De la Cruz, R. 2010. Derivación, el Teorema de Rolle y del Valor Medio para funciones de una Variable Compleja. Revista Sigma, 10 (1). Pág. 32-37
http://coes.udenar.edu.co/revistasigma/articulos/Volúmen X No 1/3.pdf

REVISTA SIGMA
Departamento de Matemáticas
Universidad de Nariño

Volumen X N° 1 (2010), páginas 32–37

Derivación, el Teorema de Rolle y del Valor Medio para funciones de una Variable Compleja

Richard Alexander De la cruz Guerrero [1]

Abstract. In this paper we shows some basic concepts of derivation for functions of one complex variable. Also shown are some versions of Rolle's Theorem and Mean Value Theorem for function of one complex variable.

Keywords. Holomorphic functions, Cauchy-Riemann equations, Rolle's Theorem, Mean Value Theorem.

Resumen. En este artículo se exponen algunos conceptos básicos de derivación para funciones de una variable compleja. También se muestran algunas versiones del Teorema de Rolle y del Valor Medio para funciones de una variable compleja.

Palabras Clave. Función Holomorfa, Ecuaciones de Cauchy-Riemann, Teorema de Rolle, Teorema del Valor Medio.

Introducción

La actual teoría de funciones de variable compleja necesita de un amplio dominio de las matemáticas. El concepto de número imaginario, y después de complejo, se conocía desde tiempos remotos. Durante los siglos XVII y XVIII se establecieron de forma significativa importantes aplicaciones de los números complejos en diversas ramas de la ciencia.

Cauchy en sus primeros trabajos, publicados en 1825, aplicó las cantidades imaginarias al cálculo de integrales definidas, formulando el conocido *teorema integral*. En los años siguientes, 1826 a 1829, creó la teoría de los residuos, desarrollándola en años posteriores y buscando nuevas aplicaciones. Junto a los trabajos de Cauchy surgieron otros muchos sobre la teoría de funciones de variable compleja, entre los que cabe mencionar los realizados por Abel, Jacobi, Laurent y Liouville.

Los resultados fundamentales de Riemann aparecen en su obra *"Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse"*.
A partir de las ideas de Riemann, surgieron gran cantidad de trabajos cuyos autores elaboraron diferentes aspectos de la teoría de funciones de variable compleja.

[1] Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia

A finales de siglo XIX y comienzos del siglo XX, se unifican algunos conceptos creando una concepción general de la teoría de funciones de variable compleja.

En este articulo, de forma análoga al calculo de funciones reales se trata de desarrollar las nociones de derivación de funciones de variable compleja basados en concepto fundamental de límite. Ademas, se estudia algunas propiedades de la derivación de funciones de variable compleja mostrando, en cierto sentido, su similitud con las propiedades de la derivación de funciones de variable real.

Definición 0.1. Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y $f : \Omega \in \mathbb{C}$. Se dice que f es derivable en $z_0 \in \Omega$, si

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \tag{0.1}$$

existe y es un número complejo. A dicho limite lo notaremos con $f'(z_0)$ y diremos que es la derivada de f en z_0.

Si f es derivable en cada punto de Ω se dice que f es derivable en Ω y en cuyo caso se dice que f es una *función Holomorfa*. Note que si f es diferenciable en Ω entonces $f'(z)$ define una función $f' : \Omega \to \mathbb{C}$ y de este modo si f' es continua entonces se dice que f es *continuamente diferenciable*. Si f' es diferenciable entonces f es dos veces diferenciable; una función diferenciable tal que cada derivada sucesiva es nuevamente diferenciable se llama *infinitamente diferenciable*. Diremos que f es holomorfa en z si es holomorfa en un entorno de z.

Nota. Podemos observar que si f y g son funciones holomorfas, $f + g$ y fg también son holomorfas.

Teorema 0.2. *Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es diferenciable en un punto z_0 de Ω entonces f es continua en z_0.*

Demostración. De hecho,

$$\lim_{z \to z_0} |f(z) - f(z_0)| = \left[\lim_{z \to z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} \right] \left[\lim_{z \to z_0} |z - z_0| \right] = f'(z_0) \times 0 = 0$$

☑

Teorema 0.3. *Sean f y g funciones holomorfas en Ω_1 y Ω_2 respectivamente, y suponga que $f(\Omega_1) \subseteq \Omega_2$. Entonces $g \circ f$ es holomorfa en Ω_1 y*

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z)$$

para cada z en Ω_1.

