Soto y Mosquera. 2017. División del área de un triángulo en dos partes iguales. Revista Sigma, 13 (1). Pág. 15-26 http://coes.udenar.edu.co/revistasigma/articulosXIII/1.pdf

REVISTA SIGMA
Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad de Nariño

Volumen XIII N° 1 (2017), páginas 15–26

División del área de un triángulo en dos partes iguales, el paradigma del baricentro

Oscar Fernando Soto Agreda[1]
Saulo Mosquera López[2]

Abstract.
There are endless ways to divide the area of a triangle into two equal parts, or more, if required. An interesting case occurs when the division must be carried out with a single rectilinear cut. In fact, in the case of the circle, square and parallelogram, every line that passes through the barycenter cuts it in the suggested parts. In this article, of informative character, we try to give answers to questions such as: Does every line that passes through the center of the triangle, divide it into two parts of the same area? Are there other ways to solve the problem using straight lines?

In the answer to these questions, the involute concept appears, which for this case, corresponds to the branch of a hyperbola. The study of this simple problem shows how it is possible to analyze a topic carefully with the support of a dynamic geometry assistant, allowing us to share results that, in our opinion, are astonishing.

Keywords. triangle, iqual parts, barycenter, hyperbola.

Resumen.
Existen infinitas formas de dividir el área de un triángulo en dos partes iguales, o en más, si se requiere. Un caso interesante es aquel en el cual se exige efectuar la división con un único corte rectilíneo. De hecho, para el círculo, el cuadrado y el paralelogramo, toda recta que pasa por el baricentro lo secciona en las partes sugeridas. En este artículo, de carácter divulgativo, intentamos aproximarnos a dar respuestas a preguntas tales como: ¿Toda recta que pasa por el baricentro del triángulo, lo secciona en dos partes de igual área? ¿Existen otras formas de resolver el problema mediante líneas rectas?

En la respuesta a estas preguntas aparece el concepto de envolvente que, para el caso, corresponde a la rama de una hipérbola. El estudio de este sencillo problema, muestra cómo es posible analizar detenidamente un tema con el soporte de un asistente de geometría dinámica que permite evidenciar resultados que, en, nuestra opinión, causan sensación de asombro.

Palabras Clave. triángulo, igual área, baricentro, hipérbola.

[1]Corresponding author: Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad de Nariño, e-mail: fsoto@udenar.edu.co

[2]Corresponding author: Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad de Nariño e-mail: samolo@udenar.edu.co

1. Introducción

Hace al menos diez años, se hizo viral el problema de seccionar el área de un cuadrado en dos regiones de igual área; las soluciones presentaron, en múltiples casos, infinitas posibilidades de bisección, algunas de las cuales tienen alternativas de sumergirse en el diseño y en los collages. De hecho, el problema puede trasladarse, sin dificultad, a la partición en dos regiones de igual área a diversos tipos de polígonos y en particular al triángulo.

En aritmética, el proceso de dividir se realiza mediante un algoritmo único que posibilita la existencia de residuos; dividir en geometría no es equivalente. En el caso del problema que se está tratando, la división carece de restos y brinda la posibilidad de infinitas alternativas de solución. La división, no solo se convierte en un reto sino que requiere de mejores niveles de preparación.

2. Del Baricentro

Para el círculo, el cuadrado, el rectángulo y el paralelogramo en general, el centro, o el punto de corte de las diagonales, se consideran, geométricamente, como el baricentro y sustenta el paradigma de que toda recta que pasa por este punto, divide las regiones consideradas en dos partes de área igual. No se replica lo mismo en el caso del triángulo (Figura 2) salvo en el caso en que la recta que pase por el baricentro sea una de las tres medianas. (Figura 1).

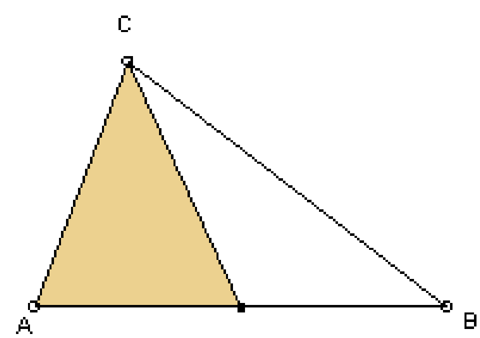

Figura 1:

