

CENTROIDES DE LOS TRIÁNGULOS ASOCIADOS A UN CUADRILÁTERO

Oscar Fernando Soto ¹

Libardo Manuel Jácome ²

Abstract. It is fascinating to do observations of the properties of a quadrilateral when the centroids of the triangles formed by the sides and the diagonals of the same are incorporated. To explore relations of equality, proportionality and numerical information like areas and perimeters with the geometric assistant Cabri, dragging the points at random and studying the relations that happen with this information. This activity of playing with the elements of a geometric figure allows to throw hypotheses of what it is observed, making the corresponding ocular inspection; and what it is seen is order in the chaos. Chaos because a quadrilateral is formed by any four points in a plane, where neither three nor four can be collinear. And order because it appears harmonious results as those of proportionality, equality, etc.

Keywords. Cabri, points, proportionality, relations, triangles, quadrilateral

Resumen: Es fascinante realizar observaciones de las propiedades de un cuadrilátero cuando se incorporan los centroides de los triángulos formados por los lados y las diagonales del mismo. Explorar relaciones de igualdad, proporcionalidad, datos numéricos como áreas, perímetros con el asistente geométrico Cabri, arrastrando los puntos al azar y estudiando las relaciones que ocurren con estos datos, esta actividad de jugar con los elementos de una figura geométrica permite lanzar hipótesis de lo que se observa realizando la correspondiente inspección ocular, y lo que se mira es orden en el caos. Caos porque un cuadrilátero se forma por cuatro puntos cualesquiera en un plano, donde ni tres ni cuatro pueden ser colineales. Y orden porque aparecen resultados armoniosos como los de proporcionalidad, igualdad etc.

Palabras Clave. Cabri, puntos, proporcionalidad, relaciones, triángulos, cuadriláteros.

1. Cuadrilátero imagen semejante al cuadrilátero dado

Sea el cuadrilátero $ABCD$ y los puntos E, F, G, H correspondientes a los triángulos $\triangle ABC$, $\triangle BCD$, $\triangle CDA$, $\triangle DAB$ respectivamente, se forma el que se denominará cuadrilátero ima-

¹ Docente del Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad de Nariño. Email: fsoto@udenar.edu.co, Colombia.

² Docente del Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad de Nariño. Email: elo@udenar.edu.co, Colombia.

Aproximaciones iniciales a la resolución lineales de tres variables en programación de problemas modelados con sistemas de ecuaciones lineal usando por vez un método gráfico

gen formado por los centros de gravedad de los triángulos mencionados y que resulta semejante al cuadrilátero inicial $ABCD$.

Sean I, J, K, L los puntos medios de los lados $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$ en ese orden.

