

## EL GRUPO FUNDAMENTAL

Alberto Aguilera García

Dado un espacio topológico  $X$  y un punto  $x_0 \in X$ , se considera un grupo designado por  $\pi(X, x_0)$  y llamado GRUPO FUNDAMENTAL DE  $X$ . Consecuentemente, es definido usando caminos cerrados en  $X$ , y es invariante topológico del espacio  $X$ , al cual está asociado. Lo anterior significa que si dos espacios topológicos son homeomorfos, sus grupos fundamentales son isomorfos. Así, al usar el "grupo fundamental", es posible reducir algunos problemas topológicos sobre espacios a problemas algebraicos sobre espacios. Situación similar ocurre entre las aplicaciones continuas y los homomorfismos.

**DEFINICION 1:** Un camino o arco en un espacio topológico  $S$  es una aplicación continua de algún intervalo cerrado en  $X$ . Las imágenes de los extremos del intervalo se llaman EXTREMOS del camino y el camino une sus extremos. Uno de los extremos se llama ORIGEN y el otro PUNTO final o simplemente EXTREMO.

**DEFINICION 2:** Un espacio  $X$ , se llama ARCO CONEXO O CONEXO POR CAMINOS, si dos puntos cualesquiera de  $X$ , pueden unirse con un arco.

**DEFINICION 3:** Sean  $f: [a, b] \rightarrow X$ , y  $g: [a, b] \rightarrow X$  dos caminos en  $X$ , tales que:  $f(a) = g(a)$ ,  $f(b) = g(b)$ , tienen el mismo origen y el mismo punto final.

$f \sim g$  ( $f$  y  $g$  son equivalentes) si y sólo si EXISTE UNA APLICACION CONTINUA

$h: [a, b] \times [0, 1] \rightarrow X$ , tal que:

$$\left. \begin{array}{l} h(t, 0) = f(t) \\ h(t, 1) = g(t) \end{array} \right\} \quad t \in [a, b]$$

$$\left. \begin{array}{l} h(a, s) = f(a) = g(a) \\ h(b, s) = f(b) = g(b) \end{array} \right\} \quad s \in [0, 1]$$

**PROPOSICION 1:** Sean  $A, B$  subconjuntos cerrados de  $X$ , tales que  $A \cup B = X$  y sean  $f: A \rightarrow Y, g: B \rightarrow Y$  dos aplicaciones continuas en un espacio  $Y$ , tales que:  $f(x) = g(x), \forall x \in A \cap B$ . Entonces la aplicación  $h: X \rightarrow Y$ , definida por

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ g(x), & x \in B \end{cases}$$

ES CONTINUA.

**Demostración.** Sea  $F$  cerrado en  $Y$

Por hipótesis  $X = A \cup B$ , y

$$h^{-1}(F) = h^{-1}(F) \cap (A \cup B) = (h^{-1}(F) \cap A) \cup (h^{-1}(F) \cap B)$$

$$h^{-1}(F) = \{x \in A \cap X / h(x) \in F\} \cup \{x \in B \cap X / h(x) \in F\}$$

$$= \{x \in A / f(x) \in F\} \cup \{x \in B / g(x) \in F\}$$

puesto que:  $h|_A = f, h|_B = g$

Ahora:  $f^{-1}(F) = \{x \in A / f(x) \in F\}$  y  $g^{-1}(F) = \{x \in B / g(x) \in F\}$

$f, g$  son continuas, luego:

$f^{-1}(F)$  es cerrado en la topología inducida en  $A$ ; lo mismo sucede con  $g^{-1}(F)$  en la topología inducida en  $B$ . Como  $A, B$  son cerrados en  $X$ , se sigue que:

$f^{-1}(F)$  y  $g^{-1}(F)$  son cerrados en  $X$ ,

por lo tanto:  $h^{-1}(F)$  es cerrado en  $X$ , y así  $h$  es continua.

