EL GRUPO DE LAS TRANSFORMACIONES DEL TRIANGULO EQUILATERO

Erdulfo Ortega Patiño

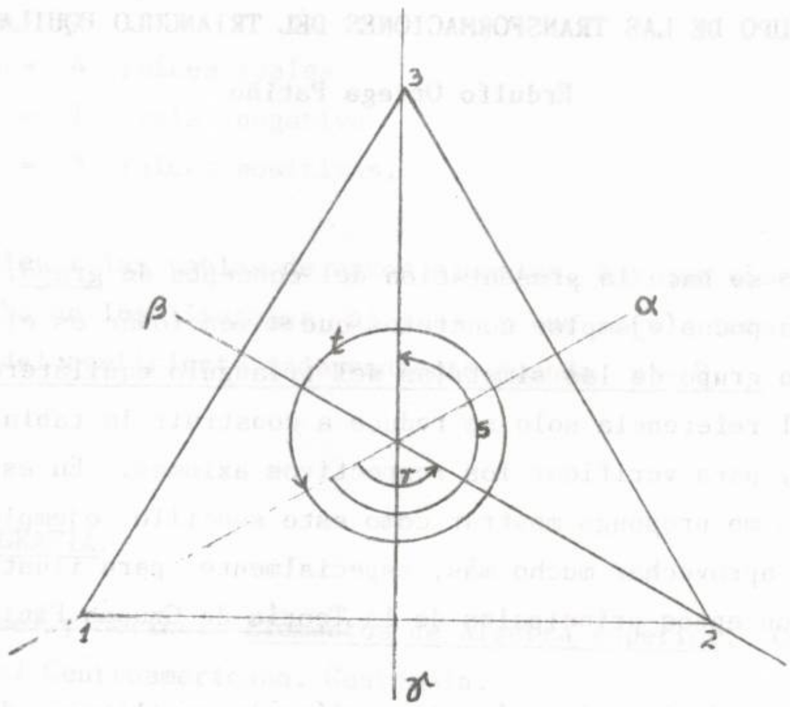
Cuando se hace la presentación del concepto de grupo, uno de los pocos ejemplos concretos que se mencionan es el denominado grupo de las simetrías del triángulo equilátero; pero tal referencia solo se reduce a construir la tabla de Cayley para verificar los respectivos axiomas. En este artículo me propongo mostrar como este sencillo ejemplo se puede aprovechar mucho más, especialmente para ilustrar los conceptos principales de la Teoría de Grupos Finitos.

El grupo de las simetrías del triángulo equilátero, denotado D_3 o S_3, es el caso particular más simple de la familia de los grupos de las simetrías de un polígono regular de n lados denominados grupos dihédricos o dihedrales: D_n, $(n \geq 3)$.

Podemos interpretar las simetrías de una figura como transformaciones sobre sí mismas. Así por ejemplo, el triángulo equilátero tiene simetría rotacional. Esto significa que puede llevarse a coincidir consigo mismo, sin deformarse, por medio de los siguientes movimientos:

r: rotación de $2\pi/3$ radianes o 120º en el sentido contrario de las agujas del reloj, alrededor de su centro de gravedad.

$$1 \xrightarrow{r} 2 \quad , \quad 2 \xrightarrow{r} 3 \quad , \quad 3 \xrightarrow{r} 1$$

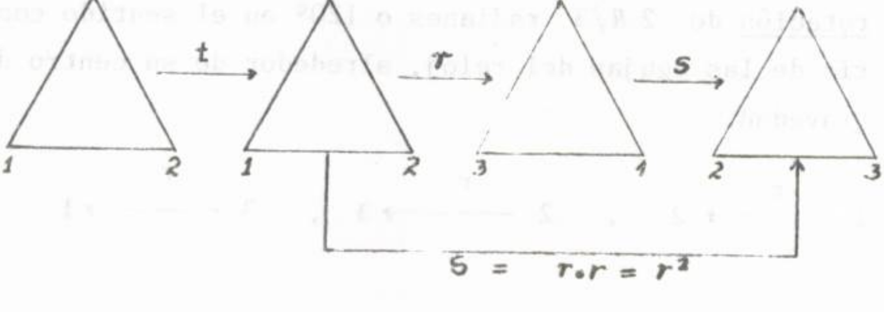


$S = ror = r^2$: rotación de $4\pi/3$ radianes o 240º alrededor de su centro de gravedad.

