ALGUNOS CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD

Servio Tulio Eraso C.

En el número uno de esta revista, empezamos por contar en base cinco y llegamos a construír el cuerpo finito ($\mathbb{Z}_5$, +, .) de los enteros módulo cinco, que, fácilmente se generalizó al caso de cualquier módulo primo. Es decir, ($\mathbb{Z}_p$, +, .) es un cuerpo (finito) siendo p un número primo positivo.

Entre las aplicaciones de esta construcción, analizamos la divisibilidad de cualquier número entero entre siete.

En el presente artículo nos detenemos a considerar varios casos de divisibilidad, los cuales, son de gran utilidad a nivel elemental. Las demostraciones aquí suministradas son de fácil acceso para los profesores de aritmética.

1.- Un número entero x es divisible por dos si y sólo si la cifra de las unidades es par. Será divisible por cinco si dicha cifra es cero o cinco.

Sea $x = a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_2 a_1 a_0$ donde los a_i varían entre cero y nueve. La representación decimal de x, será:

$$x = a_0 + a_1 10^1 + a_2 10^2 + \ldots + a_n 10^n = \sum_{i=0}^{n} a_i 10^i$$

de aquí, $x - a_o = 10(a_1 + a_2 10 + \dots + a_n 10^{n-1})$

ó sea, $x - a_o = 2x5(a_1 + a_2 10 + \dots + a_n 10^{n-1})$

Entonces, 2 divide a $x - a_o$ ó 5 divide a $x - a_o$. Pero nos interesa el número x.

a) Para que 2 divida al número x, es necesario y suficiente que a_o sea múltiplo de 2. Es decir, a_o pertenece al conjunto $\{0, 2, 4, 6, 8\}$.

b) Para que 5 divida al número x, es necesario y suficiente que a_o pertenezca al conjunto $\{0, 5\}$.

Así, pues, el número 1234 es divisible por 2, pero no por cinco.

El número 2345 es divisible por cinco pero no por dos.

El número 3450 es divisible por dos y a la vez por cinco.

2.- **Un entero x es divisible por <u>cuatro</u> si y sólo si el número formado por la cifra de las unidades y la cifra de las decenas es múltiplo de cuatro. Si dicho número es de la forma 00, 25, 50 ó 75, el entero x es divisible por <u>veinticinco</u>.**

Sea $x = a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_o$ donde los a_i varían entre cero y nueve. La representación decimal de x, será:

$$x = a_o + a_1 10^1 + a_2 10^2 + \dots + a_n 10^n = \sum_{i=o}^{n} a_i 10^i$$

Si al número x le restamos el número formado por las dos últimas cifras, obtenemos un múltiplo de cien. Es de cir, 100 divide a $x - \overline{a_1 a_o}$.

Pero $100 = 4x25$, entonces, 4 divide a $x - \overline{a_1 a_o}$ ó 25 divide a $x - \overline{a_1 a_o}$. Nos interesa el número x. Entonces:

a) Para que 4 divida a x es necesario y suficiente que el número $\overline{a_1 a_o}$ sea múltiplo de cuatro.

b) Si el número $\overline{a_1 a_o}$ tiene la forma 00, 25, 50 ó 75, el número x es divisible por veinticinco.

Por ejemplo, sea $x = 12348$. Como $\overline{a_1 a_o} = 48$ y $48 = 4x12$ entonces x es divisible por cuatro. Pues, $12348 = 4x3087$.

Si tomamos $x = 27450$, entonces x es divisible por 25, pero no es divisible por cuatro. En efecto:

$$27450 = 25x1098$$

pero, $27450 = 4x6862 + 2$ (residuo no nulo)

Si $x = 79400$, x es múltiplo de 4 y de 25, pues,

$$79400 = 4x19850 \quad y \quad 79400 = 25x3176$$

3.- Un entero x es divisible por <u>nueve</u> (ó por tres) si y sólo si la suma de sus cifras es divisible por <u>nueve</u> (ó por tres).