Utilizando la proposición 1, puede probarse que la relación:

$$R = \{(f, g) / f \sim g; f, g \text{ caminos en } X\}$$

es una RELACION DE EQUIVALENCIA.

Tal relación determina una partición en clases de equivalencia de  $X$ , y la clase de equivalencia del camino  $f$ , la llamamos  $\bar{f}$ . \*

DEFINICION 4:  $f, g$  caminos en  $X$ , tales que el extremo de  $f$  coincide con el origen de  $g$ , entonces el PRODUCTO de  $f$  con  $g$ ,  $(fg)$ , se define así:

$$fg(t) = \begin{cases} f(2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ g(2t-1) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

CONSIDEREMOS:  $\pi(x) = \{\bar{f} / f \text{ es camino en } X\}$ , y  $\pi(x)$  si  $f, g$  son tales que el extremo de  $f$  coincide con el origen de  $g$ , entonces  $\overline{f \circ g} = \overline{fg}$

PROPOSICION 2: Si  $f_0 \sim f$  y  $g_0 \sim g$  entonces  $f_0 g_0 \sim f_1 g_1$

Asumiendo que el extremo de  $f_i$  coincide con el origen de  $g_i$ ,  $i = 0, 1$ .

(En otras palabras, la relación de equivalencia y el producto según DEFINICION 4, son compatibles).

Demostración. Existen  $H, L$  aplicaciones continuas de  $I \times I \rightarrow X$ , tales que

\* Sin perder generalidad, se hablará de camino en  $X$  una aplicación continua de  $[0, 1] \rightarrow X$



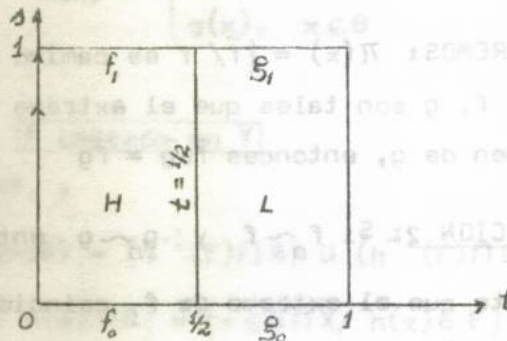
$$\begin{cases} H(t, 0) = f_0(t) \\ H(t, 1) = f_1(t) \\ L(t, 0) = g_0(t) \\ L(t, 1) = g_1(t) \end{cases} \quad \text{para } t \in I$$

$$\begin{cases} H(0, s) = f_0(0) = f_1(0) \\ H(1, s) = f_0(1) = f_1(1) \\ L(0, s) = g_0(0) = g_1(0) \\ L(1, s) = g_0(1) = g_1(1) \end{cases} \quad \text{para } s \in I$$

$$\text{Ahora } f_i g_i(t) = \begin{cases} f_i(2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ g_i(2t-1) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} \quad i = 0, 1$$

Gráficamente la construcción de  $F: I \times I \rightarrow X$ ,

$$F(t, s) = \begin{cases} H(2t, s) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ L(2t-1, s) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} \quad s \in I$$



$F$  está bien definida, ya que:

$$F(1/2, s) = H(1, s) = f_0(1) = g_0(0) = L(0, s)$$

$$f_0 g_0(t) = F(t, 0) = \begin{cases} H(2t, 0) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ L(2t-1, 0) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$f_1 g_1(t) = F(t, 1) = \begin{cases} H(2t, 1) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ L(2t-1, 1) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} F(0, s) &= H(0, s) = f_1 g_1(0) = f_0 g_0(0) \\ F(1, s) &= H(1, s) = f_1 g_1(1) = f_0 g_0(1) \end{aligned} \right\} \quad s \in I$$

$F \mid [0, 1/2] \times I$  y  $F \mid [1/2, 1] \times I$   
 son CONTINUAS, entonces por proposición 1, F ES CONTINUA.