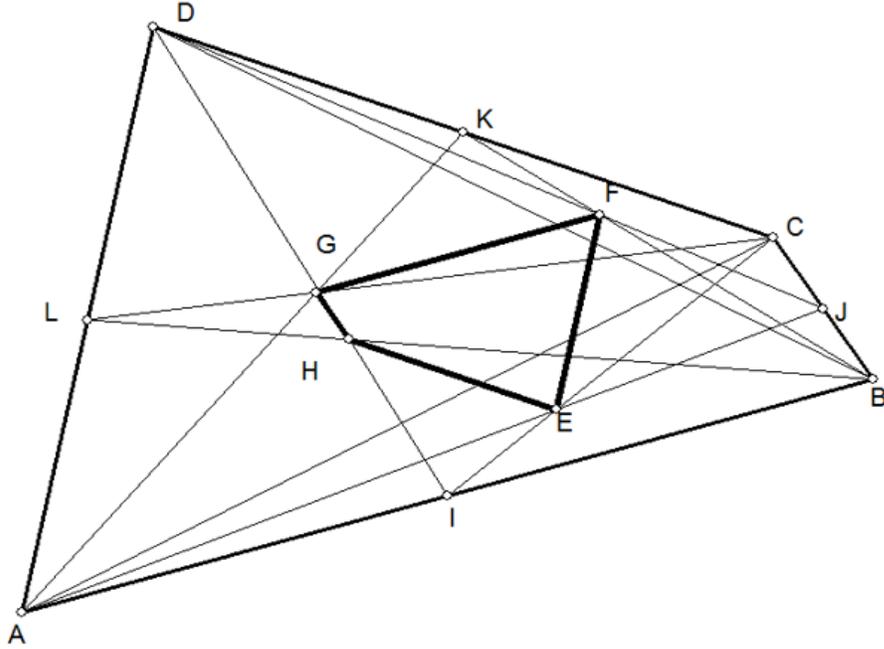


Figura 1

Se considera el triángulo $\triangle ABK$. Como F es el centroide del triángulo $\triangle BCD$ se tiene $K = \frac{1}{3}BK$, por ser G centroide del triángulo $\triangle CDA$ se cumple que $GK = \frac{1}{3}AK$. Ahora, al considerar los triángulos; $\triangle ABK, \triangle GFK$ se observa que $\frac{GK}{AK} = \frac{\frac{1}{3}AK}{AK} = \frac{1}{3}$ y $\frac{FK}{BK} = \frac{\frac{1}{3}BK}{BK} = \frac{1}{3}$ de donde $\frac{GK}{AK} = \frac{FK}{BK}$ además el ángulo $\angle AKB$ es común a los dos triángulos. Por tanto se puede concluir que $\triangle ABK \cong \triangle GFK$ caso $L - A - L$.

De manera similar se puede probar que $\overline{HG}, \overline{BC}, \overline{EF}, \overline{AD}, \overline{EH}, \overline{CD}$ como también $EF = \frac{1}{3}AD, EH = \frac{1}{3}CD$. Esto trae como consecuencia que los cuadriláteros $ABCD, EHGF$ son semejantes y que $EH + HG + GF + FE = \frac{1}{3}CD + \frac{1}{3}BC + \frac{1}{3}AB + \frac{1}{3}AD = \frac{1}{3}(CD + BC + AB + AD)$ es decir, $P = \frac{1}{3}P$, esto es, la relación entre los perímetros de los cuadriláteros preimágen e imagen es de tres a uno.

Llamando al área del cuadrilátero $ABCD$ y β al área del cuadrilátero $EFGH$ se tiene que $\beta = \frac{1}{9}\alpha$.

2. Recubriendo el cuadrilátero dado

De lo anterior también se puede decir que con 9 cuadriláteros $EFGH$ se puede recubrir el cuadrilátero $ABCD$.

Esto podría conducir a ubicar sobre el cuadrilátero $ABCD$ uno a uno el cuadrilátero $EFGH$ y daría lugar a la siguiente gráfica.

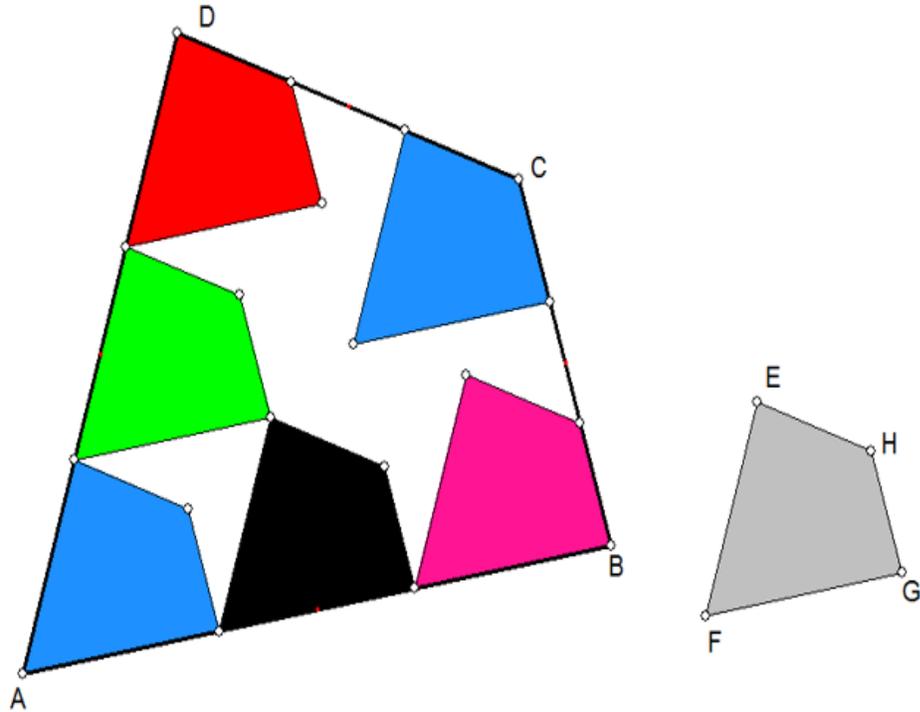


Figura 2

Se pueden encajar 6 cuadriláteros, pero hacer calzar los otros 3 y este trabajo no es claro. En el caso que se trate de un trapecio se pueden encajar 8 trapecios como lo muestra la figura adjunta.



Figura 3

Cuando se trata de un paralelogramo todos los 9 paralelogramos encajan a la perfección.