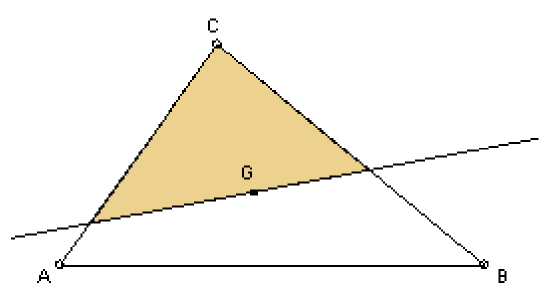

Figura 2:

Para un triángulo utilizar la mediana para resolver el problema, brinda infinitas oportunidades de bisección considerando un punto en el interior del triángulo y desde allí trisecarlo uniendo tal punto con los vértices y luego cada región triangular bisecarla con la utilización de la mediana. Este procedimiento se puede repetir de manera reiterada infinitas veces y su bosquejo se indica en la Figura 3.

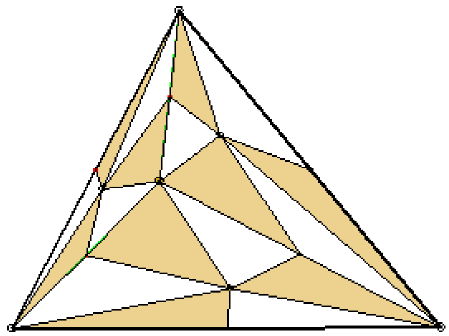

Figura 3:

3. La división de un triángulo en dos regiones de igual área con un único corte rectilíneo

El problema de bisecar una región triangular con un único corte rectilíneo, es antiguo y ha sido considerado en diferentes oportunidades, se presentan a continuación algunos casos particulares del problema general.

3.1. La división de Nemore

Un caso particular del problema general fue enunciado y resuelto por el matemático alemán, Jordano de Nemore (1225, 1260), y es la siguiente: Dado el triángulo ABC y un punto cualquiera D en uno de sus lados, dividir el triángulo en dos partes de igual área mediante una recta que pase por D.

La solución no es difícil y la describimos a continuación. Se traza el segmento DB y por C una paralela a DB que corta a la prolongación de AB en el punto E, F es el punto medio del segmento AE. El segmento DF divide al triángulo original en dos regiones de igual área, la una triangular y la otra cuadrangular. (Figura 4)

3.2. La solución del problema por una paralela a la base

Este es un problema clásico cuyo enunciado es: dado un triángulo cualquiera, dividirlo en dos regiones de igual área por medio de una recta paralela a uno de sus lados. Describimos la solución considerando que la paralela lo es al lado AB. Para ello se traza la mediatriz del lado AC y desde su punto medio D, con radio DC, se construye un arco de circunferencia que se intersecta con la mediatriz en el punto E. Con centro en C y radio CE se traza un nuevo arco que corta al lado BC en F y por este punto se hace pasar la paralela al lado AB. El triángulo GFC no solo es semejante al original sino que también tiene un área igual a la mitad del mismo. (Figura 5).

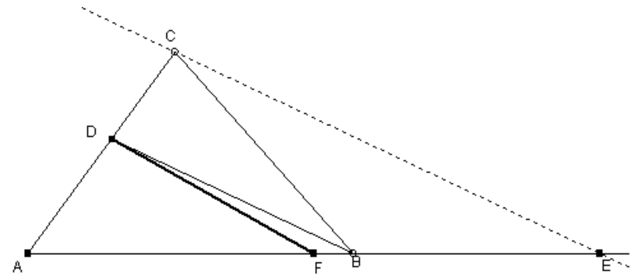

Figura 4:

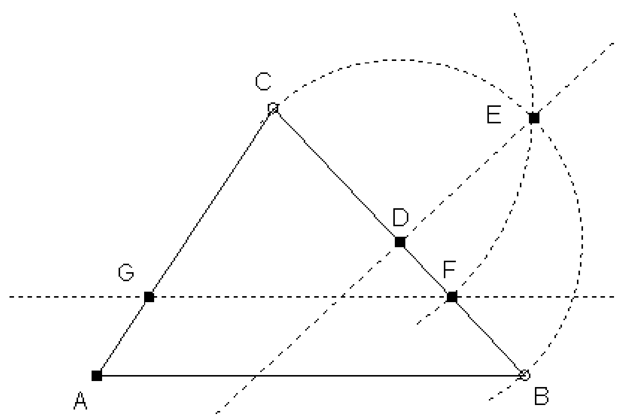

Figura 5:

Este procedimiento se puede reiterar para dividir el triángulo por paralelas a un lado, en cualquier número de regiones de igual área con solo dividir el segmento BC en igual número de partes y levantar perpendiculares al mismo que inducen los cortes con la circunferencia de diámetro BC.

