OPTICA MATRICIAL

Libardo G. Torres

En óptica geométrica convencional consideramos que la luz viaja en línea recta o rayos.

Los rayos emitidos por un objeto, después de atravesar un sistema óptico convergen para darnos la imagen de éste.

La trayectoria de un rayo cualquiera está definida por la ley de Snell.

El tamaño y posición de la imagen está determinada por la ley de Gauss o la ecuación de Newton.

El objetivo de este artículo es hacer un análisis de la óptica geométrica desde el punto de vista matricial, para lo cual consideramos una lente delgada y con base en sus propiedades físicas, hacemos la siguiente hipótesis:

a) Todo rayo de luz que incide paralelo al eje de la lente, después de atravesar ésta, converge a un punto F' llamado punto focal o foco de la lente.

b) Un objeto localizado en el punto H a una distancia f (distancia focal) a la derecha de F tendrá una imagen de exactamente el mismo tamaño que el objeto; la imagen está localizada en el punto H'

Los puntos H y H' se llaman puntos unidad.

Bajo la consideración de estas dos hipótesis podemos deducir la ecuación de Newton, confirmándonos la validez éstas.

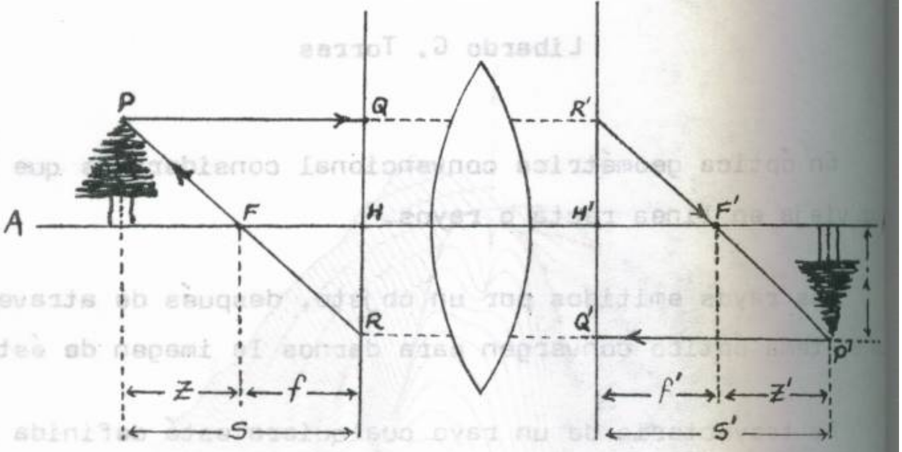

Fig. 1

En la Fig. 1 tenemos:

El rayo PQ incide paralelo al eje de la lente (AA') después de atravesarla pasa por el foco de la lente F' (primera hipótesis).

Un objeto situado en H, ej. HQ tiene su imagen en H' la cual es H'R' que cumple HQ =H'R' (segunda hipótesis).

No importa el comportamiento del rayo dentro de la l te o sea al pasar de Q a R'.

La trayectoria del rayo no depende de su dirección; decir, lo mismo sería que si incide por la izquierda o p la derecha.

Esto implica que el rayo de luz es reversible, así rayo incidente desde P' paralelo al eje AA' emergerá a R para luego pasar por F y llegar a P haciendo las mismas consideraciones del rayo PQ.

Si en la figura consideramos la semejanza de los triángulos, obtenemos las siguientes relaciones:

$$\frac{G+i}{S} = \frac{G}{Z} = \frac{i}{F} \qquad (1)$$

$$\frac{G+i}{S'} = \frac{G}{F'} = \frac{i}{Z'} \qquad (2)$$

de las cuales obtenemos: $\frac{G}{i} = \frac{Z}{F} = \frac{F'}{Z'}$, de donde

$$\boxed{ZZ' = FF'} \qquad (3)$$

es la ecuación de Newton.

Así mismo, de (1) y (2) tenemos:

$$\frac{G+i}{i} = \frac{S}{F} \quad y \quad \frac{G+i}{G} = \frac{S'}{F'}$$

de donde, $i = \frac{F}{S}(G+i)$; $G = \frac{F'}{S'}(G+i)$

sumando, $G + i = (G+i)(\frac{F}{S} + \frac{F'}{S'})$, esto es:

$$\boxed{1 = \frac{F}{S} + \frac{F'}{S'}} \qquad (4)$$

es la ecuación de Gauss.