$1 \xrightarrow{S} 3 \quad , \quad 2 \xrightarrow{S} 1 \quad , \quad 3 \xrightarrow{S} 2$

t: rotación de 2π o 0 radianes o 360º o 0º (análogamente)

$1 \xrightarrow{t} 1 \quad , \quad 2 \xrightarrow{t} 2 \quad , \quad 3 \xrightarrow{t} 3$



Además, el triángulo equilátero tiene <u>simetría axial.</u> Los tres ejes de simetría son las alturas o mediatrices que pa - san por cada vértice. Es decir, el triángulo equilátero coincide consigo mismo <u>al reflejarse</u>, en su plano, de la siguiente manera:

u: <u>reflexión</u> en la recta α que pasa por el vértice 1. (Deja fijo el vértice 1).

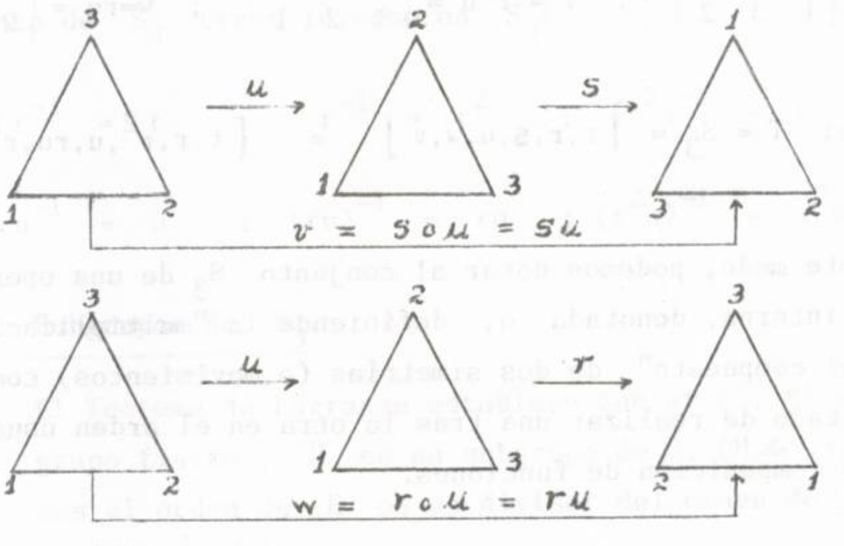
$$1 \xmapsto{u} 1 \quad , \quad 2 \xmapsto{u} 3 \quad , \quad 3 \xmapsto{u} 2$$

v: <u>reflexión</u> en la recta β que pasa por el vértice 2. (Deja fijo el vértice 2).

$$1 \xmapsto{v} 3 \quad , \quad 2 \xmapsto{v} 2 \quad , \quad 3 \xmapsto{v} 1$$

w: <u>reflexión</u> en la recta γ que pasa por el vértice 3. (Deja fijo el vértice 3).

$$1 \xmapsto{w} 2 \quad , \quad 2 \xmapsto{w} 1 \quad , \quad 3 \xmapsto{w} 3$$



Así queda determinado el conjunto T = $\{r, s, t, u, v, w\}$.

Puesto que las <u>rotaciones</u> y las <u>reflexiones</u> del triángulo equilátero envían vértices sobre vértices, cualquier elemento del conjunto T está perfectamente identificado por su efecto sobre los vértices. Por lo tanto podemos representar cada elemento de T mediante un elemento de S_3, donde:

$$S_3 = \{f : A \longrightarrow A / f \text{ es biyección}\} \quad y \quad A = \{1, 2, 3\}$$

ROTACIONES

$$t = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad ; \quad r = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \quad ; \quad s = r^2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

REFLEXIONES

$$u = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \quad ; \quad v = r^2 u = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad ; \quad w = ru = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Luego: $T = S_3 = \{t, r, s, u, w, v\} = \{t, r, r^2, u, ru, r^2u\}$

De este modo, podemos dotar al conjunto S_3 de una operación interna, denotada o, definiendo la "multiplicación" o "el compuesto" de dos simetrías (o movimientos) como el resultado de realizar una tras la otra en el orden usual de la composición de funciones.

Los correspondientes resultados los expresamos por medio de la siguiente Tabla de Cayley.

o	t	r	r^2	u	ru	r^2u
t	t	r	r^2	u	ru	r^2u
r	r	r^2	t	ru	r^2u	u
r^2	r^2	t	r	r^2u	u	ru
u	u	r^2u	ru	t	r^2	r
ru	ru	u	r^2u	r	t	r^2
r^2u	r^2u	ru	u	r^2	r	r

El lector, fácilmente, puede verificar que (S_3, o) es un grupo.

Por ejemplo, según la tabla, podemos comprobar que cada elemento de S_3 tiene inverso en S_3:

$$t^{-1} = t \quad ; \quad r^{-1} = r^2 \quad ; \quad (r^2)^{-1} = r$$

$$u^{-1} = u \quad ; \quad (ru)^{-1} = ru \quad ; \quad (r^2u)^{-1} = r^2u$$

I. Subgrupos de S_3.

El Teorema de Lagrange establece que si $(G, *)$ es un grupo finito y H es un subgrupo de G, $(H \leq G)$, entonces el orden de H es un divisor del orden de G. $(\ |H| \ \big| \ |G|\ )$.

