EL PROBLEMA DE LOS SIETE SIETES

Saulo Mosquera López

Las siguientes páginas presentan un curioso problema de Aritmética Elemental, el cual fue propuesto por el matemático inglés E. H. Berwick y fue publicado en 1906 en la revista *"The School Word"*.

La versión que aquí se presenta fue extractada del texto "100 GREAT PROBLEMS OF ELEMENTARY MATHEMATICS".

Se presentan dos soluciones al problema; la primera fue realizada por el autor de esta nota y la segunda es una traducción libre de aquella que aparece en el mencionado libro. Espero que para Ud. las dos soluciones sean esencialmente diferentes. Como es natural en la actualidad la solución de estos problemas, sólo tiene interés como entretenimiento, así espero, que para Ud. lo sea y que por tanto dedique unos minutos de su tiempo para intentar resolverlo antes de "leer" las soluciones.

"El problema de los siete sietes" consiste en lo siguiente:

En la siguiente división, en la cual el divisor divide al dividendo:

```
* * 7 * * * * * * *  | * * * * 7 *   ..... 1ª línea
                     |------------
* * * * * *          | * * 7 * *   ....... 2ª línea
-----------
* * * * * 7 *  ......................... 3ª línea
* * * * * * *  ......................... 4ª línea
-------------
    * 7 * * * *  ....................... 5ª línea
    * 7 * * * *  ....................... 6ª línea
    * * * * * * *  ..................... 7ª línea
    * * * * 7 * *  ..................... 8ª línea
        * * * * *  ..................... 9ª línea
        * * * * *
```

Los números que ocupaban los lugares marcados con un asterisco (*) fueron borrados accidentalmente. Puede Ud. recuperar dichos números ?.

<u>Primera</u> <u>solución</u>

Si asignamos una letra o símbolo a cada cifra faltante, tenemos que la división se puede expresar de la siguiente manera:

```
A B 7 C D E L Q W C'  | α β Γ δ 7 ε
                      |------------
a b σ c d e           | k τ 7 μ φ
-----------
F G H I J 7 L
f g h i j • l
-------------
    M 7 N O P Q
    m 7 n o p q
    -----------
    R S T U Ł V W
    r s t u 7 v w
    -------------
        X Y Z A'B'C'
        X Y Z A'B'C'
        ------------
```

y se tiene que:

1. Al efectuar la multiplicación de la tercera cifra en el cociente (el 7) por el divisor, se obtiene un número de 6 cifras y dado que la segunda cifra de este producto es 7, se sigue que necesariamente $\alpha\beta$ debe ser 11, 12 ó 13 y por tanto τ y μ deben ser 8 ó 9.

2. Teniendo en cuenta nuevamente que la segunda cifra del mismo producto es 7, se obtiene, estudiando todas las posibilidades, que Γ debe ser 1, 4, 5, 8, 9 y de estas resulta que $\alpha\beta\Gamma$ es 111, 124, 125, 138 ó 139.

3. Dado que el divisor empieza por 11, 12 ó 13 entonces el residuo RST... debe empezar por 10, 11 ó 12. El 7 de m7n... obliga a que RS sea 10 y así rs también es 10; esto implica a su vez que como μ es 8 ó 9 entonces sólo se puede tener $\alpha\beta\Gamma = 111$ para $\mu = 9$ y $\alpha\beta\Gamma = 125$ para $\mu = 8$.

4. Si ocurre que $\mu = 9$ entonces $\alpha\beta\Gamma = 111$, luego $\delta = 9$ y el divisor sería 11197ϵ y por tanto en la línea m7n... se tendría m8n... lo cual no puede ser; así se tiene que $\mu = 8$ y $\alpha\beta\Gamma = 125$, esto produce que $\delta = 8$ ó $\delta = 4$; pero $\delta = 8$ lleva también a que en la línea m7n... se tenga m8n... (absurdo). Luego $\delta = 4$ y así $\alpha\beta\Gamma\delta 7\epsilon = 12547\epsilon$.