Demostración. Fijando $z_0 \in \mathbb{C}$, sea $w_0 = f(z_0)$.
De la hipótesis,

$$f(z) - f(z_0) = [f'(z_0) + \epsilon_1(z)]\,(z - z_0), \tag{0.2}$$

$$g(w) - g(w_0) = [g'(w_0) + \epsilon_2(w)]\,(w - w_0), \tag{0.3}$$

con $\epsilon_1(z) \to 0$ cuando $z \to z_0$, $\epsilon_2(w) \to 0$ cuando $w \to w_0$ y $w = f(z)$.
Sustituyendo (0.2) en (0.3) se obtiene el resultado buscado. ☑

Lema 0.4. *Suponga que $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ una biyección, $g : \Omega_2 \to \Omega_1$ la función inversa de f y $z_0 \in \Omega_2$. Si f es diferenciable en $g(z_0)$ con $f'(g(z_0))$ y g continua en z_0 entonces g es diferenciable en z_0 con*

$$g'(z_0) = \frac{1}{f'(g(z_0))} \tag{0.4}$$

Demostración. Para $z_0 \in \Omega_2 \setminus \{z_0\}$ se tiene

$$\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0} = \frac{1}{\frac{f(g(z))-f(g(z_0))}{g(z)-g(z_0)}}$$

Como g es continua en z_0, el límite de la parte derecha de la ultima expresión cuando $z \to z_0$ existe y

$$\lim_{z\to z_0} \frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0} = \lim_{w\to w_0} \frac{1}{\frac{f(w)-f(w_0)}{w-w_0}} = \frac{1}{f'(w_0)}$$

con $w_0 = g(z_0)$. ☑

Es claro que si f' existe en algún punto z_0 entonces

$$\lim_{h\to 0, h\in\gamma} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$

existe para todo camino $\gamma \subset \Omega$. En este sentido, en particular, podemos tomar como camino el eje real y afirmar que para $z_0 = x_0 + iy_0$ y $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0). \tag{0.5}$$

De forma similar, tomando ahora, el eje imaginario como camino

$$f'(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0). \tag{0.6}$$

Las ecuaciones (0.5) y (0.6) nos permite escribir $f'(z_0)$ en términos de las derivadas parciales de las funciones u y v; además proporcionan condiciones necesarias para la existencia de $f'(z_0)$.
La *existencia* de $f'(z_0)$ exige que

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) \end{cases} \tag{0.7}$$

Las ecuaciones (0.7) son llamadas *Ecuaciones de Cauchy-Riemann*.

Teorema 0.5. *Sea $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ para $z = x + iy$. Supongamos que $f'(z_0)$ existe en un punto $z_0 = x_0 + iy_0$. Entonces las primeras derivadas parciales de u y v existen en el punto (x_0,y_0) y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en dicho punto.*
Además, $f(z_0)$ se puede expresar como

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0).$$

1. Algunas versiones del Teorema de Rolle y del Valor Medio para funciones de Variable Compleja

Como es conocido el clásico teorema de Rolle de funciones a variable real no es valido para funciones de variable compleja (Holomorfas), por ejemplo, si $f(z) = e^z - 1$ entonces $f(i2k\pi) = 0$ para cada $k \in \mathbb{Z}$, pero $f'(z)$ no tiene ceros en el plano complejo.
En 1930, Jean Dieudonné estableció condiciones necesarias y suficientes para la existencia de ceros de $f'(z)$ en el interior de un círculo de diámetro ab cuando f es holomorfa y $f(a) = f(b) = 0$. En 1992, J.Evard y F.Jafari muestran una versión del Teorema de Rolle para funciones holomorfas en el sentido de los ceros de la función y los ceros de la parte real de la derivada de la función o los ceros de la función y los ceros de la parte imaginaria de la derivada de la función.
Recientemente, J-P.Pemba , A.R. Davies y N. E. Muoneke (2007) han logrado conseguir una nueva versión del teorema de Rolle para funciones holomorfas en la cual no son necesarios los ceros de f.

Notación. Por $]a, b[$ denotamos el conjunto de números complejos

$$]a, b[:= \{z \in \mathbb{C} : z = a + (a - b)t \quad , \quad t \in (0, 1)\}$$

Teorema 1.1 (**Una primera versión del Teorema de Rolle**). *Sea f una función holomorfa definida en un subconjunto abierto conexo D_f de $\mathbb{C}$. Sean $a, b \in D_f$ tales que $f(a) = f(b) = 0$ y $a \neq b$. Entonces existen $z_1, z_2 \in]a, b[$ tal que $Re(f'(z_1)) = 0$ y $Im(f'(z_2)) = 0$.*

Demostración. (J.Evard y F.Jafari ; 1992) Sean $a_1 = Re(a), a_2 = Im(a), b_1 = Re(b), b_2 = Im(b), u(z) = Re(f(z))$ y $v(z) = Im(f(z))$ para cada $z \in D_f$.
Consideremos la función a valor real

$$\phi(t) = (b_1 - a_1)u(a + t(b - a)) + (b_2 - a_2)v(a + t(b - a)) \tag{1.1}$$

para cada $t \in [0, 1]$. Puesto que $f(a) = f(b) = 0$ tenemos $u(a) = u(b) = 0 = v(a) = v(b)$ y en consecuencia $\phi(0) = 0 = \phi(1)$. Por el Teorema de Rolle, existe $t_1 \in (0, 1)$ tal que $\phi'(t_1) = 0$. Sea $z_1 = a + t_1(b - a)$ entonces por condiciones de Cauchy-Riemann se tiene

$$0 = \phi'(t_1) = \frac{\partial u}{\partial x}(z_1)\left[(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2\right] \tag{1.2}$$

de donde

$$Re(f'(z_1)) = \frac{\partial u}{\partial x}(z_1) = 0 \tag{1.3}$$

Aplicando la primera parte del teorema a la función $g = -if$ vemos que existe un $z_2 \in]a, b[$ tal que

$$0 = Re(g'(z_2)) = \frac{\partial v}{\partial x}(z_2) = -\frac{\partial u}{\partial y}(z_2) = Im(f'(z_2)) \tag{1.4}$$