Como $|S_3| = 6$ y los divisores de 6 son: 1, 2, 3, 6, entonces, los subgrupos de S_3, si existen, serán de orden: 1, 2, 3, 6.

1. **Los subgrupos triviales o impropios** son: $\{t\}$ y S_3 ; con $|\{t\}| = 1$ y $|S_3| = 6$.

2. **Los subgrupos de orden 2** deben tener una tabla de operación en la cual estará el elemento identidad t y el otro elemento del subgrupo, "x", debe satisfa - cer la condición:

$x^{|H|} = x^2 = t$, donde H es el posible subgrupo.

Los elementos que la satisfacen son: u, ru y r^2u, pues:

$$u^2 = (ru)^2 = (r^2u)^2 = t$$

Las tablas para estos subgrupos son:

o	t	u
t	t	u
u	u	t

o	t	ru
t	t	ru
ru	ru	t

o	t	r^2u
t	t	r^2u
r^2u	r^2u	t

Entonces, los subgrupos de orden 2 son:

$H_1 = \{t, u\}$; $H_2 = \{t, ru\}$; $H_3 = \{t, r^2u\}$

Además, $H_1 = \langle u \rangle$; $H_2 = \langle ru \rangle$; $H_3 = \langle r^2u \rangle$

Esto es, son cíclicos por tener orden 2.

3. <u>Subgrupos de orden 3</u>. Para estos posibles subgrupos los elementos de la tabla de operación serán: t, x, y tales que:

$$x^{|H|} = x^3 = t = y^{|H|} = y^3, \qquad (H \leq S_3)$$

Veamos:

$$\begin{aligned}
u^3 &= u^2u &&= tu &&= u \neq t\\
(ru)^3 &= (ru)^2ru &&= t(ru) &&= ru \neq t\\
(r^2u)^3 &= (r^2u)^2r^2u &&= t(r^2u) &&= r^2u \neq t\\
r^3 &= r^2r &&= t\\
(r^2)^3 &= (r^2)^2r^2 &&= rr^2 &&= t
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el único subgrupo de orden 3 es:

$H_4 = \{ t, r, r^2 \}$, o sea el grupo de las <u>rotaciones</u>.

Hemos señalado la tabla de operación para este subgrupo en la parte superior izquierda de la tabla de S_3.

4. **Orden de los elementos de S_3.**

$$|u| = |ru| = |r^2u| = 2 \ ; \quad |r| = |r^2| = 3$$

5. **<u>Conjunto de generadores</u>.**

En S_3 no existe un elemento x tal que:

$$S_3 = \langle x \rangle = \{ x^k \ / \ k \in \mathbb{Z} \}$$

Esto significa que S_3 no es un grupo cíclico.

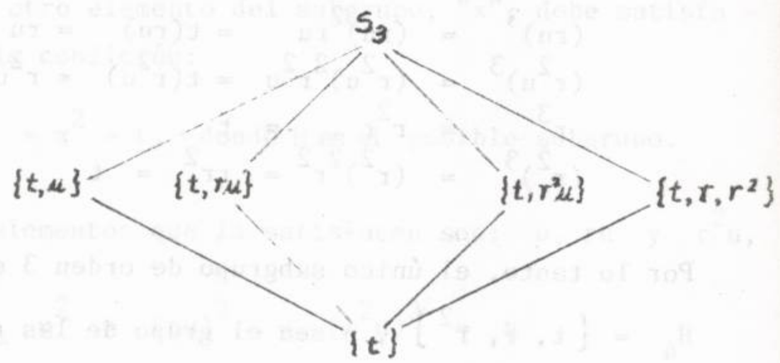
Para los subgrupos de S_3 tenemos que:

$H_1 = \{t, u\} = \langle u \rangle$; $H_2 = \{t, ru\} = \langle ru \rangle$

$H_3 = \{t, r^2u\} = \langle r^2u \rangle$; $H_4 = \{t, r, r^2\} = \langle r \rangle = \langle r^2 \rangle$

O sea que: H_1, H_2, H_3, H_4 son subgrupos cíclicos de S_3.

6. **Diagrama de Subgrupos.**



II. Subgrupos Normales.

Recordemos que si H_k es subgrupo de S_3, $(H_k \leq S_3)$, entonces H_k es <u>subgrupo normal</u> de S_3, $(H_k \trianglelefteq S_3)$, si y solo si:

$$H_k x = xH_k, \quad \text{para todo } x \in S_3, \quad \text{donde:}$$

$H_k x = \{ hx \;/\; h \in H_k,\; x \in S_3 \}$ es la clase lateral a derecha, y

$xH_k = \{ xh \;/\; h \in H_k,\; x \in S_3 \}$ es la clase lateral a izquierda.