**PROPOSICION 3:**  $(\overline{f \circ g}) \circ \overline{h} = \overline{f \circ (g \circ h)}$

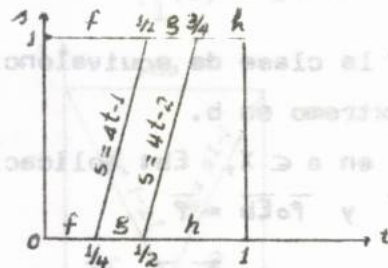
**Demostración.** Sean  $f, g, h$  tales que: el extremo de  $f$  coincide con el origen de  $g$  y el extremo de  $g$  coincide con el origen de  $h$ , entonces probaremos que:

$$(\overline{f \circ g}) \circ \overline{h} = \overline{f \circ g \circ h} = \overline{(fg)h} = \overline{f(gh)} = \overline{f \circ (g \circ h)}$$

$$((fg)h)(t) = \begin{cases} f(4t) & 0 \leq t \leq 1/4 \\ g(4t-1) & 1/4 \leq t \leq 1/2 \\ h(2t-1) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$(f(gh))(t) = \begin{cases} f(2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ g(4t-2) & 1/2 \leq t \leq 3/4 \\ h(4t-3) & 3/4 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Gráficamente la situación se presenta así:



Para construir  $F: I \times I \rightarrow X$ , se requiere:

$t$	$F(t, s)$
0	$f(0)$
$\frac{s+1}{4}$	$f(1) = g(0)$
$\frac{s+2}{4}$	$g(1) = h(0)$
1	$h(1)$

$$F(t, s) = f(f_1(t)); \quad 0 \leq t \leq \frac{s+1}{4}$$

$$= f\left(\frac{4t}{s+1}\right), \text{ considerando } f_1(t) \text{ como la ecuación de}$$

la recta que pasa por los puntos  $P_1, P_2$   
de coordenadas:  $(0, 0)$  y  $\left(\frac{s+1}{4}, 1\right)$

Para  $F(t, s) = g(g_1(t)); \quad \frac{s+1}{4} \leq t \leq \frac{s+2}{4}$

se sigue que  $F(t, s) = g(4t-s-1)$ , y

$$F(t, s) = h\left(1 - \frac{4(1-t)}{2-s}\right); \quad \frac{s+2}{4} \leq t \leq 1$$

así:  $f\left(\frac{4t}{s+1}\right) = F(t, s); \quad 0 \leq t \leq \frac{s+1}{4}$

$$F(t, s) = g(4t-1-s); \quad \frac{s+1}{4} \leq t \leq \frac{s+2}{4}$$

$$F(t, s) = h\left(1 - \frac{4(1-t)}{2-s}\right); \quad \frac{s+2}{4} \leq t \leq 1$$

Como:  $F \Big|_{\left[0, \frac{s+1}{4}\right] \times I} \quad F \Big|_{\left[\frac{s+2}{4}, 1\right] \times I} \quad F \Big|_{\left[\frac{s+1}{4}, \frac{s+2}{4}\right] \times I}$

son continuas, entonces  $F$  ES CONTINUA.

(Se pueden verificar las otras condiciones).

**PROPOSICION 4:**  $f$  es la clase de equivalencia de caminos con origen en  $a$  y extremo en  $b$ .

$E_a$ : aplicación de  $I$  en  $a \in X$ ,  $E_b$ : aplicación de  $I$  en  $b \in X$

Entonces:  $\overline{E_a \circ f} = \overline{f}$  y  $\overline{f \circ E_b} = \overline{f}$

**Demostración.** Mostremos que  $\overline{E_a \circ f} = \overline{f}$ , o sea que  $E_a f \sim \overline{f}$

Sea,  $g: I \rightarrow X$ , aplicación tal que  $g(I) = \{a\}$

y  $h: I \rightarrow X$ , aplicación tal que  $h \in \overline{f}$

Veamos que:  $gh \sim h$

Se considere:  $F: I \times I \rightarrow X$  definida así:

$$F(t, s) = \begin{cases} a, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}s \\ h\left(\frac{2t-s}{2-s}\right), & \frac{1}{2}s \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Entonces:

$$F(t, 0) = h(t) \quad \text{y} \quad F(t, 1) = (gh)(t) \quad *$$

**PROPOSICION 5:**  $\overline{f}, (\widehat{f})$  \*\* son clases de equivalencia de caminos:  $f$ , tiene origen en  $a$  y extremo en  $b$ .