Debido a que $10 - 1 = 9(1)$; $10^2 - 1 = 9(11)$; $10^3 - 1 = 9(111)$; etc., basta demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$, 9 divide a $10^n - 1$. Aplicamos el métcdo de inducción matemática:

a) Si $n = 1$, entonces 9 divide a 9.

b) Supongamos que 9 divide a $10^k - 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

c) Ahora demostremos que 9 divide a $10^{k+1} - 1$.

Como 9 divide a $10^k - 1$ (por b), existe un entero z tal que $10^k - 1 = 9z$, de donde $10^k = 9z + 1$. Multiplicando ambos miembros por 10, tenemos:

$$10^{k+1} = 10(9z + 1) = 90z + 10 = 90z + 9 + 1$$
$$= 9(10z + 1) + 1 = 9m + 1, \text{ donde } m \in \mathbb{Z}$$

entonces $10^{k+1} - 1 = 9m$ y por tanto, 9 divide a $10^{k+1}-1$ Por el principio de inducción matemática 9 divide a 10^n-1 para todo $n \in \mathbb{N}$.

Además, como $9 = 3x3$, entonces 3 divide a $10^n - 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

En síntesis, $x = a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_2 a_1 a_o$ es divisible por <u>nueve</u> (ó por tres) si la suma $a_o + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$ es múltiplo de <u>nueve</u> (ó de tres).

Por ejemplo, sea $x = 3654$. La suma de sus cifras, es: $3+6+5+4 = 18 = 9x2$. Luego, x es divisible por 9. En efecto, $3654 = 9x406$.

Además, $3+6+5+4 = 18 = 3x6$, de donde x es divisible por 3; $3654 = 3x1218$.

Ahora, tomemos $x = 12345$. La suma de sus cifras es: $1+2+3+4+5 = 15 = 3x5$. Entonces, x es divisible por 3. Sin embargo, x no es divisible por 9. Basta ver que: $12345 = 3x4115 = 9x1371 + 6$ (residuo no nulo).

<u>UTILIDAD</u>.

La teoría de la divisibilidad por <u>nueve</u>, por abarcar todas las cifras del número dado, es de gran ayuda cuando se quiere saber si una operación está bien ejecutada o no. Es la llamada "prueba del nueve". Aunque las otras pruebas tengan interés matemático, son un tanto restringidas.

A manera de ilustración, consideremos dos casos:

I. Multiplicación.

Sean a y b enteros dados y su producto $p = a x b$. Estos números en módulo nueve, son:

$$a = 9a_1 + x \quad \text{donde} \quad a_1,\ x \text{ en } Z;\quad 0 \leqslant x < 9$$

$$b = 9b_1 + y \qquad b_1,\ y \text{ en } Z;\quad 0 \leqslant y < 9$$

$$p = 9p_1 + z \qquad p_1,\ z \text{ en } Z;\quad 0 \leqslant z < 9$$

Puesto que $p = a x b$, entonces:

$$9p_1 + z = (9a_1 + x)(9b_1 + y)$$

$$= 81a_1b_1 + 9a_1y + 9b_1x + xy$$

de donde, $9(p_1 - 9a_1b_1 - a_1y - b_1x) = xy - z$

ó sea, $9m = xy - z$ donde $m \in Z$. De aquí, 9 divide a $xy - z$.

EJEMPLO: Al multiplicar 237 por 59 resulta 13973. Es esto correcto ?.

$$\left.\begin{aligned} 237 &= 9x26 + 3 \\ 59 &= 9x\ 6 + 5 \\ 13973 &= 9x1441 + 4 \end{aligned}\right\}\quad 3x5 - 4 = 11$$

como 11 no es múltiplo de 9, el resultado es incorrecto. En efecto: 237x59 = 13983.

II. DIVISION.

Sean a y b enteros dados, siendo $b \neq 0$. Al dividir a entre b se obtiene un cociente q y un residuo r tales que $a = bq + r$ donde $0 \leqslant r < b$.