1) Para $H_1 = \{t, u\} \leq S_3$, tenemos que existe $r \in S_3$ tal que: $H_1 r \neq rH_1$, pues:

$$H_1r = \{tr,\ ur\} = \{r, r^2u\} \neq \{r,\ ru\} =$$

$$= \{rt,\ ru\} = rH_1$$

Luego H_1 no es subgrupo normal de S_3.

2) Para $H_2 = \{t,\ ru\} \leq S_3$:

$$H_2r = \{tr,\ rur\} = \{r,\ u\} \neq \{r,\ r^2u\} =$$

$$= \{rt,\ rru\} = rH_2$$

Es decir, H_2 no es subgrupo normal de S_3.

3) Para $H_3 = \{t,\ r^2u\} \leq S_3$

$$H_3r = \{r,\ ru\} \neq \{r,\ u\} = rH_3.$$

Entonces, H_3 no es subgrupo normal de S_3.

4) Ahora, sea $H_4 = \{t,\ r,\ r^2\} \leq S_3$.

Vemos que: $H_4t = tH_4$; $H_4r = rH_4$; $H_4r^2 = r^2H_4$

$H_4u = uH_4$; $H_4(ru) = (ru)H_4$; $H_4(r^2u) = (r^2u)H_4$

Es decir, para todo $x \in S_3$: $H_4x = xH_4$. Por lo tanto H_4 es subgrupo normal de S_3. ($H_4 \trianglelefteq S_3$).

Nota: Este resultado también se obtiene aplicando el Teorema de Lagrange, puesto que siendo S_3 grupo finito y $H_4 \leq S_3$, donde $|S_3| = 6$, y, $|H_4| = 3$, entonces:

$\left|S_3\right| = \left[S_3 : H_4\right] \; \left|H_4\right|$, esto es, $\left[S_3 : H_4\right] = 2$, (el índice de H_4 en S_3)

Luego: $H_4 \trianglelefteq S_3$.

5) Por otra parte, trivialmente, se tiene que:

$\{t\} \trianglelefteq S_3$, $\quad S_3 \trianglelefteq S_3$.

Como hemos observado, los subgrupos normales determinan sobre el Grupo la misma partición por congruencia a izquierda y a derecha. Estos subgrupos son importantes para determinar tanto la estructura del grupo como la naturaleza de los homomorfismos de grupo.

III. GRUPOS COCIENTE DE S_3.

Puesto que $H_4 \trianglelefteq S_3$; $\{t\} \trianglelefteq S_3$ y $S_3 \trianglelefteq S_3$, los respectivos grupos cocientes son:

a) $(S_3/H_4, \text{o})$, donde:

$S_3/H_4 = \{H_4, \{u, ru, r^2u\}\} =$
$= \{H_4, H_4'\}$

o	H_4	H_4'
H_4	H_4	H_4'
H_4'	H_4'	H_4

La operación "o" se define por la Tabla de Cayley.

b) $(S_3/\{t\}, \text{o})$, donde:

$S_3/\{t\} = \{\{t\}, \{r\}, \{r^2\}, \{u\}, \{ru\}, \{r^2u\}\}$

La Tabla de Cayley para este grupo es análoga a la de (S_3, o), teniendo en cuenta la característica especial de sus elementos. Los grupos $S_3/\{t\}$ y S_3 son isomorfos.

c) $(S_3/S_3, o)$, donde $S_3/S_3 = \{S_3\}$, y,

o	S_3
S_3	S_3

IV. Epimorfismos e Imágenes Homomórficas de S_3.

Sabemos que dados dos grupos G y $\overline{G}$, un epimorfismo $f: G \longrightarrow \overline{G}$ es un homomorfismo sobreyectivo. En este caso $\overline{G}$ se llama imagen homomórfica de G.

Dado que los grupos cocientes de S_3 son:

$$S_3/\{t\} \quad ; \quad S_3/H_4 \quad ; \quad S_3/S_3$$

entonces definimos los epimorfismos canónicos:

a) $j: S_3 \twoheadrightarrow S_3/\{t\}$; b) $j: S_3 \twoheadrightarrow S_3/H_4$;

$x \longmapsto \{t\}x$ $\qquad\qquad$ $x \longmapsto H_4 x$

c) $j: S_3 \twoheadrightarrow S_3/S_3$

$x \longmapsto S_3 x$

para todo $x \in S_3$.

