Sánchez, E.A., 2013. Razones, proporciones y proporcionalidad en términos de variación y correlación entre magnitudes. Revista Sigma. 11(1). Pag. 10-25
http://revistasigma.udenar.edu.co/articulos/Volúmen XI 1/1.pdf

REVISTA SIGMA
Departamento de Matemáticas
Universidad de Nariño

Volumen XI Nº 1(2013) , páginas 10-25

Razones, proporciones y proporcionalidad en términos de variación y correlación entre magnitudes[1]

Eruin Alonso Sánchez Ordoñez [2]

Abstract. In the mathematics curriculum of Colombia traditionally ratios, proportions and proportionality are taught to focuses on the algorithm and privileging the numerical, ignoring or weakly connecting these objects of mathematical knowledge with the variational, essentially with relationships and functions. This paper examines the practice systems made by seventh grade of basic education, girls and boys between 11 and 14 years of age in the treatment of five situations of variation and change and shows how the concepts of ratio, proportion and proportionality, are used to deal with such situations, these uses are explained from the theoretical and methodological Anthropological Theory of Didactics (hereafter TAD).
Keywords. Anthropological Theory of Didactics, practice systems; ratios, proportions and proportionality, situation of variation and change.

Resumen. En el currículo de matemáticas de Colombia tradicionalmente las razones, las proporciones y la proporcionalidad son enseñadas centrando su atención en lo algorítmico y privilegiando lo numérico, desconociendo o conectando débilmente estos objetos de conocimiento matemático con lo variacional, esencialmente con las relaciones y las funciones. En este documento se analizan los sistemas de prácticas desplegados por estudiantes de grado séptimo de educación básica, niñas y niños entre 11 y 14 años de edad, en el tratamiento de cinco situaciones de variación y cambio y se exhibe de qué manera los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad, son usados para enfrentar tales situaciones. Estos usos son explicados a partir de los fundamentos teóricos y metodológicos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (en adelante TAD).
Palabras Claves. Teoría Antropológica de lo Didáctico; sistemas de prácticas; razones proporciones y proporcionalidad; situaciones de variación y cambio.

1. Introducción

La experiencia profesional y de enseñanza muestra que es poco adecuado que las razones, las proporciones y la proporcionalidad se aborden, preponderantemente, desde contextos y situaciones que aluden al pensamiento numérico y que en dicho tratamiento se establezcan pocas o ningunas conexiones con el pensamiento variacional. Igualmente esta experiencia permitió observar que el acceso a estos objetos podría hacerse mejor desde lo variacional que desde la rutinización y mecanización de la definición de la razón como cociente indicado entre dos números enteros, y de la proporción como la igualdad de dos razones, para después,

[1] El documento surge del trabajo desarrollado en el proyecto del mismo nombre realizado como trabajo de tesis para optar al título de Magister en Educación. Línea Enseñanza de las Ciencias y la Tecnología, de la Universidad del Cauca
[2]Universidad del Cauca, Institución Educativa "Los Comuneros" Popayán, **eruinalonso@hotmail.com**.

habiendo visto las propiedades de las proporciones, pasar a la regla de tres (simple directa, simple inversa o compuesta) y al producto en cruz.[3]

Inicialmente se quiso estudiar el abordaje de los objetos razón, proporción y proporcionalidad desde lo curricular, es decir se pretendió analizar cómo podría plantearse una innovación curricular (Rico, 1997) que permitiera llevar las razones, las proporciones y la proporcionalidad, tradicionalmente ubicadas en el pensamiento numérico[4] al pensamiento variacional. En este sentido, cuando se analizaron los documentos Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (MEN, 2006), Pensamiento Variacional y Tecnologías Computacionales (MEN, 2004) y las conclusiones de Guacaneme (2001), se observaron indicios e indicaciones para un esbozo de propuesta de innovación curricular. Restaría entonces el diseño, concreción e implementación de dicha propuesta.

En esta investigación se pretende, pues, aportar elementos que den pautas para acercarse a la respuesta a las siguientes cuestiones ¿Cómo las razones, las proporciones y la proporcionalidad son reconocidas y manipuladas por los estudiantes en situaciones de aula? y ¿Qué ideas y nociones han construido los estudiantes a lo largo de su vida escolar y de sus experiencias cotidianas en relación a dichos objetos? Así mismo, es de interés indagar las formas de organización que en la praxis caracterizan el conocimiento matemático escolar de interés en la investigación, aspecto que permitirá proponer nuevos modos de organización y a partir de ellos, plantear innovadoras maneras de actuación en el aula de clase, que a diferencia de las tradicionales, faciliten la comprensión en los estudiantes, a la vez que aporten elementos a considerar en la enseñanza de las matemáticas.

De forma más puntual, las ideas precedentes nos llevan a plantear finalmente las siguientes cuestiones ¿Cuáles son los sistemas de prácticas[5] matemáticas que desarrollan los estudiantes en la resolución de situaciones de variación y cambio? ¿De qué manera esos sistemas dan forma a los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad?