Estos números en módulo 9, son:

$$a = 9a_1 + x; \quad a_1, x \text{ en } \mathbb{Z}; \quad 0 \leqslant x < 9$$
$$b = 9b_1 + y; \quad b_1, y \text{ en } \mathbb{Z}; \quad 0 \leqslant y < 9$$
$$q = 9q_1 + z; \quad q_1, z \text{ en } \mathbb{Z}; \quad 0 \leqslant z < 9$$
$$r = 9r_1 + w; \quad r_1, w \text{ en } \mathbb{Z}; \quad 0 \leqslant w < 9$$

Puesto que $a = bq + r$, entonces:

$$9a_1 + x = (9b_1 + y)(9q_1 + z) + (9r_1 + w)$$
$$= 81b_1q_1 + 9b_1z + 9q_1y + yz + 9r_1 + w$$

de donde, $9(a_1 - 9b_1q_1 - b_1z - q_1y - r_1) = (yz + w) - x$

ó sea, $9m = (yz + w) - x$, donde $m \in \mathbb{Z}$. De aquí, 9 divide a $(yz + w) - x$.

EJEMPLO: Al dividir 123456 entre 276 se obtiene 447 de cociente y residuo 83. Serán los resultados correctos?

$$\left.\begin{array}{r} 123456 = 9\text{x}13717 + 3 \\ 276 = 9\text{x}30 + 6 \\ 447 = 9\text{x}49 + 6 \\ 83 = 9\text{x}9 + 2 \end{array}\right\} (3\text{x}6 + 6) - 2 = 22$$

como 22 no es múltiplo de 9, la operación debe revisarse. En efecto: $123456 = 276\text{x}447 + 84 \quad (84 \neq 83)$

4.- Un entero x es divisible por once si y sólo si la suma alternada de sus cifras (a partir de las unidades) es múltiplo de once.

Sea el entero $x = a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_o$ donde los a_i varían entre cero y nueve. Su representación decimal es:

$$x = a_o + a_1 10^1 + a_2 10^2 + \dots + a_n 10^n = \sum_{i=o}^{n} a_i 10^i$$

Como $10 = 11 - 1$; $10^2 = 11(9) + 1$; $10^3 = 11(91) - 1$; $10^4 = 11(909) + 1$; etc., basta demostrar que 11 divide a $10^n \pm 1$. Es decir, 11 divide a $10^n - (-1)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Lo hacemos por inducción matemática;

a) Si $n = 1$, entonces 11 divide a 11.

b) Supongamos que 11 divide a $10^k - (-1)^k$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

c) Mostramos que 11 divide a $10^{k+1} - (-1)^{k+1}$.

Como 11 divide a $10^k - (-1)^k$, por b) existe un entero z tal que;

$$10^k - (-1)^k = 11z \implies 10^k = 11z + (-1)^k$$

Multiplicamos ambos miembros por 10;

$10^{k+1} = 10(11z + (-1)^k)$. Pero $10 = 11 - 1$, entonces

$$\begin{aligned} 10^{k+1} &= (11 - 1)(11z + (-1)^k) \\ &= 11(11z) + 11(-1)^k - 11z + (-1)(-1)^k \\ &= 11(10z + (-1)^k) + (-1)^{k+1} \end{aligned}$$

de donde, $10^{k+1} - (-1)^{k+1} = 11(m)$, $m \in \mathbb{Z}$, lo cual dice que 11 divide a $10^{k+1} - (-1)^{k+1}$. Por el principio de inducción matemática, 11 divide a $10^n - (-1)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Luego, para que 11 divida a x es necesario y suficiente que 11 divida a $(a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + (-1)^n a_n)$ que es la suma alternada de las cifras de x.

A manera de ayuda nemotécnica, tenemos: se suman las cifras de puesto impar: S_1; se suman las cifras de puesto par: S_2. De la primera restamos la segunda; $S_1 - S_2$ y el resultado debe ser múltiplo de once.

EJEMPLO: Veamos si el número $x = 1326391$ es divisible por 11:

$$S_1 = 1 + 3 + 2 + 1 = 7$$

$$S_2 = 9 + 6 + 3 = 18$$

$$S_1 - S_2 = 7 - 18 = -11$$

Luego x sí es divisible por 11. En efecto:

$$1326391 = 11 \times 120581$$

Esperamos una futura oportunidad para tratar aspectos sobre el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo siguiendo esta línea de razonamiento.

Pasto, abril 15/82