Para una lente simétrica $F = F'$ tenemos

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{S} + \frac{1}{S'}\text{ , forma muy conocida.}$$

Si definimos el aumento como $B = \frac{i}{G}$ tenemos,

$$B = \frac{i}{G} = \frac{F}{Z} = \frac{Z'}{F'}$$

Matriz de una lente

Consideremos una lente biconvexa con eje de simetría el eje "Z".

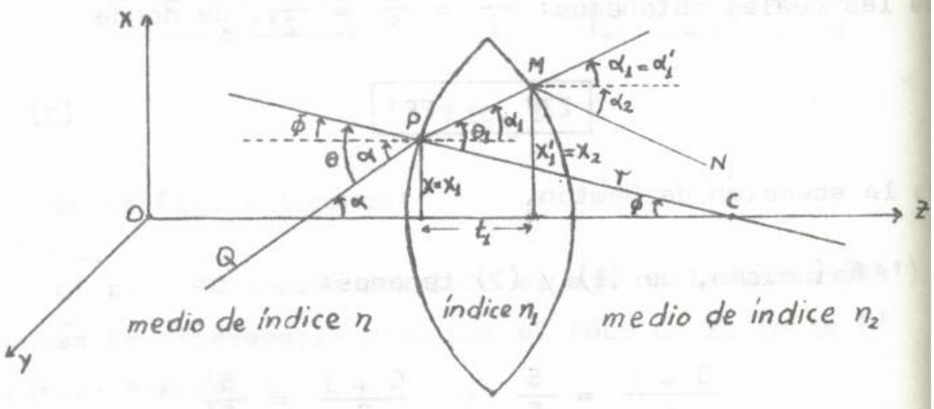

Fig. 2

De la figura tenemos: el rayo incidente QP el cual pertenece al plano "OZX", PM es el rayo refractado èn la lente y MN es el rayo que emerge de la lente.

El punto P es el punto en el cual el rayo incidente Q toca la primera superficie de la lente de radio r, este pu to está a una distancia $X = X_1$ del eje "Z".

La dirección de QP forma con la horizontal un ángulo así mismo PM forma el ángulo α_1.

En la figura tenemos que:

$$\emptyset = \frac{X}{r}, \quad \text{para ángulos pequeños}$$

Si el índice de refracción del medio a la izquierda de la lente es n y el de la lente es n_1, tenemos según Snell:

$$n \operatorname{sen} \theta = n_1 \operatorname{sen} \theta_1$$

$$n\theta = n_1 \theta_1, \quad \text{para ángulos pequeños}$$

pero, $\theta = \emptyset + \alpha \; ; \quad \theta_1 = \emptyset + \alpha_1$

entonces, $n(\emptyset + \alpha) = n_1(\emptyset + \alpha_1)$,

$$n_1\alpha_1 = (n - n_1)\emptyset + n\alpha = n\alpha - \frac{X}{r}(n_1 - n)$$

$$\boxed{n_1\alpha_1 = n\alpha - KX} \qquad (5)$$

donde $K = \dfrac{n_1 - n}{r}$ especifica las propiedades físicas de la superficie.

La expresión (5) determina la dirección del rayo refractado PM en términos de la dirección y posición (X) en la superficie de la lente del rayo incidente QP.

La posición del rayo refractado es X_1, la cual cumple

$$\boxed{X_1 = X} \qquad (6)$$

o sea los parámetros (α_1, X_1) del rayo refractado (PM) podemos expresarlos en términos de los parámetros correspondientes (α, X) del rayo incidente.

$$n_1\alpha_1 = n\alpha - K X$$

$$X_1 = X$$

Estas relaciones podemos sintetizarlas en la forma:

$$\begin{pmatrix} n_1\alpha_1 \\ X_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -K \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n\alpha \\ X \end{pmatrix} \qquad (7)$$

donde $R = \begin{vmatrix} 1 & -K \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ la llamamos matriz de refracción.

Este rayo refractado viaja en la lente desde el punto P hasta el punto M cuya posición es $X_1' = X_2$.