Aproximaciones iniciales a la resolución lineales de tres variables en programación de problemas modelados con sistemas de ecuaciones lineal usando por vez un método gráfico

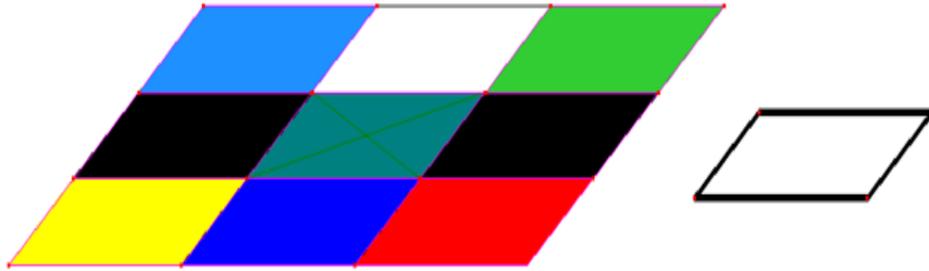


Figura 4

Sin embargo si se dividen los triángulos por las diagonales $\overline{BD}, \overline{GE}$, se trisecan los lados del triángulo $\triangle ABD$ y su diagonal \overline{BD} y se trazan los segmentos correspondiente como lo muestra la figura 3 y se ve claramente que con 9 triángulos como el $\triangle FGE$ se recubre totalmente el triángulo $\triangle ABD$ y que con 9 triángulos como el $\triangle GHE$ se recubre totalmente el triángulo $\triangle ABC$.

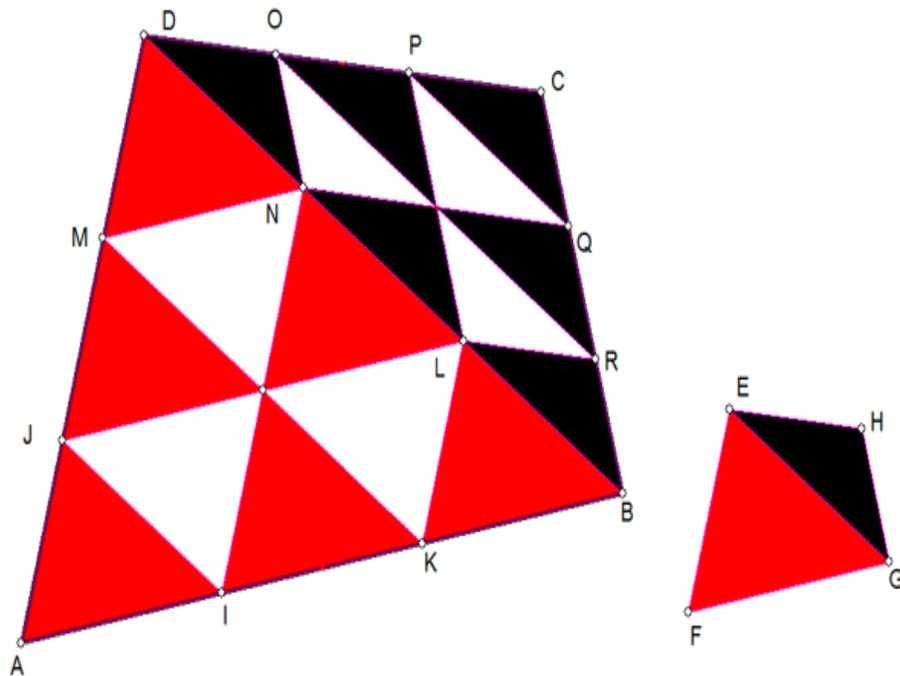


Figura 5

3. Rectas bisecadoras

Otro resultado que se observa es que la recta que biseca a los lados opuestos del cuadrilátero dado, biseca a los lados opuestos correspondientes del rectángulo imagen.

Sean X, Y los puntos medios de los lados $\overline{AB}, \overline{CD}$ respectivamente, U, V los puntos de corte de la recta \overleftrightarrow{XY} con los segmentos $\overline{FG}, \overline{EH}$.

Se ha demostrado que $\overline{GF} \parallel \overline{AB}$ entonces es fácil ver que $\triangle AXY \sim \triangle GUY$ y $\triangle XBY \sim \triangle UFY$.

De la primera semejanza se obtiene $\frac{AX}{GU} = \frac{XY}{UY}$, de la segunda $\frac{XB}{UF} = \frac{XY}{UY}$, de donde $\frac{AX}{GU} = \frac{XB}{UF}$ pero $AX = XB$ y por tanto $GU = UF$.

