

PROBLEMAS DE CONCURSO

Solución a los Problemas Propuestos

Problema N° 1. Encontrar las raíces reales de la ecuación

$$\sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{1+x} = p \quad (1)$$

De este problema se recibieron varios intentos de solución, desafortunadamente incorrectos en diversos grados. Sin embargo constituyeron loable esfuerzo que invitamos a imitar a todos nuestros lectores.

Solución:

Por comodidad hagamos

$$u = \sqrt[3]{1-x} \quad , \quad v = \sqrt[3]{1+x} \quad (2)$$

la ecuación (1) queda

$$u + v = p \quad (3)$$

elevando al cubo se tiene la ecuación equivalente a la anterior:

$$u^3 + v^3 + 3u^2v + 3vu^2 = p^3$$

de donde

$$u^3 + v^3 + 3vu(u + v) = p^3 \quad (4)$$

reemplazando en esta última ecuación (3), se tiene

$$u^3 + v^3 + 3uvp = p^3 \quad (5)$$

He aquí la dificultad del problema: la ecuación (5) no es equivalente a (4), o lo que es lo mismo a (1). Analicemos esto más detenidamente. La ecuación (5) se puede escribir así:

$$(u + v)^3 - p^3 - 3uv(u + v - p) = 0$$

tomando la diferencia de cubos para $(u + v)^3 - p^3$ se tiene

$$(u + v - p) [(u + v)^2 + (u + v)p + p^2] - 3uv(u + v - p) = 0$$

o lo que es lo mismo

$$(u + v - p) [(u + v)^2 + (u + v)p + p^2 - 3uv] = 0$$

de donde

$$(u + v - p) [u^2 + v^2 - uv + pu + pv + p^2] = 0$$

que es equivalente a dos ecuaciones a saber:

$$u + v - p = 0 \quad (6)$$

$$u^2 + v^2 + p^2 + up + vp - uv = 0 \quad (7)$$

o sea (5) es equivalente a (6) y (7). La primera es la ecuación propuesta (3), o lo que es lo mismo (1) y (7) pueden ser fuentes de soluciones extrañas; por tanto (5) no es equivalente a (1).

Estudiemos (7); se puede escribir (previa multiplicación por 2):

$$(u + p)^2 + (v + p)^2 + (u - v)^2 = 0$$

que se cumple solo si $u = v = -p$

O sea $\sqrt[3]{1 - x} = -p$ y $\sqrt[3]{1 + x} = -p$

de donde no es difícil concluir que $x = 0$ y $p = -1$.

Esta última es solución de (5) pero no de (1) como es evidente, o sea que son soluciones extrañas.

Volvamos a (5), reemplazando u y v según (2), tenemos:

$$2 + 3\sqrt{1 - x^2} p = p^3$$

y de allí

$$x = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{p^3 - 2}{3p}\right)^2}$$

Esta expresión tiene sentido sólo cuando $p = -1$ ó $0 \leq p \leq 2$ (por qué). De allí excluimos la solución Extraña $x = 0$ correspondiente a $p = -1$, y tenemos que la solución es:

$$x = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{p^3 - 2}{3p}\right)^2} \quad 0 \leq p \leq 2$$

Problema Nº 2.

Demostrar que existe un número de 100 cifras, divisible por 2^{100} y tal que en su escritura decimal solo entren 1 y 2.

Solución :

Demostramos algo más que lo propuesto, a saber: existe un número de n cifras divisible por 2^n en cuya escritura decimal entran solo 1 y 2. La demostración la haremos por inducción;

Si $n = 1$ el número buscado es $N_1 = 2$

Supongamos que la proposición es cierta para $n - 1$, o sea existe un número de $n-1$ cifras, que son sólo 1 ó 2, divisible por 2^{n-1} .

Sea este número $N_{n-1} = a_{n-1}a_{n-2}\dots a_1$ (escrito decimalmente). O sea

$$N_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} a_k 10^{k-1}$$

Sea $a_n a_{n-1} \dots a_1 = N_n$ o lo que es lo mismo

$$N_n = \sum_{k=1}^n a_k 10^{k-1} \quad \text{se tiene que}$$

$$N_n = a_n 10^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k 10^{k-1} = a_n 10^{n-1} + N_{n-1}$$

escojo a_n de tal manera que N_n sea divisible por 2^n .

Esto es factible puesto que

$$\begin{aligned} \frac{N_n}{2^n} &= \frac{a_n 10^{n-1}}{2^n} + \frac{N_{n-1}}{2^n} = \frac{a_n \cdot 5^{n-1}}{2} + \frac{1}{2} k_{n-1} \\ &= \frac{a_n \cdot 5^{n-1} + k_{n-1}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{donde } k_{n-1} = \frac{N_{n-1}}{2^{n-1}} - \text{entero}$$

entonces escojo $a_n = 1$ si k_{n-1} - es impar

$a_n = 2$ si k_{n-1} - es par

en ambos casos N_n - entero y divisible por 2^n .

Veamos los primeros casos en la tabla siguiente:

n	N_n	k_n
1	2	1
2	12	3
3	112	14
4	2112	132
5	22112	691
6	122112	1908
7	2122112	16579

Finalmente: El número construido es único?

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Demostrar que las rectas que cortan simultáneamente el área y el perímetro de un triángulo en partes iguales, pasan por un mismo punto.
2. Demostrar que de 25 números positivos diferentes se pueden escoger 2 tales que, ninguno de los restantes es la suma o la diferencia (de mayor a menor) de los escogidos.

(Tomado de la revista KVANT, Nº 11, Moscú, 1971).

Las mejores soluciones serán publicadas en el próximo número de esta revista.