La distancia horizontal recorrida es t_1, como ya vimos su dirección es $\alpha_1 = \alpha_1'$

La posición X'_1 podemos expresarla de la siguiente manera:

$$X_1' = X_1 + t_1 \tan\alpha_1$$

$$\boxed{X_1' = X_1 + t_1\alpha_1} \qquad (8)$$

para ángulos pequeños. Su dirección en el punto M es

$$\boxed{\alpha_1' = \alpha_1} \qquad (9)$$

Las relaciones (8) y (9) podemos expresarlas como sigue:

$$\begin{pmatrix} n_1 \alpha_1' \\ X_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t_1/n_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \alpha_1 \\ X_1 \end{pmatrix} \qquad (10)$$

A la matriz $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t_1/n_1 & 1 \end{pmatrix}$ llamamos matriz de traslación.

De (7) y (10) reemplazando $\begin{pmatrix} n_1 \alpha_1 \\ X_1 \end{pmatrix}$ tenemos:

$$\begin{pmatrix} n_1 \alpha_1' \\ X_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t_1/n_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -K \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n\alpha \\ X \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} n_1 \alpha_1' \\ X_1' \end{pmatrix} = T\,R \begin{pmatrix} n\alpha \\ X \end{pmatrix} \qquad (11)$$

Expresión que determina la pendiente $(\alpha_1' = \alpha_1)$ y el punto de incidencia (X_1') del rayo refractado sobre la segunda superficie de la lente en términos de los parámetros correspondientes del rayo incidente en la primera superficie de ésta.

Pasamos ahora al rayo MN el cual emerge de la lente, este rayo podemos especificarlo por los parámetros (X_2, α_2), posición y pendiente.

Este rayo es un rayo refractado en el medio a la derecha de la lente de índice n_2 y cuyo rayo incidente es el PM, que atraviesa la lente de índice n_1; entonces es razonable describirlo por una matriz de refracción en la segunda superficie de la lente, quedando:

$$\begin{pmatrix} n_2 \alpha_2 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -K_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \alpha'_1 \\ X'_1 \end{pmatrix} \qquad (12)$$

donde $R_2 = \begin{pmatrix} 1 & -K_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz de refracción en la segunda superficie,

$K_2 = \dfrac{n_2 - n_1}{r_2}$, r_2 es el radio de la segunda superf.

Reemplazando $\begin{pmatrix} n_1 \alpha'_1 \\ X'_1 \end{pmatrix}$ de (11) en (12) tenemos:

$$\begin{pmatrix} n_2 \alpha_2 \\ X_2 \end{pmatrix} = R_2 \; T \; R_1 \begin{pmatrix} n\alpha \\ X \end{pmatrix} \qquad (13)$$

Esta ecuación nos determina la pendiente y el punto de la lente por donde emerge el rayo después de atravesarla, en términos de las cantidades correspondientes del rayo incidente.

De lo anterior podemos decir:

1) El efecto de cualquier combinación de refracciones y traslaciones puede ser expresado por el producto de matrices apropiadas.

2) El comportamiento de un rayo de luz al atravesar una lente queda determinado por la matriz S, la cual es el

producto de la matriz de refracción R_1 en la primera superficie, la matriz de traslación T y la matriz de refracción R_2 en la segunda superficie, según el siguiente orden:

$$S = R_2 \, T \, R_1$$

La matriz S es lo que llamamos la matriz de la lente.

Esta matriz la expresamos como:

$$S = \begin{pmatrix} b & -a \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -K_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t_1/n_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -K_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{K_2 \, t_1}{n_1} & -(K_1 + K_2) + \dfrac{K_1 \, K_2 \, t_1}{n_1} \\ \dfrac{t_1}{n_1} & 1 - \dfrac{K_1 \, t_1}{n_1} \end{pmatrix} \quad (14)$$

los elementos a, b, c, d son llamados las constantes gaussianas.

Analizando las matrices anteriores vemos que

$$\det S = \det R_2 = \det T = \det R_1 = 1$$

<u>Significado físico de las constantes gaussianas</u>

Consideremos el objeto árbol y su imagen formada por la lente convexa L.