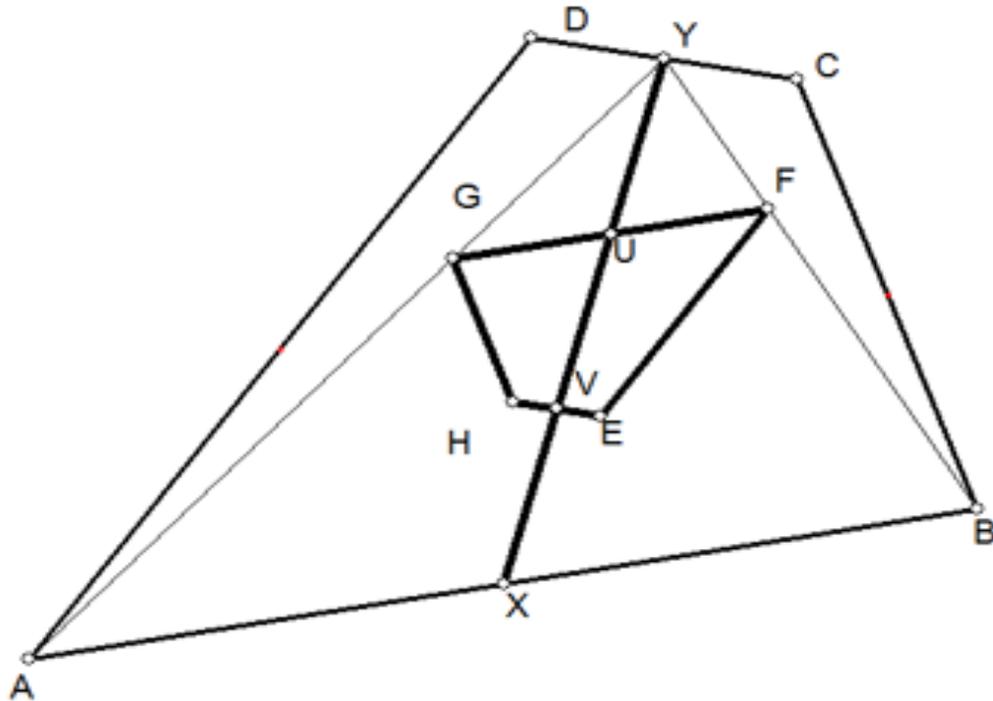


Figura 6

De manera similar se prueba el otro caso.

4. Cuadrilátero central como producto de una homotecia por una reflexión en un punto

Volviendo a los cuadriláteros $ABCD, EFGH$, se trazan las diagonales $\overline{EG}, \overline{FH}$ que se cortan en el punto M que es el centroide de $ABCD$. Sea φ_M la reflexión en el punto M . Entonces se obtiene:

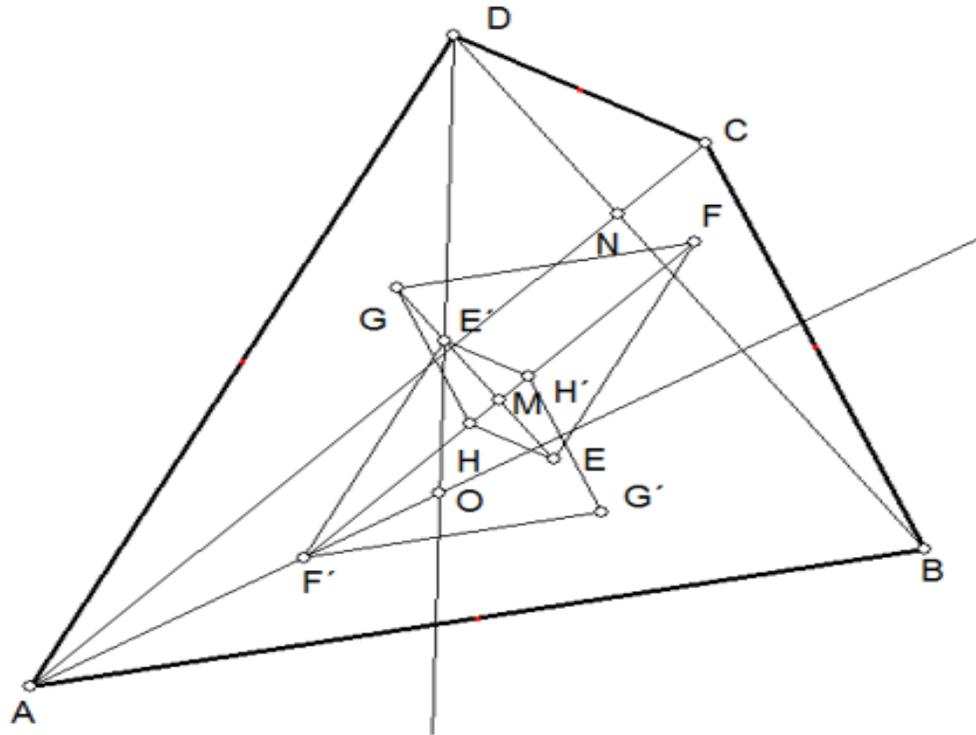


Figura 7

$$\varphi_M(E) = E', \varphi_M(F) = F', \varphi_M(M) = M', \varphi_M(H) = H'.$$

Se trazan las rectas $\overleftrightarrow{AF'}$, $\overleftrightarrow{DE'}$ que se cortan en el punto O, se puede considerar la homotecia λ de centro O y coeficiente $K = \frac{1}{3}$ y luego una reflexión en el punto M del cuadrilátero ABCD.

Se denominará ϕ a la semejanza directa $\varphi_M \circ \lambda$.

5. Colinealidad

O es punto fijo según la definición de λ entonces también lo es para λ^{-1} .

$\lambda^{-1}(\overleftrightarrow{F'G'}) = \overleftrightarrow{AC}$, $\lambda^{-1}(\overleftrightarrow{E'G'}) = \overleftrightarrow{BD}$, $\overleftrightarrow{F'H'} \cap \overleftrightarrow{E'G'} = M$, $\lambda^{-1}(M) = N$ es decir los puntos O, M, N son colineales.

6. Sucesión de cuadriláteros

Si en cuadrilátero imagen se procede a encontrar los centroides de los triángulos asociados como en el primer caso se determina otro cuadrilátero imagen. Si se continúa indefinidamente este proceso, se genera una sucesión de cuadriláteros a los cuales se les puede calcular el área y el perímetro y como estos datos son decrecientes se puede calcular la suma de las áreas y perímetros resultantes.

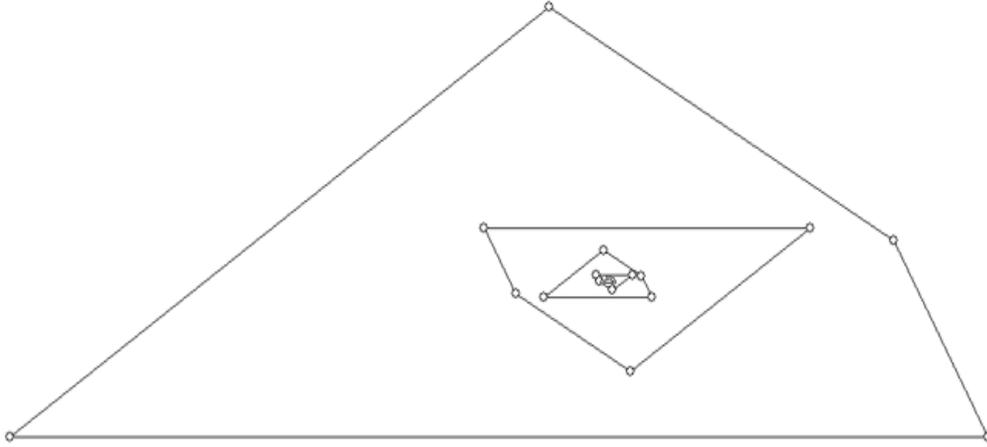


Figura 8

Suma de las áreas

$$\alpha + \frac{1}{9}\alpha + \frac{1}{9^2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9^{n-1}}\alpha = \frac{9}{8}\alpha.$$

Suma de los perímetros

$$P + \frac{1}{3}P + \frac{1}{3^2}P + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}}P = \frac{3}{2}P.$$

7. Otros centroides

En el cuadrilátero $ABCD$, sea O el punto de corte de las diagonales \overline{AC} , \overline{BD} y E, F, G, H los centroides de los triángulos $\triangle ABO, \triangle BCO, \triangle CDO, \triangle DAO$. Los puntos mencionados determinan un paralelogramo.

En el $\triangle MND$ tiene $HD = \frac{1}{3}MD, GD = \frac{1}{3}ND$ de donde $\frac{HD}{MD} = \frac{GD}{ND}$ luego $\overline{HG} \parallel \overline{AC}$.

De manera semejante se demuestra que $\overline{EF} \parallel \overline{AC}$, entonces $\overline{EF} \parallel \overline{HG}$. Así mismo se prueba que $\overline{EH} \parallel \overline{FG}$.