2. Marco de referencia conceptual

Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). Para Bosh y Chevallard (1999) el análisis del conocimiento matemático como un conjunto de prácticas sociales institucionalizadas requiere de una forma de análisis que permita la descripción y el estudio de las condiciones de su realización. Dicho análisis, es lo que desde la TAD se ha denominado organización matemática (OM) o praxeología. En palabras de Espinoza y Azcárate (2000) una OM permite modelizar el conocimiento matemático como actividad humana.

Las praxeologías, propuestas por el enfoque antropológico, están compuestas de tipos de situaciones (S), problemas (π) y de técnicas (τ), las cuales constituyen la praxis o conocimientos técnicos y de tecnologías y teorías que constituirán el logos o saber. Según Espinoza y Azcárate (2000) las técnicas τ se entienden como ciertas maneras de hacer, es decir, son procedimientos que pueden ser empleados para resolver los problemas; las tecnologías θ **,** por su parte, son los discursos que sustentan, describen, explican y justifican los procesos matemáticos involucrados**,** los cuales se espera sean más adelante institucionalizados en los procesos de enseñanza y de aprendizaje y la teoría Θ se asume como el argumento formal que permite justificar rigurosamente dicha tecnología.
De lo anterior se puede determinar que los objetos de conocimiento matemático surgen de prácticas con las matemáticas ubicadas en diversos contextos geográficos y culturales, en tal sentido, D'Amore y Godino (2007); Godino, Batanero y Font (2008), entienden una práctica

[3] El hecho de que la mayor parte de ejercicios planteados por el docente fueran de proporción directa, llevó a algunos estudiantes a una "falsa generalización" de que todos los ejercicios pueden ser resueltos aplicando la regla de tres.
[4] Hay evidencias de esta ubicación tradicional en el análisis de libros de texto hecho por Guacaneme (2001).
[5] Es un concepto del Enfoque Ontosemiótico (EOS). D'Amore y Godino (2007); Godino, Batanero y Font (2008).

matemática como una actuación particular, o conjunto de actuaciones, en el abordaje de problemas matemáticos específicos (de un individuo o de una institución). Esta práctica está determinada por formas de razonar, comunicar, validar o generalizar y habitualmente no existe de manera aislada sino que está asociada a sistemas de prácticas que interaccionan entre sí.

Campos conceptuales. Para Vergnaud (1990) un campo conceptual es un conjunto de conceptos y teoremas que permiten analizar un**a** serie de situaciones. Este conjunto de conceptos y de teoremas están presentes de manera informal y a nivel previo[6] en los sujetos a través de lo que Vergnaud (1983) denominó teoremas y conceptos en acto o en acción, definidos como relaciones matemáticas que son tomadas en cuenta por los estudiantes al seleccionar una operación o una secuencia de operaciones para resolver un problema.

El campo conceptual de las estructuras multiplicativas. Vergnaud (1983, 1990, 1991, 1994, 2007) le define como el conjunto de situaciones que requieren una multiplicación, una división o una combinación de tales operaciones. Igualmente, le considera como el conjunto de conceptos (proporción simple y compuesta, función lineal, múltiplo, combinación lineal, fracción, divisor, razón, etc.) y teoremas (propiedades de isomorfismo de la función lineal y su generalización a las relaciones no enteras, propiedades que se refieren al coeficiente constante entre dos variables linealmente ligadas, y algunas propiedades específicas de la bilinealidad) que permiten analizar estas situaciones.

Razonamiento proporcional. Según Lamon (2007) este tipo de razonamiento tiene que ver con el aporte de argumentos que permitan soportar las enunciaciones hechas y que establecen las relaciones estructurales entre cuatro cantidades. Estas enunciaciones están hechas en contextos que al mismo tiempo involucran la covariación entre cantidades y la invariancia de razones o productos. Por tanto el razonamiento proporcional podría ser considerado como la habilidad que no sólo permite diferenciar la relación multiplicativa entre dos cantidades**,** sino, también como la capacidad de poder extender dicha relación a otro par de cantidades.

Los roles de la razón. En determinadas situaciones la razón puede jugar tres diferentes papeles: como relator, como operador o como correlator entre cantidades. Las definiciones que a continuación se presentan fueron tomadas de (Obando, et al., 2009)

Razón como relator. Dadas dos magnitudes M_1 y M_2, y dos cantidades de magnitud a_1 y b_1 que pertenecen a M_1 y M_2 respectivamente. Se determina una cantidad $\rho = R(a_1, b_1)$ entre las dos cantidades de magnitud dadas. Esta relación, R, es de carácter cuantitativo y se puede expresar como sigue:

$$R: M_1 \times M_2 \rightarrow Q$$
$$(a_1, b_1) \rightarrow \frac{a_1}{b_1} = \rho = R(a_1, b_1)$$

Se debe tener en cuenta que si M_1 y M_2 son magnitudes homogéneas entonces ρ es una cantidad numérica que expresa la relación parte - todo entre las dos cantidades comparadas. En este caso Q es el conjunto de los números racionales o más generalmente, los reales. Si M_1 y M_2 son magnitudes heterogéneas, entonces ρ es una cantidad con unidades, que expresa la cantidad de unidades de a_1 por cada unidad de b_1, en cuyo caso Q puede ser una nueva cantidad.