$$\text{Entonces: } \overline{f_0}(\overline{f}) = \overline{Ea} \quad \text{y} \quad (\overline{f}) \overline{f} = \overline{Eb}$$

**Demostración:**  $\overline{f}(\overline{f}) = \overline{Ea}$

Se demuestra:  $f \widehat{f} \sim Ea$

$$f \widehat{f}(t) = \begin{cases} f(2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ f(2-2t) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Se requiere de  $F(1/2, 0) = f(1)$

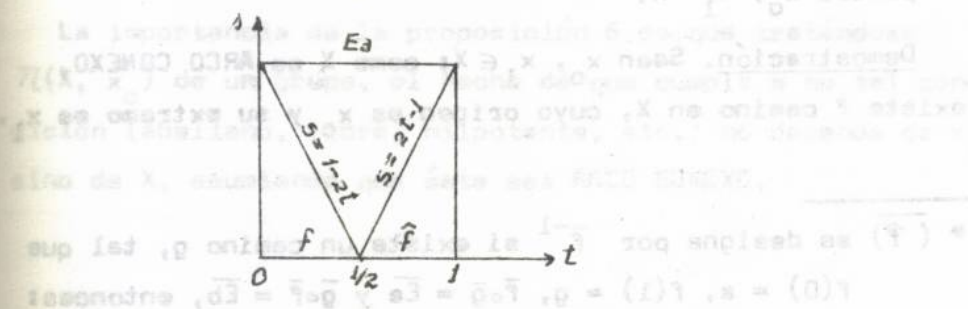
y  $F(1/2, 1) = f(0)$

para construir  $F: I \times I \rightarrow X$

Si  $F(t, s) = f(f_1(s))$ ;  $\frac{1-s}{2} \leq t \leq \frac{1+s}{2}$ ,  $f_1$  continua,

entonces podemos considerar a  $f_1$ , como la ecuación de la recta que pasa por los puntos  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$ ; o sea:

$$f_1(s) = 1 - s$$



\* MASSEY, William S, Introducción a la topología algebraica, Barcelona, Reverté, 1972, p.p. 59-60

\*\* Sea  $f$  un camino arbitrario,  $f: I \rightarrow X$ , designamos  $\widehat{f}$  el camino definido por:  $\widehat{f}(t) = f(1-t)$ ,  $t \in I$ . Al recorrer  $f$  en dirección opuesta, se obtiene  $\widehat{f}$ .



$$y \quad F(t, s) = \begin{cases} f(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1-s}{2} \\ f(1-s) & \frac{1-s}{2} \leq t \leq \frac{1+s}{2} \\ f(2-2s) & \frac{1+s}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

F cumple la definición 3 y así:

$$\overline{f \circ (\overline{f})} = \overline{Ea}^*$$

**DEFINICION 5:** Un camino o clase de caminos se llama cerrado, o LAZO, si sus extremos coinciden. El extremo común se dice que es BASE DEL LAZO.

Sea  $x_0$  un punto arbitrario de  $X$ . El conjunto de lazos con base en  $x_0$ , es un GRUPO y se llama GRUPO DE H. POINCARÉ o GRUPO FUNDAMENTAL DE  $X$  en el punto base  $x_0$  y se nota:

$$\pi(X, x_0)$$

**PROPOSICION 6:** Si  $X$  es arco conexo (véase definición 2),  $\pi(X, x_0)$  y  $\pi(X, x_1)$ , son ISOMORFOS para todo par de puntos  $x_0, x_1 \in X$ .