3.3. Una variación del problema anterior

Es factible modificar el problema al pedir que la recta que biseca a la región triangular sea paralela a una recta cualquiera dada. En la Figura 6 y en lo que sigue se explica el algoritmo que resuelve el problema considerado.

Sea l la recta que determina la dirección dada; por C se traza una paralela a l que corta al lado AB en el punto D y se construye una circunferencia de diámetro AD. La mediatriz de AB corta a esta circunferencia en el punto E; con centro en A y radio AE, se construye una nueva circunferencia que intercepta al lado AB en el punto F desde donde se traza una paralela a la dirección dada, la cual corta al lado AC en el punto G. El triángulo AFG es una de las dos regiones buscadas.

3.4. Un procedimiento análogo al de Nemore

Una solución al problema propuesto por Nemore, se puede obtener con menos pasos mediante el siguiente procedimiento. Suponga que debe resolver el problema por un corte que pase

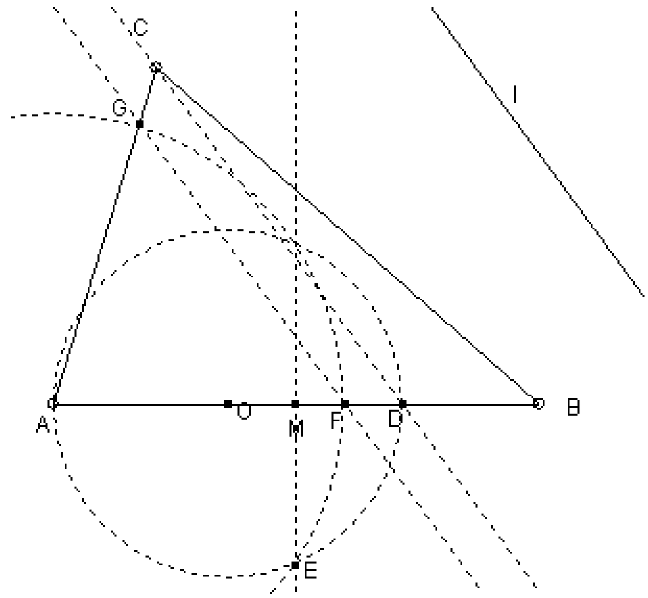

Figura 6:

por el punto P del lado AB.

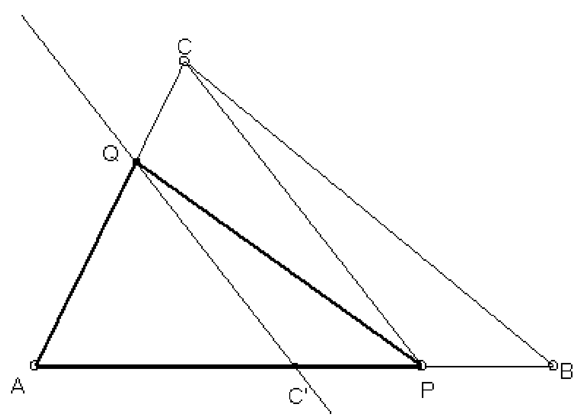

Figura 7:

Para cumplir el objetivo, se traza el segmento PC y por el punto medio $C^{'}$ del mismo lado, una paralela al segmento PC que intersecta en Q al lado AC. De este modo se obtiene que el triángulo APQ que resuelve el problema. (Figura 7).

4. El papel del baricentro

Como se puede observar, ninguna de las rectas consideradas en la solución de los casos tratados pasa por el baricentro del triángulo, excepto cuando el punto P coincide con uno de los vértices A, B o C del mismo triángulo.
En la Figura 9 y con la utilización de Cabrí Géometre, se ha dispuesto traza de la recta