En este paso la división tendría la siguiente apariencia:

```
A B 7 C D E L Q W C'  | 1 2 5 4 7 ε
                      |------------
a b σ c d e           | k τ 7 8 φ
-----------
F G H I J 7 L
f g h i j m l
-------------
    M 7 N O P Q
    8 7 8 o p q
    -----------
    1 0 T U Ł V W
    1 0 0 3 7 v w
    -------------
        X Y Z A'B'C'
        X Y Z A'B'C'
        ------------
```

5. La línea 878... dice que la línea M7N... es 978... ó 979..., pero 978... conduce a que la X en la 9ª línea sea 0, lo cual no puede ser. Luego M7N... es 979..., $T = 1$ y así $X = 1$ y como XYZA'B'C' tiene 6 cifras se sigue que $\phi = 1$.

6. El 7 de 10037vw lleva a que ϵ debe ser 0, 1, 2, 3 ó 4. Efectuando la división de atrás hacia adelante y teniendo en cuenta que $\tau = 8$ ó $\tau = 9$ resulta que el estudio de los casos $\epsilon = 0, 1, 2, 4$ conduce a que en la línea FGHIJ7L se tendría en el lugar del 7 las cifras 5, 1, 6, 8 (para $\tau = 8$) y 2, 3, 4, 6 para ($\tau=9$) lo cual es claramente una contradicción. Para $\epsilon = 3$ resulta en el mismo lugar, 5 para $\tau = 9$ lo que es absurdo.

7. La posibilidad restante $\epsilon = 3$, $\tau = 8$ es compatible con las condiciones del problema y la división queda así:

```
A B 7 C D E 8 4 1 3 | 1 2 5 4 7 3
a b ø c d e         | k 8 7 8 1
1 1 0 1 7 7 8
1 0 0 3 7 8 4
    9 7 9 9 4 4
    8 7 8 3 1 1
    1 0 1 6 3 3 1
    1 0 0 3 7 8 4
        1 2 5 4 7 3
        1 2 5 4 7 3
```

8. El valor de k debe ser tal que $1 \leq k \leq 9$ y que al sumar 110177 con el producto kx125473 se obtenga en el tercer lugar de la primera línea un 7. El único valor de k que hace esto es 5. Continuando con el proceso de división de atrás hacia adelante se obtiene

```
7 3 7 5 4 2 8 4 1 3 | 1 2 5 4 7 3
6 2 7 3 6 5         | 5 8 7 8 1
1 1 0 1 7 7 8
1 0 0 3 7 8 4
    9 7 9 9 4 4
    8 7 8 3 1 1
    1 0 1 6 3 3 1
    1 0 0 3 7 8 4
        1 2 5 4 7 3
        1 2 5 4 7 3
```

la cual es la solución del problema.

Segunda solución

Como en la sección anterior se asigna una letra o símbolo a cada cifra faltante. Se tiene entonces:

1. La primera cifra (α) del divisor d' debe ser 1, puesto que 7xd', de la sexta línea sólo tiene 6 cifras. Si por lo menos α fuese 2 el producto 7xd' tendría 7 cifras.

   Puesto que el residuo en la 3ª y 6ª líneas tienen 6 cifras, tanto F como R deben ser 1, de lo cual resulta que r y f también son iguales a 1.

   Como d' no puede ser mayor que 199979, el máximo valor de μ es 9, y así el producto en la 8ª línea es a lo más 1799811 y s < 8. Puesto que S únicamente puede ser 9 ó 0, y que en la 9ª línea no existe residuo debajo de S, resulta que S = 0 y así s = 0. Se sigue también de R = 1 y S = 0 que M = m+1, esto es m $\leq$ 8 y el producto 7xd' de la 6ª línea no puede ser superior a 87nopq.

2. Los únicos posibles valores para la segunda cifra del divisor (β) son 0, 1 y 2 (7x130000 ya que es mayor que 900000). El valor β = 0 se elimina ya que cuando se multiplica 109979 por 9 resulta todavía un número de 6 cifras, y no, uno de siete, como por ejemplo, se necesita en la 8ª línea.

   Consideremos el caso β = 1. Este obliga que Γ sea únicamente 0 ó 1, ya que si $\Gamma \geq 2$ entonces para calcular la segunda cifra de la 6ª línea se tendría que sumar 7xβ = 7x1 = 7 con el producto 7x$\Gamma \geq$ 1, lo cual no daría 7, como lo requiere esa línea.

