DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA EN R^3

Jairo Portilla O.

El empleo de vectores geométricos (para visualizar) y el de vectores coordenados (para operar algebráicamente) tiene gran importancia en la Geometría Analítica; pues con ellos se facilita la deducción de muchas fórmulas como también la obtención de las diferentes relaciones algebráicas que se dan entre los lugares geométricos; tales como en rectas paralelas, perpendiculares, la distancia de un punto a una recta, etc. Esto lo veremos por ejmplo, en el tema a tratarse.

NOTACION: Los vectores se escribirán en negrilla; así **M** y **SQ** el segmento rectilíneo orientado con extremos en los puntos S y Q.

Es conveniente tener presente algunas expresiones y relaciones entre vectores, tales como:

SQ = **SR** + **RQ**: método del triángulo

X.Y : producto escalar entre los vectores **X** y **Y**

X x **Y**: producto vectorial entre **X** y **Y**.

$|\mathbf{X}.\mathbf{Y}| = |\mathbf{X}|\,|\mathbf{Y}|$ sí y sólo si $\mathbf{X} \parallel \mathbf{Y}$ (1)

$\mathbf{X} \perp \mathbf{Y}$ si y sólo si $\mathbf{X}\,.\,\mathbf{Y} = 0$ (2)

$|\mathbf{X} \pm \mathbf{Y}|^2 = |\mathbf{X}|^2 + |\mathbf{Y}|^2$ sii $\mathbf{X} \perp \mathbf{Y}$ (3)

$|\mathbf{X} \times \mathbf{Y}|^2 = |\mathbf{X}|^2 \cdot |\mathbf{Y}|^2 - (\mathbf{X}.\mathbf{Y})^2$ (4)

donde $|\mathbf{X}|$ es la norma de **X**.

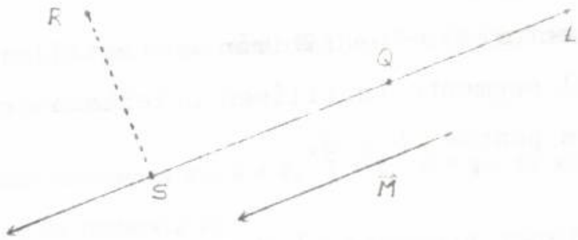
Ahora, dada una recta L en el espacio con sus ecuaciones paramétricas, así:

$$L: \begin{cases} x = x_1 + ta \\ y = y_1 + tb \quad ; \quad t \in R \\ z = z_1 + tc \end{cases}$$

se tiene que $Q(x_1, y_1, z_1)$ es un punto y $M = (a, b, c)$ es un vector direccional de L, $(M \parallel L, \ M \neq 0)$. Para un punto dado $R(h, k, r)$ en un sistema XYZO (rectangular), se denota la distancia de R a L así: $d(R, L)$.

Definición.

$d(R, L) = RS$, donde S es el punto proyección de R sobre L.



Según lo anterior, $\mathbf{SQ} \parallel \mathbf{M}$ y por (1) se obtiene:

$|\mathbf{SQ} \cdot \mathbf{M}| = |\mathbf{SQ}||\mathbf{M}| = SQ\,|\mathbf{M}|$; pero

$\mathbf{SQ} \cdot \mathbf{M} = (\mathbf{SR} + \mathbf{RQ}) \cdot \mathbf{M} = \mathbf{SR} \cdot \mathbf{M} + \mathbf{RQ} \cdot \mathbf{M} = \mathbf{RQ} \cdot \mathbf{M}$

En lo anterior, $\mathbf{SR} \cdot \mathbf{M} = 0$ porque $\mathbf{SR} \perp \mathbf{M}$ (ver 2)

Así: $|\mathbf{RQ} \cdot \mathbf{M}| = SQ\,|\mathbf{M}|$ o $SQ = |\mathbf{RQ} \cdot \mathbf{M}| \,/\, |\mathbf{M}|$