☑

Teorema 1.2. *Sea f una función holomorfa definida sobre un conjunto abierto conexo $D_f \subseteq \mathbb{C}$. Sean a y b dos puntos distintos de D_f. Entonces existen $z_1, z_2 \in]a, b[$ tales que*

$$Re\left(f'(z_1)\right) = Re\left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right) \quad y \quad Im\left(f'(z_2)\right) = Im\left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right)$$

Demostración. Es una consecuencia directa de aplicar el Teorema 1.1 a la función

$$g(z) = f(z) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(z - a).$$

☑

Teorema 1.3 (Una segunda versión del Teorema de Rolle). *Sea f una función diferenciable de valor complejo definida sobre un camino conexo y abierto de $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Sean $a, b \in \Omega$ dos puntos distintos tales que $f(a) = f(b)$. Para cualquier camino suave simplemente conexo $\Gamma \subset \Omega$ que une los puntos a con b con parametrización canónica γ entonces existe algún $z_0 \in \Gamma$ tal que $f'(z_0)\gamma\,'\left(\gamma^{-1}(z_0)\right) \cdot (b - a) = 0$.*

Demostración. (J-P.Pemba , A.R. Davies y N. E. Muoneke ; 2007) Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función diferenciable y $\gamma : [0, 1] \to \Gamma$ una parametrización suave de $\Gamma \subset \Omega$ con $\gamma(0) = a$ y $\gamma(1) = b$.
Se define $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$ como $h(t) = f(\gamma(t)) \cdot (b - a)$ donde $\cdot$ denota el producto escalar del espacio de Hilbert $\mathbb{C}$.
Ademas, h es suave en $(0, 1)$, continua en $[0, 1]$ y como $f(\gamma(0)) = f(a) = f(b) = f(\gamma(1))$ de lo cual $h(0) = h(1)$ y por el Teorema de Rolle existe $t_0 \in (0, 1)$ con $z_0 = \gamma(t_0) \in \Gamma$ tal que

$$f'(z_0)\gamma\,'\left(\gamma^{-1}(z_0)\right) \cdot (b - a) = 0$$

☑

Teorema 1.4. *Sea f una función diferenciable de valor complejo definida sobre un camino conexo y abierto de $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Sean $a, b \in \Omega$ dos puntos distintos. Para cualquier camino suave simplemente conexo $\Gamma \subset \Omega$ que une los puntos a con b con parametrización canónica γ entonces existe algún $z_0 \in \Gamma$ tal que*

$$\left[f'(z_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right]\gamma\,'\left(\gamma^{-1}(z_0)\right) \cdot (b - a) = 0.$$

Demostración. (J-P.Pemba , A.R. Davies y N. E. Muoneke ; 2007) Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función diferenciable y $\gamma : [0, 1] \to \Gamma$ una parametrización suave de $\Gamma \subset \Omega$ con $\gamma(0) = a$ y $\gamma(1) = b$.
Se define

$$H_f(z) = f(z) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(z - a)$$

cuyo Jacobiano esta dado por

$$DH_f(z) = Df(z) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(z) - Re\left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right] & \frac{\partial v}{\partial x}(z) - Im\left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right] \\ \\ \frac{\partial u}{\partial y}(z) - Re\left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right] & \frac{\partial v}{\partial y}(z) - Im\left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right] \end{pmatrix}$$

donde u y v denotan, respectivamente, la parte real e imaginaria de f, $z = x + iy$, $H_f(a) = 0 = H_f(b)$. Del Teorema 1.3 tenemos

$$\left(DH_f(z_0)\right)\gamma\,'\left(\gamma^{-1}(z_0)\right) \cdot (b - a) = 0$$

☑

Referencias

[1] Ahlfors, L.V., *Complex Analysis*, McGraw-Hill, Third Edition, 1979.

[2] Conway, J.B., *Functions of One Complex Variable*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, Second Edition, 1978.

[3] Evard, J. C. and Jafari, F., *A complex Rolle's theorem*, Amer. Math. Monthly 99., No. 9 (1992) pp. 858-861.

[4] Evard,J-C., Jafari, F. and Polyakov, P. *Generalizations and applications of a complex Rolle's theorem*, Nieuw Archief voor Wiskunde 13, (1995), Math. Sci. Net., pp. 173 - 180.

[5] Lang, S. *Complex Analysis*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, Fourth Edition, 1999.

[6] Pemba, J-P. , Davies,A. R. and Muoneke, N. E. *A Complexification of Rolle's Theorem*, Applications and Applied Mathematics (AAM): An International Journal, Vol.2, No 1 (2007), pp. 28-31.

[7] Rudin, W., *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill Book Co., 1970.

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad de Nariño
++++++++++++++++++++++++++++++
e-mail: richard.delacruz@uptc.edu.co