   El valor Γ = 0 es imposible, puesto que aún con un 9 en el cociente, el producto 9x110979 no tendría siete cifras como se debe obtener en la 8ª línea. Si suponemos que Γ = 1, entonces una mirada a la línea 8ª nos muestra que δ, ϵ, μ deben escogerse de modo que μx111δ7ϵ sea un número de siete cifras, la tercera de las cuales de derecha a izquierda sea 7. El único valor que produce esto es μ = 9 (incluso 8x111979 tiene seis cifras). La tercera cifra de 9x111δ7ϵ partiendo de la derecha puede ser 7 sólo si δ = 0 ó δ = 9. En el primer caso la línea 8ª no tendría siete cifras aún cuando en el cociente se tuviera 9 y en el divisor 111079. En el segundo caso la 6ª línea es 7x11197* = 783***, lo cual es imposible, por lo tanto el caso Γ = 1 no puede darse y así β = 1 debe ser descartado. En definitiva se tiene entonces que β = 2. Esto implica que m = 8 y M = 9.

3. La tercera cifra Γ del divisor puede ser únicamente 4 ó 5, puesto que 7x126000 es mayor y 7x124000 es menor que el número de la línea 6ª y como 9x124000 es mayor y 7x126000 es menor que el número en la 8ª línea (10tu7vw) entonces μ debe ser 8.

   Si Γ = 4 entonces como 8x124979 = 999832 < 1000000 la línea 8ª no tendría siete cifras, luego Γ debe ser 5.

4. Dado que en el producto 8x125δ7ϵ la tercera cifra de la derecha a izquierda debe ser 7, se sigue que δ debe ser 4 ó 9; δ = 9 se puede eliminar debido a que el producto 7x125970 = 881790 es mayor que el número de la 6ª línea. Por tanto δ = 4 y se deduce también que ϵ no puede ser mayor que 4. Para cualquiera de estas escogencias se tiene en la 6ª línea que 7x12547ϵ = 878*** y así n = 8. Análogamente en la 8ª línea obtenemos 8x12547ϵ = 10037*** y por tanto t = 0 y μ = 3. Puesto que τxd′ = τx12547ϵ debe ser un número de siete cifras se obtiene que τ = 8 ó τ = 9.

5. De t = 0, R = r = 1, S = s = 0 y X $\geq$ 1 se sigue que T $\geq$ 1 y de n = 8, N $\leq$ 9 se tiene que T $\leq$ 1, luego T = 1 y por tanto N = 9 y X = 1. Como 2xδ′ > 200000 y en la línea 9ª, X = 1 se sigue que ϕ = 1 y por tanto Y = 2, Z = 5, A′ = 4, B′ = 7 y C′ = ϵ.

   Con los resultados obtenidos hasta aquí el problema tiene la siguiente forma:

```
A B 7 C D E L Q W ε  | 1 2 5 4 7 ε
                     |------------
a b σ c d e          | k τ 7 8 1
-----------
1 G H I J 7 L
1 g h i j • 1
-------------
    9 7 9 0 P Q
    8 7 8 o p q
    -----------
    1 0 1 U Ł V W
    1 0 0 3 7 v w
    -------------
        1 2 5 4 7 ε
        1 2 5 4 7 ε
        -----------
```

6. Como ϵ es uno de los números 0, 1, 2, 3, 4, se sigue que para cada caso esto corresponde en su orden a las series

vw = 60, 68, 76, 84, 92

Opq = 290, 297, 304, 311, 318

y dependiendo de que τ sea igual a 8 ó 9 se tiene que

▪l = 60, 68, 76, 84, 92

ó

▪l = 30, 39, 48, 57, 66

Esto presenta 10 posibilidades. Reconstruyendo la división hacia adelante y probando cada una de ellas se obtiene que únicamente cuando ϵ = 3 y τ = 8 se satisface el requisito del 7 en la 3ª línea. En este caso vw = 84, ULVW = 6331 opq = 311, OPQ = 944, ghij▪l = 003784 y GHIJ7L = 101778 y la división queda como en el paso 7. de la solución anterior.

7. El último paso es idéntico al paso 8. de la primera solución.

BIBLIOGRAFIA

[1]. DORRIE, H. "100 GREAT PROBLEMS OF ELEMENTARY MATHEMATICS". Dover Publications, Inc. New York, 1965.