Luego el conjunto de imágenes homomórficas de S_3 es:

$$\mathscr{I}(S_3) = \{ S_3/\{t\} \ , \ S_3/H_4 \ , \ S_3/S_3 \}$$

O sea que, en este caso, el conjunto de las imágenes homomórficas de S_3 coincide con el conjunto de los grupos cocientes de S_3.

V. Automorfismos de S_3.

Un automorfismo de S_3 es un isomorfismo de S_3 en S_3. Puesto que cualquier elemento de S_3 lo podemos expresar en términos de una rotación r y de una reflexión u, para determinar los automorfismos de S_3 debemos identificar las imágenes que bajo tales automorfismos deben corresponder a r y a u. Entonces debemos tener en cuenta que si $F: S_3 \longrightarrow S_3$ es automorfismo, entonces:

a) $|x| = |F(x)|$, para todo $x \in S_3$; b) $F(t) = t$.

Así: $|r| = 3 \Longrightarrow |F(r)| = 3 \Longrightarrow F(r) = r \Longrightarrow r \longmapsto r$

También: $|r^2| = 3 \Longrightarrow F(r) = r^2 \Longrightarrow r \longmapsto r^2$.

De tal manera que las únicas imágenes posibles para r bajo automorfismos son r y r^2.

Ahora, como:

$|u| = |ru| = |r^2u| = 2$ y $F(t) = t$,

las únicas posibles imágenes para u son: u, ru, r^2u, esto es:

$$u \longmapsto u \quad ; \quad u \longmapsto ru \quad ; \quad u \longmapsto r^2u$$

Convenimos en identificar los automorfismos así:

$$F_{r,u} = \begin{pmatrix} t & r & r^2 & u & ru & r^2u \\ t & r & r^2 & u & ru & r^2u \end{pmatrix}$$

$$F_{r,ru} = \begin{pmatrix} t & r & r^2 & u & ru & r^2u \\ t & r & r^2 & ru & r^2u & u \end{pmatrix}$$

Ejemplo: $F_{r,ru}(r^2u) = F_{r,ru}(r^2)F_{r,ru}(u) = \left[F_{r,ru}(r)\right]^2 F_{r,ru}(u)$

$$= r^2\, ru = u$$

$$F_{r,r^2u} = \begin{pmatrix} t & r & r^2 & u & ru & r^2u \\ t & r & r^2 & r^2u & u & ru \end{pmatrix}$$

$$F_{r^2,u} = \begin{pmatrix} t & r & r^2 & u & ru & r^2u \\ t & r^2 & r & u & r^2u & ru \end{pmatrix}$$

$$F_{r^2,ru} = \begin{pmatrix} t & r & r^2 & u & ru & r^2u \\ t & r^2 & r & ru & u & r^2u \end{pmatrix}$$

$$F_{r^2,r^2u} = \begin{pmatrix} t & r & r^2 & u & ru & r^2u \\ t & r^2 & r & r^2u & ru & u \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$F_{r^2,r^2u}(ru) = F_{r^2,r^2u}(r)\, F_{r^2,r^2u}(u) = (r^2)(r^2u) = ru.$$

VI. **Autormorfismos interiores.**

Si $h \in S_3$, la función: $F_h : S_3 \to S_3$

$$x \mapsto F_h(x) = hxh^{-1} \quad ,$$

para todo $x \in S_3$, es el automorfismo interior correspondiente a h. Denotemos:

$(A(S_3), o)$: el grupo de los automorfismos de S_3

$(I(S_3), o)$: el subgrupo de los automorfismos interiores de S_3.

Es decir: $I(S_3) \leq A(S_3)$

Puesto que el grupo dihédrido D_n, $(n \geq 3)$ tiene $2n$ automorfismos interiores si n es impar y n automorfismos interiores si n es par, entonces $D_3 = S_3$ tiene $2 \times 3 = 6$ automorfismos interiores. Esto significa que $I(S_3) = A(S_3)$. (Se puede verificar utilizando la definición). Luego:

$$I(S_3) = \{ F_t, F_r, F_{r^2}, F_u, F_{ru}, F_{r^2u} \}$$

Ahora, si convenimos en definir:

$$(F_h) \Delta (x) = F_h(x) = hxh^{-1}$$

entonces podemos representar en forma explícita al conjunto $I(S_3)$ mediante el siguiente "arreglo" a manera de tabla de Cayley:

$\triangle$	t	r	r^2	u	ru	r^2u
F_t	t	r	r^2	u	ru	r^2u
F_r	t	r	r^2	r^2u	u	ru
F_{r^2}	t	r	r^2	ru	r^2u	u
F_u	t	r^2	r	u	r^2u	ru
F_{ru}	t	r^2	r	r^2u	ru	u
F_{r^2u}	t	r^2	r	ru	u	r^2u

O sea que cada F_h es la permutación de los elementos de S_3 correspondiente al elemento dado $h \in S_3$.