Teniendo en cuenta lo analizado, la trayectoria de cualquier rayo desde el objeto hasta su imagen está definida por el siguiente sistema matricial:

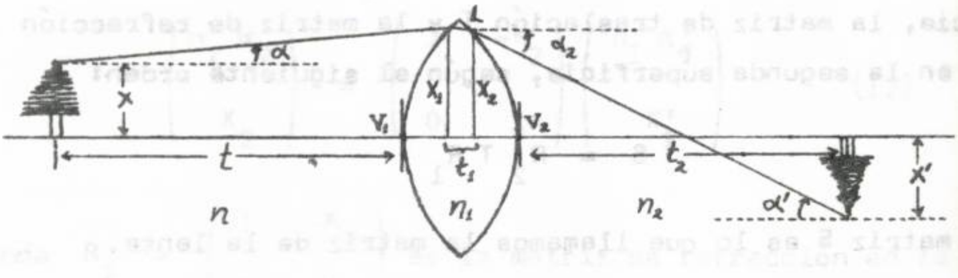

Fig. 3

Del objeto a la lente por la matriz de traslación

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t/n & 1 \end{pmatrix}$$

El paso por la lente, por la matriz

$$S = \begin{pmatrix} b & -a \\ -d & c \end{pmatrix}$$

y de la lente hasta la imagen, por la matríz de traslación

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t_2/n_2 & 1 \end{pmatrix}$$

resultando la posición de la imagen y la pendiente del rayo que la forma en términos de los parámetros correspondientes del haz incidente en la forma:

$$\begin{pmatrix} n_2\alpha' \\ X' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t_2/n_2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & -a \\ -d & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t/n & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n\alpha \\ X \end{pmatrix} \quad (15)$$

En este punto es necesario hacer alguna convención de signos con el propósito de definir la dirección de la imagen respecto al objeto y la distancia a la lente a la cual se forma ya sea a la derecha o izquierda de esta.

Para esto hacemos las siguientes consideraciones:

1) La luz siempre viaja de izquierda a derecha.

2) Las distancias son medidas a partir de los vértices de la lente.

3) Toda distancia horizontal es positiva si es medida de izquierda a derecha y la vertical si está por encima del eje.

4) El radio r de la lente es positivo si el centro de curvatura está a la derecha de la superficie de la lente.

Si aplicamos estas convenciones el caso de nuestro ejemplo anterior (del objeto árbol) tenemos:

$$t = -L, \quad t_2 = L'$$

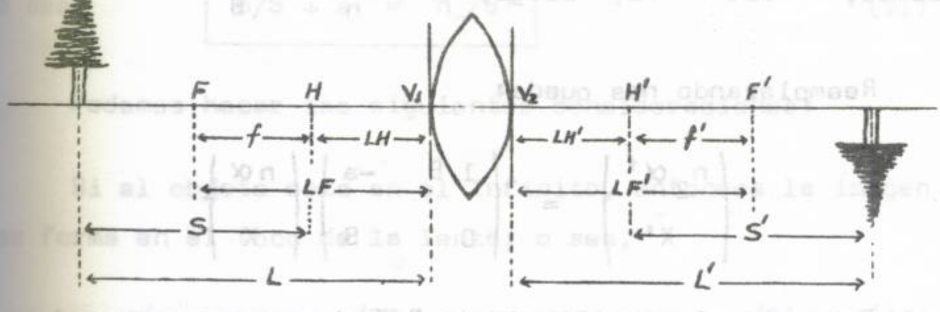

Fig. 4

$$\begin{pmatrix} n_2\alpha' \\ X' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ L'/n_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & -a \\ -d & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -L/n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n\alpha \\ X \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b + \frac{a\,L}{n} & -a \\ \frac{b\,L'}{n_2} - d + \frac{a\,L'\,L}{n_2\,n_1} - \frac{c\,L}{n_1} & c - \frac{a\,L'}{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n\alpha \\ X \end{pmatrix}$$

$$= M \begin{pmatrix} n\alpha \\ X \end{pmatrix} \tag{16}$$

El aumento B es: $B = \frac{X'}{X}$; de la ecuación (16) para que sea compatible con la definición de B debemos tener:

$$\frac{b\,L'}{n_2} - d + \frac{a\,L'\,L}{n_2\,n_1} - \frac{c\,L}{n_1} = 0$$

de donde, $$X' = (c - \frac{a\,L'}{n_2})\,X$$

o sea, $$B = \frac{X'}{X} = c - \frac{a\,L'}{n_2} \tag{17}$$

además, $\det M = 1$; luego, $$b + \frac{a\,L}{n} = \frac{1}{B} \tag{18}$$

Reemplazando nos queda:

$$\begin{pmatrix} n_2\alpha' \\ X' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/B & -a \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n\alpha \\ X \end{pmatrix}$$