Por otra parte, $\mathbf{RS} \perp \mathbf{SQ}$ y según (3) se tiene:

$$|\mathbf{RS} + \mathbf{SQ}|^2 = |\mathbf{RS}|^2 + |\mathbf{SQ}|^2 = |\mathbf{RQ}|^2 \quad ó$$

$RS^2 + SQ^2 = RQ^2$ de donde $RS^2 = RQ^2 - SQ^2$

Reemplazando SQ: $RS^2 = RQ^2 - |\mathbf{RQ} \cdot \mathbf{M}| / |\mathbf{M}|^2$ ó

$$RS^2 = \frac{RQ^2|\mathbf{M}|^2 - |\mathbf{RQ} \cdot \mathbf{M}|^2}{|\mathbf{M}|^2} = \frac{|\mathbf{RQ} \times \mathbf{M}|^2}{|\mathbf{M}|^2}$$

La última igualdad se justifica por (4).

Luego: $RS = |\mathbf{RQ} \times \mathbf{M}| / |\mathbf{M}|$ y según la definición:

$$d(R, L) = |\mathbf{RQ} \times \mathbf{M}| / |\mathbf{M}| \qquad (*)$$

NOTA: $|\mathbf{M}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Cualquier punto P de L tiene como coordenadas $P(x,y,z)$ o $P(x_1 + ta, y_1 + tb, z_1 + tc)$. donde t es un real cual - quiera.

Ahora, $\mathbf{RP} = (x_1 + ta - h, y_i + tb - k, z_1 + tc - r)$;

luego:

$$\mathbf{RP} \times \mathbf{M} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1+ta-h & y_1+tb-k & z_1+tc-r \\ a & b & c \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1-h & y_1-k & z_1-r \\ a & b & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ ta & tb & tc \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1-h & y_1-k & z_1-r \\ a & b & c \end{vmatrix} = \mathbf{RQ} \times \mathbf{M} \qquad (**)$$

puesto que $\mathbf{RQ} = (x_1-h,\ y_1-k,\ z_1-r)$; donde $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$.

En consecuencia, $d(R, L) = |\mathbf{RQ} \times \mathbf{M}| \,/\, |\mathbf{M}|$

Por otra parte, si $\mathbf{M'}$ es otro vector direccional de L, entonces $\mathbf{M} = \lambda \mathbf{M'}$, donde $\lambda \in \mathbf{R}^*$ y en (*)

$$d(R, L) = |\mathbf{RQ} \times (\lambda \mathbf{M'})| \,/\, |\lambda \mathbf{M'}| = |\lambda| |\mathbf{RQ} \times \mathbf{M'}| \,/\, |\lambda| |\mathbf{M'}|$$
$$= |\mathbf{RQ} \times \mathbf{M'}| \,/\, |\mathbf{M'}| .$$

Según los dos últimos análisis, se saca como conclusión lo siguiente: En igualdad (*) se puede reemplazar el punto Q por cualquier otro punto P de la recta y/o el vector $\mathbf{M}$ por cualquier otro vector direccional $\mathbf{M'}$ de L. En cualquier caso, la distancia del punto R a la recta L no cambia.

Veamos otro aspecto, en lo anterior consideramos un caso particular. Si $x_1 = 0 = c = r$, entonces la recta L como el punto R están en el plano cartesiano XY. Así:

$Q(x_1, y_1, 0)$, $\mathbf{M} = (a, b, c, 0)$, $R(h, k, 0)$ y

$$L: \begin{cases} x = x_1 + ta \\ y = y_1 + tb \\ z = 0 \end{cases}$$ De estas ecuaciones se obtiene:

$L:\quad bx-ay+ay_1-bx_1 = 0$ ó $Ax + By + C = 0$ en XYO,

$A = b,\ B = -a,\ C = ay_1 - bx_1$.