Por ejemplo:

$$(F_r) \triangle (ru) = F_r(ru) = r(ru)r^{-1} = (r^2u)r^2 = u.$$

Así:

$$F_r = \begin{pmatrix} t & r & r^2 & u & ru & r^2u \\ t & r & r^2 & r^2u & u & ru \end{pmatrix}$$

$$= (u,\ r^2u,\ ru) = F_{r,r^2u} \in A(S_3).$$

VIII. El centro de S_3.

El centro de S_3 se denota $Z(S_3)$ y se define como:

$$Z(S_3) = \left\{ x \in S_3 / hx = xh, \text{ para todo } h \in S_3 \right\}$$

Verificando esta definición con cada uno de los elementos de S_3 vemos que $t \in Z(S_3)$, sin embargo para $h \in S_3$, $h \neq t$, tal condición no se cumple, por lo tanto:

$Z(S_3) = \{ t \}$.

Los grupos: $S_3/Z(S_3)$; $I(S_3)$ son isomorfos puesto que la

función: $\phi : S_3/\{t\} \dashrightarrow I(S_3)$ es isomorfismo, como

$$\{h\} \mapsto F_h$$

es fácil verificarlo.

También se puede verificar que para todo $F_h \in A(S_3)$:

$F_h(t) = t$, así que:

$$Ker(F_h) = \{ t \} .$$

VIII. El Teorema de Cayley.

Sea B un conjunto no vacío cualquiera. El conjunto $S_B = S(B) = \{ h: B \dashrightarrow B /\ h \text{ es una biyección} \}$ es un grupo con la operación composición de funciones "o". El grupo (S(B), o) es llamado grupo simétrico o grupo de permutaciones de B.

Cuando $B = \{1, 2, \ldots, n\}$, el grupo S_B se denota S_n y un elemento π de S_n por

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \ldots & \pi(n) \end{pmatrix}$$

El Teorema de Cayley establece que: "Todo grupo G es isomorfo a un subgrupo de S(G)"

Para $G = S_3$ denotaremos con S_3' a tal subgrupo. Esto es, $S_3' \leq S(S_3)$.

Si $\sigma \in S_3$, definimos $F_\sigma : S_3 \longrightarrow S_3$

$$x \longmapsto F_\sigma(x) = \sigma x$$

y $S_3' = \{ F_\sigma \ / \ \sigma \in S_3 \} \subset S(S_3)$.

De modo que: $\phi : S_3 \longrightarrow S_3'$ es isomorfismo.

$$\sigma \longmapsto F_\sigma$$

Ejemplo. Si $\sigma = r^2 \in S_3$, entonces:

$F_{r^2}(t) = r^2 t = r^2$; $F_{r^2}(r) = r^2 r = t$

$F_{r^2}(u) = r^2 u = r^2 u$; $F_{r^2}(r^2) = r^2 r^2 = r$

$F_{r^2}(ru) = r^2 ru = u$; $F_{r^2}(r^2 u) = r^2 r^2 u = ru$

De esta manera obtenemos las permutaciones o elementos de S_3' :

$$F_t = \begin{pmatrix} t & r & r^2 & u & ru & r^2u \\ t & r & r^2 & u & ru & r^2u \end{pmatrix}$$

$$F_r = \begin{pmatrix} t & r & r^2 & u & ru & r^2u \\ r & r^2 & t & ru & r^2u & u \end{pmatrix}$$

$$F_{r^2} = \begin{pmatrix} t & r & r^2 & u & ru & r^2u \\ r^2 & t & r & r^2u & u & ru \end{pmatrix}$$

$$F_u = \begin{pmatrix} t & r & r^2 & u & ru & r^2u \\ u & r^2u & ru & t & r^2 & r \end{pmatrix}$$

$$F_{ru} = \begin{pmatrix} t & r & r^2 & u & ru & r^2u \\ ru & u & r^2u & r & t & r^2 \end{pmatrix}$$

$$F_{r^2u} = \begin{pmatrix} t & r & r^2 & u & ru & r^2u \\ r^2u & ru & u & r^2 & r & t \end{pmatrix}$$

O sea: $S_3 = \{ t, r, r^2, u, ru, r^2u \}$ y

$S'_3 = \{ F_t, F_r, F_{r^2}, F_u, F_{ru}, F_{r^2u} \}$

La tabla de Cayley para S'_3 es:

o	F_t	F_r	F_{r^2}	F_u	F_{ru}	F_{r^2u}
F_t	F_t	F_r	F_{r^2}	F_u	F_{ru}	F_{r^2u}
F_r	F_r	F_{r^2}	F_t	F_{ru}	F_{r^2u}	F_u
F_{r^2}	F_{r^2}	F_t	F_r	F_{r^2u}	F_u	F_{ru}
F_u	F_u	F_{r^2u}	F_{ru}	F_t	F_{r^2}	F_r
F_{ru}	F_{ru}	F_u	F_{r^2u}	F_r	F_t	F_{r^2}
F_{r^2u}	F_{r^2u}	F_{ru}	F_u	F_{r^2}	F_r	F_t

IX. Orbitas y Subgrupos Estacionarios de S_3.

En primer lugar recordamos los conceptos de acción de un grupo sobre un conjunto y acción de conjugación.