Para ver el significado de "a" observemos que en la figura $LH' + S' = L'$ y como $B = c - \frac{a\,L'}{n_2}$ entonces

$$B = c - \frac{a(L\,H' + S')}{n_2} = 1 - \frac{a}{n_2}\,S'$$

esto es, $$\boxed{B = 1 - \frac{a}{n_2}\,S'} \qquad (19)$$

Así mismo podemos demostrar que

$$\boxed{B^{-1} = 1 + \frac{a}{n}\,S} \qquad (20)$$

(19) la obtenemos reeplazando $LH' = \frac{n_2}{a}(c - 1)$ que sale considerando que para $B = 1$ se tiene $L\,H' = L'$.

Reemplazando (19) y (20) en M tenemos:

$$\begin{pmatrix} 1/B & -a \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + (a/n)\,S & -a \\ 0 & 1 - (a/n_2)\,S' \end{pmatrix}$$

cuyo determinante toma el valor:

$$(1 + a/n\;S)(1 - a/n_2\;S') = 1$$

o sea, $$\boxed{n/S + a = n_2/S'} \qquad (21)$$

Podemos hacer las siguientes consideraciones:

Si el objeto está en el infinito, entonces la imagen se forma en el foco de la lente; o sea,

$$n/\infty + a = n_2/F', \quad \text{esto es,} \quad a = n_2/F' \qquad (22)$$

Así mismo, si la imagen se forma en el infinito el objeto está en el foco, $S = F$, luego

$$a = -\frac{n}{f} \qquad (23)$$

Las ecuaciones (22) ó (23) nos dicen que "a" es inversamente proporcional a la distancia focal.

Si $n = n_2 = 1$, se tiene $a = 1/F' = -1/F$ y $|F| = |F'|$, quedando la ecuación:

$$\boxed{1/F' = -1/F = 1/S' - 1/S} \qquad (24)$$

De las ecuaciones $B = 1 - aS'/n_2$ y $1/B = 1 + a S/\!$ tenemos:

$$S'/S = (n_2/n)\,B \quad \text{ó} \quad \boxed{B = n\,S'/n_2\,S} \qquad (25)$$

Localización de la distancia focal F y F'

De la ecuación (25) vemos que si $S \rightarrow \infty$, $B \rightarrow 0$; $a = n_2/F'$ y $L' \rightarrow L F'$.

Así de $B = c - a\,L'/n_2$ tenemos: $c - a\,LF'/n_2 = 0$

$$\boxed{LF' = c\,\frac{n_2}{a} = c\,F'} \qquad (26)$$

De la misma forma obtenemos:

$$\boxed{LF = -b\,n_1/a = b\,F} \qquad (27)$$

Así la interpretación de c y b queda dada por (26) y (27) respectivamente.

c nos dice qué fracción de la distancia focal en el espacio imagen está fuera de la lente.

c puede ser mayor que 1 o menor que 1, ya sea que el plano unitario H' esté fuera o dentro de la lente.

A modo de ejemplo utilizamos nuestros cálculos para obtener un resultado general. De la ecuación (14)

$$\begin{pmatrix} b & -a \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{K_2 t_1}{n_1} & -(K_1 + K_2) + \dfrac{K_1 K_2 t_1}{n_1} \\ \dfrac{t_1}{n_1} & 1 - \dfrac{K_1 t_1}{n_1} \end{pmatrix}$$

y teniendo en cuenta $a = -n/F = n_2/F'$, obtenemos:

$$a = -n/F = n_2/F' = K_1 + K_2 - \frac{K_1 K_2 t_1}{n_1}$$

$$= \frac{n_1 - n}{r_1} + \frac{n_2 - n_1}{r_2} - \frac{(n_1 - n)(n_2 - n_1)}{r_1 r_2 n_1} t_1$$

En el aire: $n = n_2 = 1$, entonces

$$a = -1/F = 1/F' = \frac{n_1 - 1}{r_1} + \frac{1 - n_1}{r_2} - \frac{(n_1 - 1)(1 - n_1)}{r_1 r_2 n_1} t_1$$

$$= -1/F = 1/F' = (n_1 - 1)\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} - \frac{(1 - n_1)}{r_1 r_2 n_1} t_1\right]$$

que es la ecuación del constructor de lentes.