Por otra parte se tiene:

$$\mathbf{RQ} \times \mathbf{M} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1-h & y_1-k & 0 \\ a & b & 0 \end{vmatrix} = (bx_1-bh-ay_1+ak)\mathbf{k} = (0,0,bx_1-bh-ay_1+ak)$$

Luego, $|\mathbf{RQ} \times \mathbf{M}| = \sqrt{(bx_1-bh-ay_1+ak)^2} =$

$= |bx_1-bh-ay_1+ak| =$

$= |bh-ak+ay_1-bx_1| = |Ah+Bk+C|$

Como $|\mathbf{M}| = \sqrt{a^2+b^2+0^2} = \sqrt{B^2+A^2} = \sqrt{A^2+B^2}$ se tiene:

$$d(R, L) = |\mathbf{RQ} \times \mathbf{M}| / |\mathbf{M}| = \frac{|Ah + Bk + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

La cual es precisamente, la conocida fórmula de la distan - cia de un punto R(h, k) a una recta L: Ax + By + C = 0.

Para terminar, se plantea el ejemplo siguiente:

Sea
$$L: \begin{aligned} x &= -3 + 6t \\ y &= 4 - 2t \\ z &= 5 + 3t \end{aligned} \qquad \text{y el punto } R(7, -1, 4)$$

El punto Q(-3, 4, 5) está en L y **M** = (6, -2, 3) es un vector direccional de L.

Ahora, **RQ** = (-3 - 7, 4 + 1, 5 - 4) = (-10, 5, 1)

$$RQ \times M = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -10 & 5 & 1 \\ 6 & -2 & 3 \end{vmatrix} = (15+2)i - (-30-6)j + (20-30)k$$
$$= (17,\ 36,\ -10)$$

$$|RQ \times M| = \sqrt{17^2 + 36^2 + (-10)^2} = \sqrt{1.685}$$
$$|M| = \sqrt{36 + 4 + 9} = \sqrt{49} = 7$$

Así, $d(R, L) = \sqrt{1.685}/7$.
Hallamos ahora otro punto de la recta.

Para $t = 1$, se tiene $x = 3$, $y = 2$, $z = 8$; entonces $P(3, 2, 8)$ está en L y $RP = (3-7,\ 2+1,\ 8=4) = (-4,\ 3,\ 4)$

$$RP \times M = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & 3 & 4 \\ 6 & -2 & 3 \end{vmatrix} = (9+8)i - (-12-24)j + (8-18)k$$
$$= (17,\ 36,\ -10) = RQ \times M$$

Entonces, $d(R, L) = |RP \times M| \ / \ |M| = \sqrt{1.685}\ /7$

Tómese otro vector direccional **M'** de L y compruebe que

$$|RP \times M'| \ / \ |M'| = \sqrt{1.685}\ /7 .$$

Finalmente, cabe anotar que en (**), P es un punto cualquiera y Q un punto fijo en L, **M** un vector direccional y R un punto arbitrario en el espacio. En consecuencia, esta igualdad es la ecuación de L, la cual se la puede reducir reemplazando R por Q así:

$QP \times M = QQ \times M = 0$: ecuación de L que pasa por Q y $M \parallel L$.

Para Q(-3, 4, 5), **M** = (6, -2, 3) se tiene que para todo punto P(x, y, z) de L, **QP** = (x+3, y-4, z-5) y

$$\mathbf{QP} \times \mathbf{M} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x+3 & y-4 & z-5 \\ 6 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0 ,$$ ecuación en determinante de L.

De lo anterior, (3y + 2z - 22, -3x+6z-39, -2x-6y+18) = 0

de donde: 3y+2z = 22, x-2z = -13, x+3y = 9.

De la segunda y tercera igualdad se obtiene la primera; luego de las dos últimas: x+3 = 2(z - 5), x+3 = -3(y-4).

Así: $$\frac{x + 3}{6} = \frac{y - 4}{-2} = \frac{z - 5}{3}$$

las cuales son las ecuaciones simétricas de L. Igualando a un real t, se obtienen las ecuaciones paramétricas de la recta, la cual se la consideró en el ejemplo dado.