- Dados un grupo G y un conjunto X no vacío arbitrario, se llama acción a izquierda de G, o G-acción, sobre X a una función

$$\begin{aligned} * : G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto g * x \end{aligned}$$

tal que:

i) para todo $x \in X$, $e * x = x$

ii) para g_1 y g_2 elementos de G y para $x \in X$

$$g_1 * (g_2 * x) = (g_1 g_2) * x$$

Decimos entonces que X es un G-conjunto a izquierda. De manera análoga se define una G-acción a derecha.

- Una acción de conjugación es una acción de G sobre si mismo.

$$\begin{aligned} *: G \times G &\longrightarrow G \\ (g, x) &\longmapsto g * x = g\, x\, g^{-1} \end{aligned}$$

Es decir, el grupo G actúa sobre sí mismo por conjugación.

1. Dada una acción "*" de un grupo G sobre un conjunto X (no vacío), se llama órbita del elemento x de X, denotada O_x, a la clase de equivalencia de x. O sea:

$$[x] = O_x = \{ y \in X / \ y = g * x, \ g \in G \} = \{ g*x / g \in G \}$$

Si "*" es la acción de conjugación sobre G, tenemos:

$$O_x = \{ g * x \ / \ g \in G \} = \{ g\, x\, g^{-1} / \ g \in G \}$$

Esta es la clase conjugada de x.

Para $G = S_3$ se tiene:

$O_t = \{t\}$ constituída por los elementos de orden 1.

$O_u = O_{r^2u} = O_{ru} = \{u, ru, r^2u\}$ " " " 2

$O_r = O_{r^2} = \{r, r^2\}$ " " " 3

Según esto, los conjugados son los elementos del mismo orden.

2. La Ecuación de Clase para S_3.

Sabemos que para un grupo finito G con centro Z(G) y órbitas no unitarias: $O_{x_1}, O_{x_2}, \ldots, O_{x_n}$, la ecuación de clase es:

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^{n} |O_{x_i}| \quad ; \ x_i \in A \ \text{ y } \ x_i \notin Z(G)$$

Donde A contiene exactamente un elemento de cada órbita.

Entonces:

$$|S_3| = |Z(S_3)| + \sum_{i=1}^{2} |O_{x_i}| \quad ; \quad x_i \in \{r, u\}$$

$$|S_3| = |\{t\}| + |O_r| + |O_u| = 1 + 2 + 3 = 6$$

Además:

$$S_3 = O_t \,\dot{\cup}\, O_r \,\dot{\cup}\, O_u = \{t\} \,\dot{\cup}\, \{r, r^2\} \,\dot{\cup}\, \{u, ru, r^2u\}$$

($\biguplus$: unión disjunta)

$$= \{ t,\ r,\ r^2,\ u,\ ru,\ r^2u \}$$

3. **El Grupo Estacionario o Estabilizador** de un elemento x de un grupo G se define por:

$$E_x = \{ g \in G \ /\ g * x = x \} \leq G$$

Cuando "*" es la acción de conjugación, se tiene:

$$E_x = \{ g \in G \ /\ g\,x\,g^{-1} = x \} = C_G(x) \leq G$$

llamado el centralizador del elemento x del grupo G.

Para $G = S_3$:

$$E_x = \{ a \in S_3 / \ a\,x\,a^{-1} = x \} = C_{S_3}(x) \leq S_3$$

Luego:

$$E_t = \{ t, r, r^2, u, ru, r^2u \} = C_{S_3}(t) = S_3$$

$$E_r = \{ t, r, r^2 \} = C_{S_3}(r) \leq S_3 \ ;$$

$$E_{r^2} = \{ t,\ r,\ r^2 \} = C_{S_3}(r^2) \leq S_3$$

$$E_u = \{ t,\ u \} = C_{S_3}(u) \leq S_3$$

$$E_{ru} = \{ t,\ ru \} = C_{S_3}(ru) \leq S_3$$

$$E_{r^2u} = \{ t,\ r^2u \} = C_{S_3}(r^2u) \leq S_3$$

También podemos verificar que:

$$\left|O_x\right| = \left[G : E_x\right] = \left[G : C_G(x)\right] = \frac{|G|}{\left|C_G(x)\right|}$$