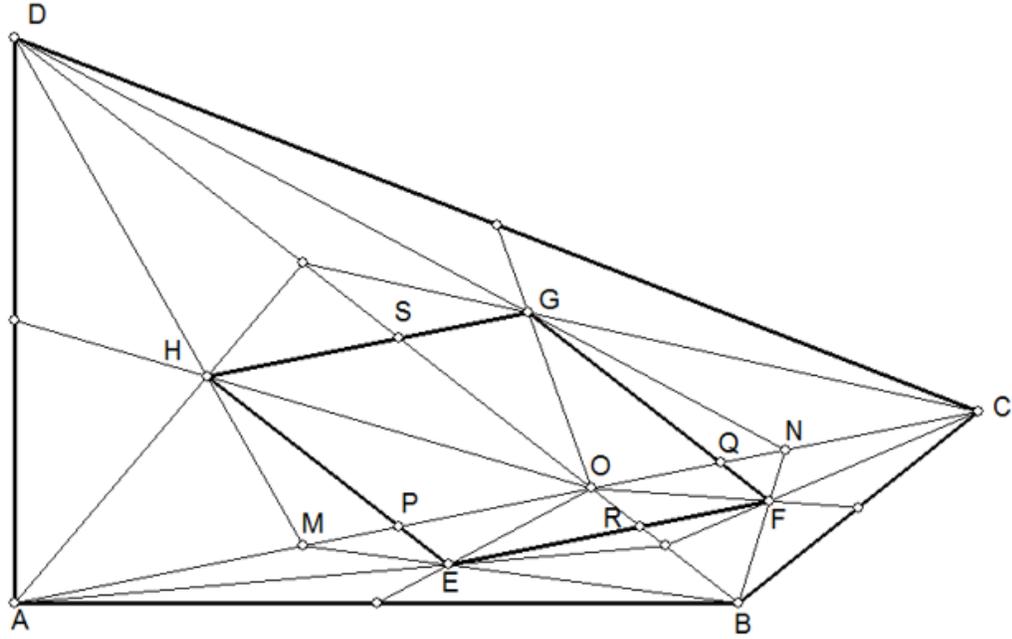


Figura 9

Es fácil ver que $\triangle PMH \sim \triangle OMD \sim \triangle SHD$ y que $\triangle NQG \sim \triangle NOD \sim \triangle GSD$ de donde se desprende que $\alpha(\triangle PMH) = \frac{1}{9}\alpha(\triangle OMD)$, $\alpha(\triangle PMH) = \frac{1}{4}\alpha(\triangle SHD)$.

$$\alpha(\square POSH) = 9\alpha(\triangle PMH) - 5\alpha(\triangle PMH) = 4\alpha(\triangle PMH) = \frac{4}{9}\alpha(\triangle OMD) = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2}\alpha(\triangle OAD) = \frac{2}{9}\alpha(\triangle OAD).$$

De igual manera se concluye que

$$\alpha(\square QOSQ) = \frac{2}{9}\alpha(\triangle COD), \alpha(\square OPER) = \frac{2}{9}\alpha(\triangle AOB), \alpha(\square QORF) = \frac{2}{9}\alpha(\triangle BOC)$$

$$\alpha(\square EFGH) = \frac{2}{9}\alpha(\triangle OAD) + \frac{2}{9}\alpha(\triangle COD) + \frac{2}{9}\alpha(\triangle ADB) + \frac{2}{9}\alpha(\triangle BOC) =$$

$$\frac{2}{9}(\alpha(\triangle AOD) + \alpha(\triangle COD) + \alpha(\triangle AOB) + \alpha(\triangle BOC)) = \frac{2}{9}\alpha(\square ABCD).$$

Perímetro del paralelogramo $ABCD$

$$ER = PO = \frac{1}{3}AO = HS, RF = OQ = \frac{1}{3}OC = GS, FQ = RO = \frac{1}{3}BO = PE, QG = OS = \frac{1}{3}OD = HP.$$

$$P(\square EFGH) = EF + FG + GH + HA = 2EF + 2FG = 2(ER + RF) + 2(FQ + QG) = 2(\frac{1}{3}AO + \frac{1}{3}OC) + 2(\frac{1}{3}BO + \frac{1}{3}OD) = \frac{2}{3}AC + \frac{2}{3}BD = \frac{2}{3}(AC + BD).$$

Al igual que en el caso anterior si en el cuadrilátero imagen se procede a encontrar los centroides de los triángulos asociados se determina otro cuadrilátero imagen. Si se continúa indefinidamente este proceso se genera una sucesión de cuadriláteros a los cuales se les puede calcular el área y como estos datos son decrecientes se puede calcular la suma de las áreas resultantes.