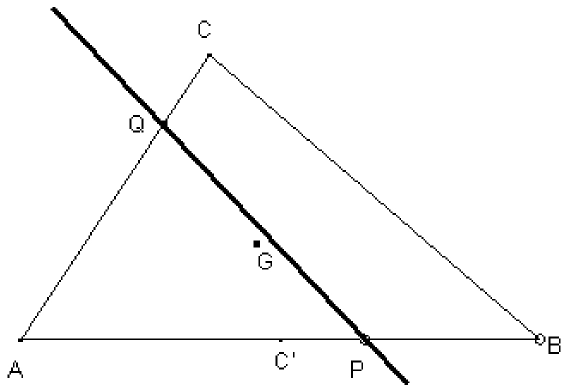

Figura 8:

que divide el triángulo en dos partes de igual área y se ha dado animación al punto P para observar que se genera una familia de rectas cuya curva envolvente (tangente a la familia de rectas) es una hipérbola. Estudiemos de manera puntual esta familia de rectas.

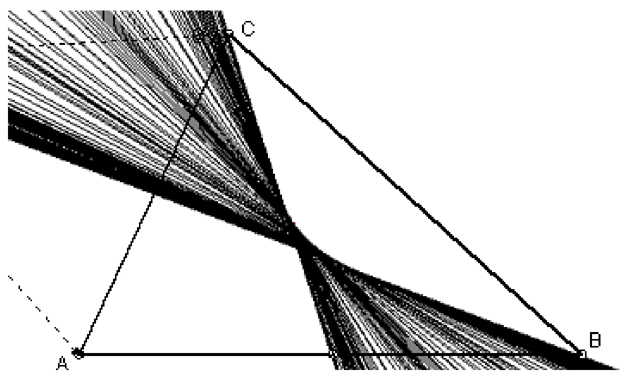

Figura 9:

5. La hipérbola como envolvente de la familia de rectas bisectoras.

En el plano la forma vectorial de la ecuación de una recta puede expresarse como $X = X_0 + D_t$, donde $X = (x, y), D = (d_1, d_2) \neq (0, 0)$ es el vector director de la recta, $X_0 = (x_0, y_0)$ es un punto dado de la misma y el parámetro $t \in \mathbb{R}$.

Es claro que una recta depende de un parámetro, pero una familia de rectas requiere de dos parámetros, y en este caso, la familia de rectas que biseca al triángulo se puede escribir como $X(t, s) = X_0(s) + D(s)t$, puesto que el vector D cambia de dirección en cada movimiento. Así mismo, considerando que la envolvente, es la curva tangente a cada una de las rectas de la familia, entonces estas rectas coinciden en un punto del plano, que debe estar en la curva, y por tanto podemos expresar la ecuación vectorial local de la envolvente $Y(s)$, de manera similar a la de la recta como $Y(s) = X_0(s) + \tau(s)D(s)$.

Dado que en el triángulo ABC, el punto Q depende de P, se tiene que si consideramos un punto cualquier O del plano como origen entonces la ecuación vectorial de la recta que pasa por A con vector director AB, es $OX = OA + s(OB - OA)$ mientras que la ecuación vectorial de la recta que pasa por A con vector director AC es, $OY = OA + \mu(OC - OA)$ con ambos parámetros positivos.

Si consideramos el hecho de que todos los vectores tienen el mismo origen O, podemos denotar los vectores con su punto terminal y por tanto las ecuaciones de estas rectas se pueden expresar simplemente como $X = A + s(B - A)$ y $Y = A + \mu(C - A)$, y puesto que estas rectas pasan, respectivamente, por los puntos P y Q, estos puntos satisfacen las ecuaciones de estas rectas y por tanto $P = A + s(B - A)$ y $Q = A + \mu(C - A)$.

La recta que pasa por los puntos P y Q tiene como ecuación $X = P + t(Q - P)$, y dado que el área del triángulo ABC es el doble área APQ se tiene que $AB.AC.\operatorname{sen} A = 2AQ.AP.\operatorname{sen} A$ es decir $AB.AC = 2AP.AQ$ y puesto que $AP = sAB$ y $AQ = \mu AC$ se obtiene que $2s\mu = 1$ y por tanto al reemplazar los valores de P y de Q resulta que la ecuación de la familia de rectas es $X(t,s) = A + s(B - A) + t\left(\frac{1}{2s}(C - A) + s(A - B)\right)$ la cual debe coincidir con la de la envolvente en una vecindad del punto de tangencia por lo que comparar con la ecuación de la envolvente $Y(s) = X_0(s) + \tau(s)D(s)$ resulta que $D(s) = \frac{1}{2s}(C - A) + s(A - B)$ y $X_0(s) = A + s(B - A)$, por lo que para hallar la ecuación de la envolvente únicamente nos falta calcular $\tau(s)$.