Es decir que, el <u>índice</u> de $C_G(x) = E_x$ en G es el <u>tamaño</u> de <u>la órbita</u> O_x,

Para S_3: $\left|O_x\right| = \left[S_3 : E_x\right] = \left[S_3 : C_{S_3}(x)\right] = \dfrac{|S_3|}{\left|C_{S_3}(x)\right|}$

Luego: $\left|O_t\right| = \frac{6}{6} = 1$; $\left|O_r\right| = \left|O_{r^2}\right| = \frac{6}{3} = 2$

$\left|O_u\right| = \left|O_{ru}\right| = \left|O_{r^2u}\right| = \frac{6}{2} = 3$

X. Acción de Conjugación de S_3 Sobre la colección, S_{S_3}, de los Subgrupos de S_3.

Sabemos que si G es un grupo, $S_G = \{ H/H \leq G \}$ es la colección de los subgrupos de G.

La <u>acción de conjugación</u> "*" está definida así:

$$\begin{aligned} *: G \times S_G &\longrightarrow S_g \\ (g, H) &\longmapsto g * H = g\, H\, g^{-1} \leq G \end{aligned}$$

Para $G = S_3$ tenemos:

$$\begin{aligned} S_{S_3} &= \{ \{t\}, \{t,u\}, \{t,ru\}, \{t,r^2u\}, \{t,r,r^2\}, S_3 \} \\ &= \{ H_o, H_1, H_2, H_3, H_4, S_3 \} \end{aligned}$$

1. <u>La clase de equivalencia o clase conjugada de H es:</u>

$$O_H = \left\{ a\, H\, a^{-1} \;/\; a \in S_3 \right\}$$

Entonces:

$O_{\{t\}} = O_{H_o} = \{\{t\}\} = \{H_o\}$, puesto que $H_o \trianglelefteq S_3$; o sea H_o es subgrupo invariante en S_3.

$O_{H_1} = \left\{ \{t,u\} , \{t,ru\} , \{t,r^2u\} \right\} = \{H_1, H_2, H_3\} =$
$= O_{H_2} = O_{H_3}$

$O_{H_4} = \left\{ \{t,r,r^2\} \right\} = \{H_4\}$, puesto que $H_4 \trianglelefteq S_3$, es decir H_4 es subgrupo invariante en S_3.

$O_{S_3} = \{S_3\}$, porque $S_3 \trianglelefteq S_3$, esto es, S_3 es invariante.

2. <u>El Estabilizador o Normalizador de $H \leq S_3$ en S_3</u>, está definido por:

$$E_H = \left\{ a \in S_3 \;/\; a\, H\, a^{-1} = H \right\} = N_{S_3}(H) \leq S_3$$

Esto es, $E_H = H_{S_3}(H)$ es el subgrupo de los elementos de S_3 que dejan <u>invariante</u> al subgrupo H.

En particular, si $a\, H\, a^{-1} = H$, para algún elemento a de S_3 entonces decimos que H es <u>invariante</u> según a.

$$E_{\{t\}} = E_{H_o} = \left\{ t, r, r^2, u, ru, r^2u \right\} = S_3 = N_{S_3}(H_o)$$

H_o es invariante para todo elemento a de S_3 porque

$H_o \trianglelefteq S_3$.

$E_{H_1} = \{t, u\} = H_1 = N_{S_3}(H_1)$.

Es decir: $t\, H_1 t^{-1} = uH_1 u^{-1} = H_1$. Esto significa que el subgrupo H_1 solo es invariante según t y u.

$E_{H_2} = \{t, ru\} = H_2 = N_{S_3}(H_2)$

$E_{H_3} = \{t, r^2u\} = H_3 = N_{S_3}(H_3)$

$E_{H_4} = \{t, r, r^2, u, ru, r^2u\} = S_3 = N_{S_3}(H_4)$

Luego H_4 es invariante para todo elemento de S_3 puesto que H_4 es subgrupo normal de S_3.

Así mismo $E_{S_3} = S_3 = N_{S_3}(S_3)$ puesto que $S_3 \trianglelefteq S_3$.

Finalmente, invito al lector a que realice un ejercicio similar con el grupo de las transformaciones (rotaciones y reflexiones) del cuadrado: D_4.

BIBLIOGRAFIA.

1. BIRKHOFF, G., Mac Lane S., Algebra Moderna, Vicens-Vives, Barcelona, 1970.

2. DUBREIL y DUBREIL, J. Lecciones de Algebra Moderna, Reverté, Barcelona, 1950.

3. FRALEIGH, J. B. A First Course in Abstract Algebra, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1974.

4. HERSTEIN, I. N., Algebra Moderna, Trillas, México, 1979.