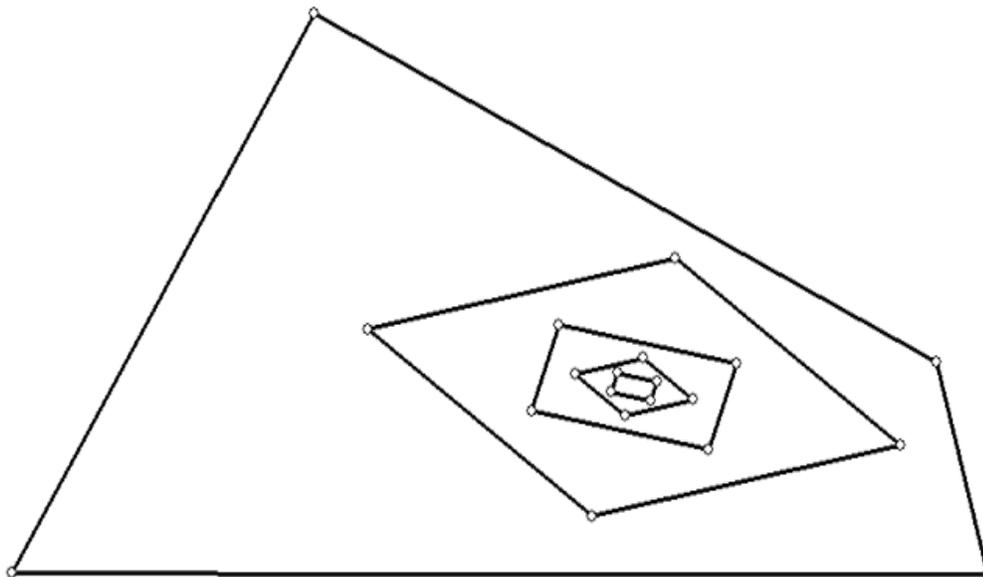


Figura 10

$$\alpha + \left(\frac{2}{9}\right)\alpha + \left(\frac{2}{9}\right)^2\alpha + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{9}\right)^n \alpha \text{ con } \alpha = \frac{9}{7}\alpha$$

Se denotan como R_1, R_2, R_3, \dots los rectángulos de la sucesión anterior. A partir del segundo rectángulo se observa que las figuras son paralelogramos y que aparecen dos subsucesiones muy importantes a saber:

R_2, R_4, R_6, \dots y R_3, R_5, R_7, \dots

Cada una de estas subsucesiones está formada por paralelogramos semejantes donde los lados homólogos son paralelos.

Aproximaciones iniciales a la resolución lineales de tres variables en programación de problemas modelados con sistemas de ecuaciones lineal usando por vez un método gráfico

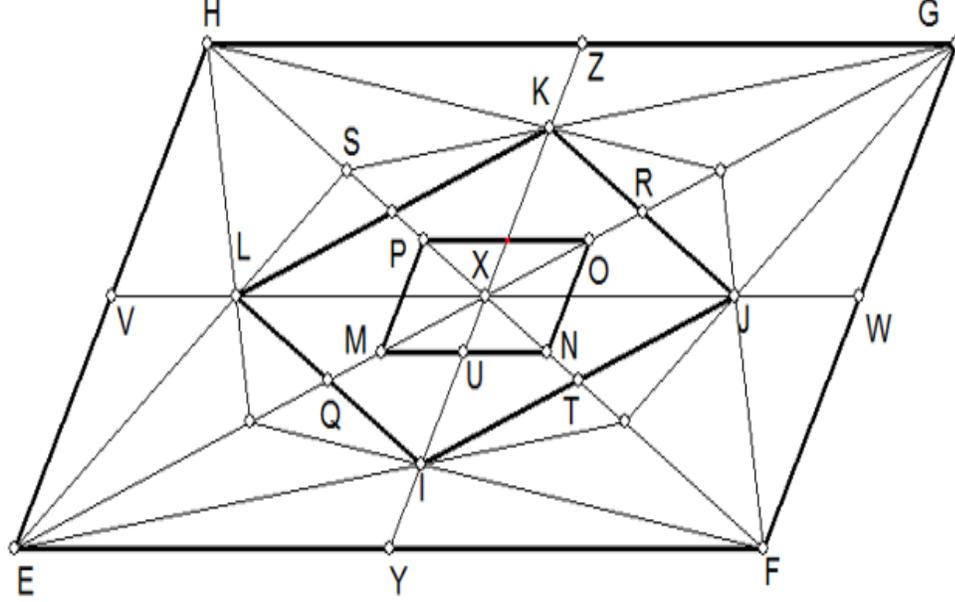


Figura 11

Se puede afirmar que las diagonales de los paralelogramos de la primera sucesión bisecan los lados de los paralelogramos de la segunda sucesión.