Combinación de lentes

La expresión matricial desarrollada puede ser fácilmen te extendida a cualquier combinación de lentes, y es posibl hacerlo por el producto de un conjunto de matrices de traslación y refracción para encontrar las constantes gaussiana

Sea en efecto un sistema de dos lentes delgadas

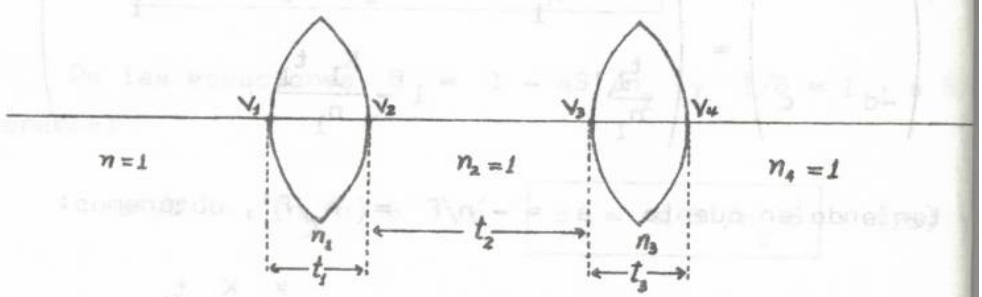

Fig. 5

Un rayo cualquiera sigue el siguiente recorrido a partir de la primera superficie de la primera lente.

En la superficie V_1 ocurre una refracción, la cual está descrita por la matriz R_1.

El paso de V_1 a V_2, el rayo está descrito por la matriz de traslación T_1.

En V_2 ocurre una refracción descrita por R_2. El paso de V_2 a V_3 por la matriz de traslación T_2, en V_3 existe refracción por tanto está descrita por R_3, de V_3 a V_4 será T_3 y finalmente en V_4 existe refracción, por tanto está descrita por R_4.

El proceso total es:

$$S = \begin{pmatrix} b & -a \\ -d & c \end{pmatrix} = R_4 T_3 R_3 T_2 R_2 T_1 R_1$$

El término $R_2 T_1 R_1 = \begin{pmatrix} b_1 & -a_1 \\ -d_1 & c_1 \end{pmatrix}$ es el sistema matricial para la primera lente.

Similarmente $R_4 T_3 R_3 = \begin{pmatrix} b_2 & -a_2 \\ -d_2 & c_2 \end{pmatrix}$ es el sistema matricial para la segunda lente.

La matriz $T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t_2 & 1 \end{pmatrix}$ corresponde al paso de V_2 a V_3. Por lo tanto,

$$S = \begin{pmatrix} b_2 & -a_2 \\ -d_2 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & -a_1 \\ -d_1 & c_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b_1 b_2 + a_2(d_1 - b_1 t_2) & -a_1 b_2 + a_1 a_2 t_2 - a_2 c_1 \\ -b_1 d_2 + c_2(b_1 t_2 - d_1) & a_1 d_2 - a_1 c_2 t_2 + c_1 c_2 \end{pmatrix}$$

donde, $-a = -a_1 b_2 + a_1 a_2 t_2 - a_2 c_1$

$$a_1 = 1/F'_1, \qquad a_2 = 1/F'_2$$

entonces,

$$-a = -1/F' = -1/F'_1 b_2 + t_2/F'_1 F'_2 - c_1/F'_2$$

$$1/F' = b_2/F'_1 + c_1/F'_2 - t_2/F'_1 F'_2$$

y de la ecuación (14),

$$b_2 = 1 - \frac{K_4 t_3}{n_3} \qquad c_1 = 1 - \frac{K_1 t_1}{n_1}$$

quedando determinadas las constantes gaussianas y por lo tanto cualquier parámetro que deseemos.