esto es mejor que veamos de inmediato un método para trisecar cierto tipo de ángulos.

Como podemos observar según los ejemplos anteriores, el problema está íntimamente relacionado con la construcción de polígonos regulares.

Según Gauss (177-1855) un polígono regular de n lados se puede construir si los factores primos impares de n son "números primos de Fermat" diferentes entre sí.

Un número de Fermat es de la forma $f_i = 2^{2^i} + 1,\ i \in Z^+ \cup \{0\}$

El procedimiento consiste en construir el lado PQ del polígono regular de tres lados en la circunferencia de centro O y radio r, a continuación dibujamos el ángulo QOS de medida 360º/n donde n es un número formado por factores primos de Fermat diferentes entre sí y diferentes de 3. Luego, a partir de P llevamos sucesivamente el lado del polígono regular de n lados L veces. L lo describimos a continuación. La división entera de n por 3 no es exacta y por tanto obtendremos un cociente L y un residuo J. Es claro que $J = 1$ ó $J = 2$.

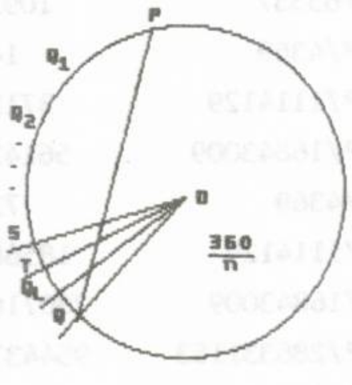


FIG. 7

Así tendremos los puntos $Q_1, Q_2, \ldots, Q_L$ (fig. 7). Observe que $(1/3) - (L/n) = (n-3L)/(3n) = (J/3)(1/n)$, $J \in \{1,2\}$ Esto significa que $\widehat{PQ} - \widehat{PQ_L} = \widehat{Q_LQ} = (J/3)\widehat{SQ}$ donde $J \in \{1, 2\}$. Si $J = 1$ tomamos el punto T en la circunferencia entre S y $Q_L$ de modo que $\widehat{ST} = \widehat{TQ_L}$, de esta forma los rayos OT y $OQ_L$ trisecan el ángulo QOS.

Si $J = 2$ tomamos un punto T en la circunferencia entre $Q_L$ y Q tal que $\widehat{Q_LT} = \widehat{TQ}$. Los rayos OT y $OQ_L$ trisecan el ángulo QOS.

A continuación escribo la lista de ángulos trisecables con valores de n, L y J.

| n | ANGULO PRINCIPAL | L | J |
|---|---|---|---|
| 5 | 72º | 1 | 2 |
| 17 | 360º/17 | 5 | 2 |
| 257 | 360º/257 | 85 | 2 |
| 65537 | 360º/65537 | 21845 | 2 |
| 85 | 72º/17 | 28 | 1 |
| 1285 | 72º/257 | 428 | 1 |
| 327685 | 72º/65537 | 109228 | 1 |
| 4369 | 360º/4369 | 1456 | 1 |
| 1114129 | 360º/1114129 | 371376 | 1 |
| 16843009 | 360º/16843009 | 5614336 | 1 |
| 21845 | 72º/4369 | 7281 | 2 |
| 5570645 | 72º/1114129 | 1856881 | 2 |
| 84215045 | 72º/16843009 | 28071681 | 2 |
| 286331153 | 360º/286331153 | 95443717 | 2 |
| 1431655765 | 72º/286331153 | 477218588 | 1 |

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Es posible que en el futuro se encuentren más números primos de la forma $f_i$. Se sabe que $f_i$ para $5 \leq i \leq 16$ el número es compuesto, luego el próximo polígono regular podría tener $2^{2^{17}} + 1$ lados. El número de cifras de este monstruoso número está alrededor de 40960, es decir, ni siquiera podríamos anexarlo a la lista anterior.

Nótese las últimas cifras de n y L.

## BIBLIOGRAFIA

1. COXETER. H. S.M. Fundamentos de Geometría. Limusa 1971.

2. VERA, Francisco. Científicos Griegos. Aguilar. 1970.

3. LANDAVERDE, Felipe de Jesús. Curso de Geometría. Andes

4. MOISE, DOWNS. Geometría Moderna. Fondo Educativo Interamericano. 1970.