Demostración. Sean  $x_0, x_1 \in X$ ; como  $X$  es ARCO CONEXO, existe  $f$  camino en  $X$ , cuyo origen es  $x_0$  y su extremo es  $x_1$ .

\*  $(\overline{f})$  se designa por  $\overline{f}^{-1}$  si existe un camino  $g$ , tal que  $f(0) = a, f(1) = g, \overline{f} \circ \overline{g} = \overline{Ea}$  y  $\overline{g} \circ \overline{f} = \overline{Eb}$ , entonces:  $\overline{g} \circ \overline{f} \circ \overline{f}^{-1} = (\overline{g} \circ \overline{f}) \circ \overline{f}^{-1} = \overline{Eb} \circ \overline{f}^{-1} = \overline{f}^{-1}$ , y  $\overline{g} \circ \overline{f} \circ \overline{f}^{-1} = \overline{g} \circ (\overline{f} \circ \overline{f}^{-1}) = \overline{g} \circ \overline{Ea} = \overline{g}$ , o sea,  $\overline{g} = \overline{f}^{-1}$ , de tal manera que  $\overline{f}^{-1}$  está definida de manera única por las condiciones de la proposición 5.

Quando  $E_a \sim E_b$  o sea  $E_a(0) = E_b(0)$  y  $E_a(1) = E_b(1)$ ,  $\overline{f} \circ \overline{f}^{-1} = \overline{f}^{-1} \circ \overline{f}$ ;  $a = b$ , pues  $E_a, E_b$  son caminos constantes.



Por lo tanto se define:

$$F: \pi(X, x_0) \rightarrow \pi(X, x_1)$$

tal que:  $F(g) = \bar{f}^{-1} \circ g \circ \bar{f}$

para todo  $g \in \pi(X, x_0)$

$F$  es homomorfismo, pues para  $\bar{g}_1, \bar{g}_2 \in \pi(X, x_0)$ ,

$$\begin{aligned} F(\bar{g}_1 \circ \bar{g}_2) &= \bar{f}^{-1} \circ (\bar{g}_1 \circ \bar{g}_2) \circ \bar{f} \\ &= \bar{f}^{-1} \circ (\bar{g}_1 \circ \bar{f} \circ \bar{f}^{-1} \circ \bar{g}_2 \circ \bar{f}) \circ \bar{f} \\ &= \bar{f}^{-1} \circ (\bar{g}_1 \circ \bar{f} \circ \bar{f}^{-1} \circ \bar{g}_2) \circ \bar{f} \\ &= (\bar{f}^{-1} \circ \bar{g}_1 \circ \bar{f}) \circ (\bar{f}^{-1} \circ \bar{g}_2 \circ \bar{f}) \\ &= F(\bar{g}_1) \circ F(\bar{g}_2) \end{aligned}$$

$G: \pi(X, x_1) \rightarrow \pi(X, x_0)$  tal que  $G(\bar{h}) = \bar{f} \circ \bar{h} \circ \bar{f}^{-1}$ , es también homomorfismo.

$G.F$  y  $F.G$  son el homomorfismo idéntico,

$$G.F = \text{id}_{\pi(X, x_0)}, \quad F.G = \text{id}_{\pi(X, x_1)}$$

por consiguiente,  $F$  ES ISOMORFISMO.

La importancia de la proposición 6 es que tratándose  $\pi(X, x_0)$  de un grupo, el hecho de que cumpla o no tal condición (abeliano, libre, nilpotente, etc.) no depende de  $x_0$ , sino de  $X$ , asumiendo que éste sea ARCO CONEXO.

BIBLIOGRAFIA

HOCKING, John G., YOUNG, Gil S., Topología, España, Reverté, 1975, 385 p.

KELLEY, J. L., Topología General, Buenos Aires, EUDEBA, 1962, 320 p.

MASSEY, William S., Introducción a la Topología Algebraica, Barcelona, Reverté, 1972, 263 p.