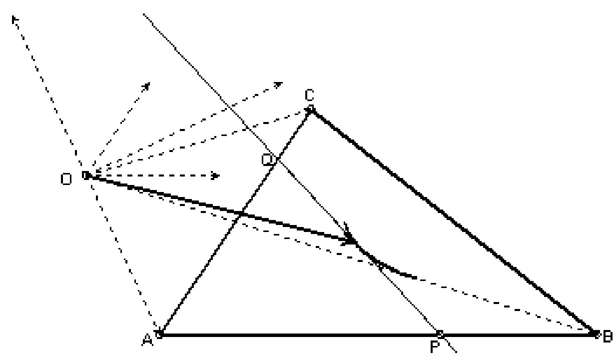

Figura 10:

Para ello, calculamos la pendiente de la recta tangente a la envolvente, es decir, $\frac{dY}{ds}$ la cual debe ser un múltiplo de la pendiente $D(s)$ de la familia de rectas, al escribir la igualdad correspondiente se obtiene un sistema lineal de ecuaciones y resolviendo este sistema se deduce que el punto de contacto entre la envolvente y cada recta, se logra cuando $\tau(s) = \frac{1}{2}$, lo que determina que la ecuación paramétrica de la envolvente a la familia de rectas tangentes, en función de s y en una vecindad en la que $\frac{1}{2} \leq s \leq 1$ es, $Y(s) = \frac{1}{4s}(C - A) + \frac{1}{2}s(B - A) + A$ la cual en este caso corresponde al arco de una hipérbola. Para determinar esta rama de la hipérbola envolvente es suficiente, además de los puntos B y C, seleccionar tres puntos (en realidad se pueden seleccionar infinitos), tal y como se observa en La Figura 11.
Una ilustración de estos hechos se obtiene al considerar el triángulo de vértices $A(0,0)$, $B(b,0)$ y $C(a,c)$. En este caso se tiene:

1. La ecuación paramétrica de la familia de rectas que divide al triángulo en dos regiones

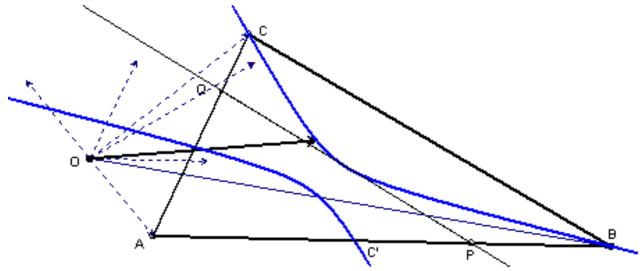

Figura 11:

de igual área está dada por $x = bs(1-t) + \dfrac{at}{2s}$, $y = \dfrac{ct}{2s}$ donde $t \in \mathbb{R}$, la cual en forma cartesiana se expresa como $cx + (2bs^2 - a)y = bcs$.

2. La ecuación paramétrica de la envolvente es $x = \dfrac{a}{4s} + \dfrac{bs}{2}$, $y = \dfrac{c}{4s}$ donde $s \in \mathbb{R}$, que en coordenadas rectangulares corresponde a la hipérbola $8cxy - 8ay^2 = bc^2$.

3. En el caso particular en que $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(4,4)$ se obtiene la familia de rectas $x + (s^2-1)y = 2s$ y la hipérbola $xy - y^2 = 1$, hecho que se ilustra geométricamente en la Figura 12.

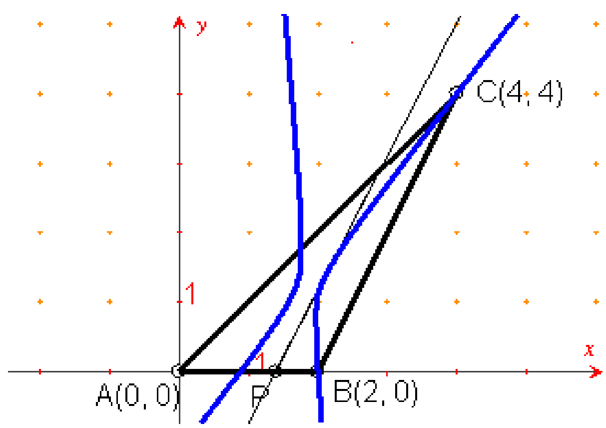

Figura 12:

6. El paradigma del baricentro

Por la simetría de regiones acotadas del plano toda recta que pasa por su baricentro la biseca en partes iguales, es el caso del círculo (Figura 13) y de todo paralelogramo, (Figura 14), en particular de los rectángulos y de los cuadrados.
Sin embargo, no ocurre lo mismo con los triángulos, a excepción de que la recta también pase por uno de los vértices. Sin duda, esta particularidad, en lugar de quitarle interés e importancia al baricentro resaltan su relevancia y por ello, como ilustración, se relacionan algunas características que posee las cuales se encuentran descritas en la Enciclopedia en

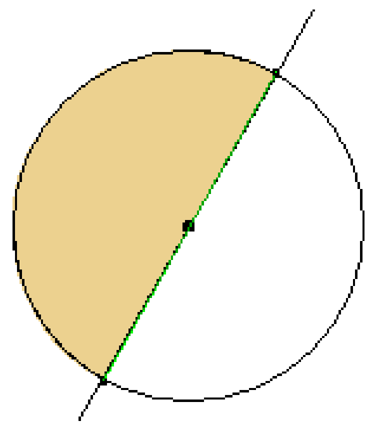

Figura 13:

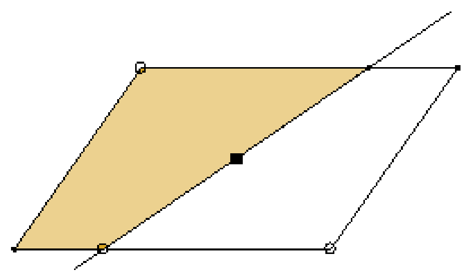

Figura 14:

línea de centros o puntos notables del triángulo, en la que se identifica al baricentro como el punto $X(2)$.

1. Al unir $X(2)$ con los vértices del triángulo, queda particionado en tres triángulos de igual área. (Figura 15).

2. La suma de los tres vectores anclados en $X(2)$ y puntos terminales los vértices A, B y C es el vector cero. (Figura 15).

3. La distancia desde $X(2)$ a cualquier recta, es el promedio de las distancias de los vértices del triángulo a la misma recta. (Figura 16)

4. $X(2)$ es colineal con el ortocentro (corte de las alturas) y el circuncentro (corte de las mediatrices) y la línea que los contiene se llama Recta de Euler. La distancia del circuncentro al baricentro es la tercera parte de la distancia entre el ortocentro y el circuncentro. (Figura 18).

5. El vector suma de los tres vectores anclados en cualquier punto del plano con extremos en los vértices del triángulo pasa por el baricentro. (Figura 17)

Solo estas, entre tantas particularidades que tiene el baricentro, lo distinguen y lo hacen importante entre los cerca de doce mil puntos notables que posee esta singular figura.

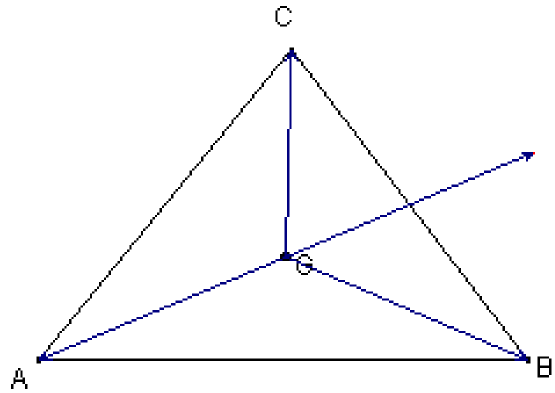

Figura 15:

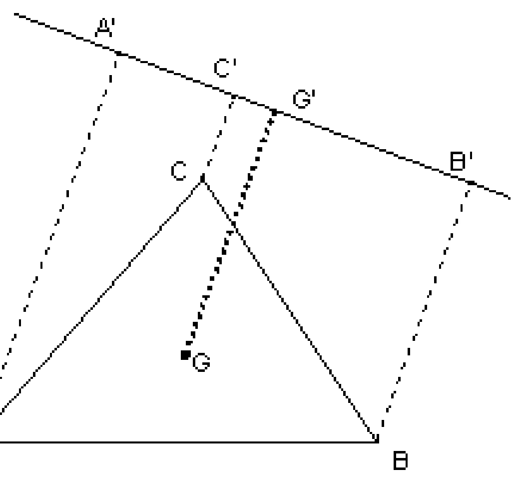

Figura 16:

7. Reflexión final

A lo largo de este trabajo se ha estudiado un tema de fácil comprensión para una de las figuras geométricas de alta simplicidad como es el triángulo. Es abundante la literatura, la indagación y los conceptos relacionados con esta figura triangular; existe una marcada obsesión en su estudio, por ejemplo, se han descubierto más de doce mil puntos notables del triángulo que se relacionan por colinealidad, paralelismo, pertenencia a una misma circunferencia, por simetría a las elipses de Kieper que por analogía se corresponden con el incírculo y el excírculo y por ello no causa tanto asombro que en la gran cantidad de elementos aparezcan las cónicas asociadas al triángulo, pero es importante señalar que su estudio, como se ha evidenciado en este artículo, requiere de la intervención directa de varias ramas de la matemática como el cálculo diferencial, el álgebra lineal, el cálculo vectorial, la geometría analítica y de hecho, la misma geometría sintética.

Es un hecho claro que al intervenir el baricentro como elemento asociado en la resolución del problema de partir un triángulo en dos regiones de igual área, se comprometan conceptos

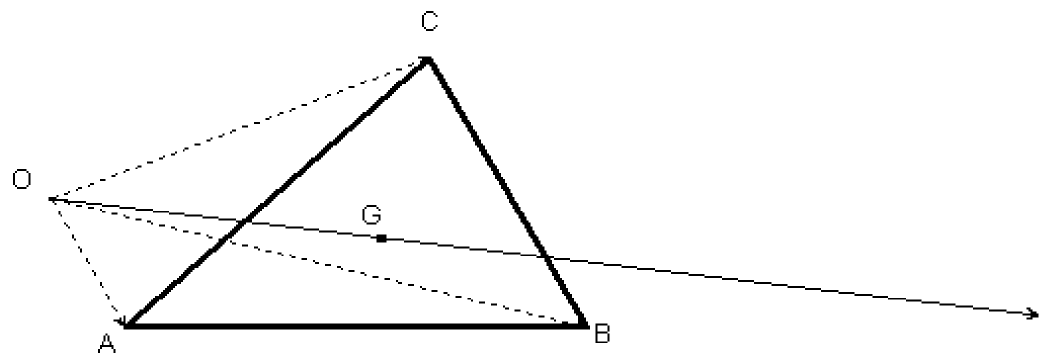

Figura 17:

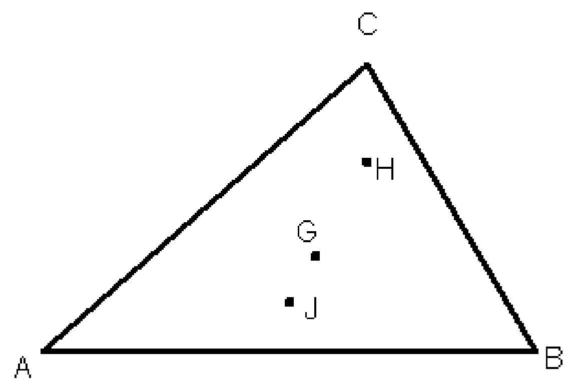

Figura 18:

físicos como los de momento, centro de gravedad, centro de masa y densidad y queda en consecuencia, abierta la inquietud a que sea estudiado el problema por los conocedores de diferentes disciplinas.

Referencias

[1] Aguilera, Néstor. (1998). El baricentro y la división en dos partes de igual área. *Revista Investigación y Docencia*.

[2] Puertas, M. L. (1994). Los Elementos de Euclides. Libros I-V. Traducción y notas. Madrid. España. Editorial Gredos.

[3] Landaverde, F. de J. (1955). Curso de Geometría para secundaria y preparatoria. Cuarta edición. Bogotá. D.E. Colombia. Imprenta de editorial Retina.

[4] Soto, O. F. (2000). Geometría con Cabrí. Editorial Universitaria. San Juan de Pasto. Colombia. Universidad de Nariño.

[5] Borbolla, Francisco y otro (1980). Problemas y ejercicios de geometría analítica. Unión tipográfica editorial Hispano Americana. México.

[6] Web - Grafía. Clark Kimberling's *Encyclopedia of Triangles'Centers*.

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad de Nariño

e-mail: fsoto@udenar.edu.co
e-mail: samolo@udenar.edu.co