$$\overline{LK} \parallel \overline{EG} \Rightarrow \triangle EXS \sim \triangle LPS, \triangle GXK \sim \triangle KPS \Rightarrow \frac{EX}{LP} = \frac{SX}{SP}, \frac{GX}{KP} = \frac{SX}{SP}$$

$$\therefore \frac{SX}{SP} = \frac{GX}{KP} \Rightarrow LP = KP.$$

Lo mismo se realiza para los demás lados.

$$XM = \frac{2}{3}XQ = \frac{2}{3}IT = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}IJ = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}EG = \frac{2}{9}EX, \frac{XM}{EX} = \frac{2}{9}$$

$$XN = \frac{2}{3}XT = \frac{2}{3}QI = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}LI = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}FH = \frac{2}{9}FX, \frac{XN}{FX} = \frac{2}{9}$$

$\frac{XM}{EX} = \frac{XN}{FX}$ Y $\angle EXF$ es común a los triángulos $\triangle EFX, \triangle MNX$ entonces $\overline{MN} \parallel \overline{EF}$ y así con los demás lados homólogos.

$$\text{Ahora } MN = \frac{1}{3}LJ = \frac{1}{3}(LX + XJ) = \frac{1}{3}(\frac{2}{3}VX + \frac{2}{3}WX) = \frac{2}{9}(VX + WX) = \frac{2}{9}VW = \frac{2}{9}EF$$

$$MP = \frac{1}{3}IK = \frac{1}{3}(IX + XK) = \frac{1}{3}(\frac{2}{3}YX + \frac{2}{3}XZ) = \frac{2}{9}(YX + XZ) = \frac{2}{9}YZ = \frac{2}{9}EH$$

Esto significa que los paralelogramos $\square EFGH, \square MNOP$ son semejantes.

En este caso el paralelogramo $\square MNOP$ se obtiene aplicando una homotecia λ de centro X y coeficiente $\frac{2}{9}$.

$$p_1(\square EFGH) = P(R_2) = 2EF + 2EH = 2(EF + EH) = p_1$$

$$p_2(\square MNOP) = P(R_4) = 2MN + 2MP = 2(MN + MP) = p_2 = 2(\frac{2}{9}EF + \frac{2}{9}EH) = \frac{2}{9}(2EF + 2EH) = \frac{2}{9}P_1.$$

Generalizando se tiene:

$$P_N(R_{2N}) = \left(\frac{2}{9}\right)^{N-1} P_1$$

$$P_1 + P_2 + P_3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} P_1 \text{ con } P_1 = \frac{9}{7} P$$

$$\rho_1(\square IJKL) = \rho_1(R_3) = 2IJ + 2IL = 2(IJ + IL) = \rho_1 = 2\left(\frac{1}{3}EG + \frac{1}{3}FH\right)$$

$$\rho_2(R_5) = \frac{2}{9}\rho_1 \text{ y generalizando } \rho_n(R_{2n+1}) = \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} \rho_2(R_5) = \frac{2}{9}\rho_1$$

$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} \rho_1.$$

8. Comentario

Se puede investigar con polígonos de 5 lados en adelante y hallar los centroides, circuncentros, incentros, ortocentros asociados al polígono y observar, escudriñar las propiedades que tiene la figura imagen con respecto al inicial o con respecto a ella misma si es que las tiene y una vez establecida la hipótesis proceder a la demostración formal.

Estos resultados que se revisten de curiosidad dejan entrever la fuerte articulación y conexión que poseen los diferentes tipos de geometría, el tema estudiando relaciona el modelo sintético con el analítico y con la geometría de transformaciones.

Referencias

- [1] Palacios, E. *Geometría*. Universidad del Valle. Cali. 1977.
- [2] Hemmerling, E. *Geometría elemental*. Limusa. México 2005.
- [3] Guerrero, A. *Geometría en el plano y en el espacio*. Universidad Nacional. 2002.
- [4] Piskunov, N. *Cálculo diferencial e Integral*. Tomo 2. Mir. Moscú. 1977.
- [5] Takeuchy, Y. *Sucesiones y series*. Tomo I. Limusa. Mexico. 1976.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
UNIVERSIDAD DE NARIÑO
e-mail: fsoto@udenar.edu.co
e-mail: elo@udenar.edu.co