Razón como operador. La razón puede ser usada para ampliar o achicar y será vista como un operador. Sean M_1 y M_2 dos magnitudes y a_1 y b_1 dos cantidades de magnitud que pertenecen a M_1 y M_2 respectivamente luego existe una operación unaria O de la forma:

$$O: M_1 \rightarrow M_2$$
$$a_1 \rightarrow O(a_1) = \rho \times a_1 = b_1$$

[6] Hace referencia a preconceptos o conocimientos previos de los sujetos.

Si M_1 y M_2 son magnitudes homogéneas entonces ρ es una cantidad numérica que expresa un factor de ampliación o reducción que, aplicado sobre la cantidad de magnitud a_1 produce la cantidad de magnitud b_1. Ahora, Si M_1 y M_2 son magnitudes heterogéneas, entonces ρ es una cantidad con unidades que actúa como operador transformando la cantidad de magnitud a_1 en la cantidad de magnitud b_1.

Propiedades de las transformaciones lineales: Una transformación lineal es una función f de un espacio vectorial real M_1 en un espacio vectorial M_2 que asigna a cada vector $a \in M_1$ un único vector $af \in M_2$ y que satisface las siguientes propiedades:

i. Homogeneidad con respecto a la suma: $f(a_1 + a_2) = f(a_1) + f(a_2)$
ii. Homogeneidad con respecto a la multiplicación por un escalar: $f(\lambda a) = \lambda f(a)$
iii. $\forall a \in M_1, \frac{f(a)}{a} = \alpha$

Las anteriores propiedades pueden enunciarse así:

Dadas M_1 y M_2 dos magnitudes relacionadas en un sistema lineal, a_1 una cantidad de magnitud de M_1 y b_1 una cantidad de magnitud de M_2 se cumple que:

- Cuando la cantidad de magnitud a_1 aumenta al doble, al triple, ..., la cantidad de magnitud b_1 aumenta al doble, al triple, ...

- Cuando la cantidad a_1 disminuye a la mitad, a la tercera parte, ..., la cantidad b_1 disminuye a la mitad, a la tercera parte, ...

A partir de esta definición de transformación lineal y de la enunciación de sus propiedades se establece una relación con la proporcionalidad simple directa en el sentido que se cuenta con dos magnitudes y sus respectivas series de cantidades de magnitud que se correlacionan linealmente mediante una relación funcional de la forma:

$$f: M_1 \to M_2$$
$$a_1 \to f(a_1) = k \times a_1 = b_1$$

donde k es la llamada constante de proporcionalidad y f es una función lineal que representa tal proporcionalidad. Bajo este sustento teórico se da la siguiente definición de uno de los roles de la razón:

Razón como correlator entre cantidades. La razón puede expresar una propiedad invariante a dos series de cantidades de magnitud, que se pueden poner en correspondencia uno a uno, y donde la razón es el operador lineal que permite definir la función que correlaciona ambos conjuntos, esto es, a través de la razón se puede establecer una correlación entre dos cantidades de magnitud. Dadas dos magnitudes M_1 y M_2 y dos series de cantidades de magnitud M_1 y $A = \{a_i \in M_1, i = 1,2, \dots, n\}$ y $B = \{b_i \in M_2, i = 1,2, \dots, n\}$ con $A \subseteq M_1\ y\ B \subseteq M_2$, que cumplen con la condición que para todo $a_i \in A$ existe un único $b_i \in B$ tal que $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \cdots = \frac{b_n}{a_n} = \rho$ entonces existe una función F tal que:

$$F: A \to B$$
$$a_i \to F(a_i) = \rho \times a_i = b_i$$

de donde se tiene que para todo $a_i \in A$ y para todo $b_i \in B$ $\rho = \frac{b_i}{a_i}$

La razón ρ es un transformador lineal que aplicado sobre cantidades de magnitud de A, produce cantidades de magnitud correspondientes en B. Al igual que en la razón como relator o como operador las series de cantidades de magnitud A y B, pueden ser homogéneas o no. En el caso de ser homogéneas ρ será un número real, mientras que si son heterogéneas será una cantidad con unidades.

Dos tipos de análisis. Al enfrentar situaciones de proporcionalidad es posible que se realicen análisis en una magnitud y luego sean transferidos a otra o que se establezca una relación funcional entre las cantidades de magnitud de una magnitud y las cantidades de magnitud de la otra. Estos análisis han sido definidos por (Obando, et al., 2009) como sigue.

Análisis escalar. Pone en relación las variaciones de una de las magnitudes con respecto a las variaciones de otra (o cuando se analizan las relaciones entre las cantidades de la misma magnitud). El análisis escalar se basa en las dos primeras propiedades de la función lineal

i. Homogeneidad con respecto a la suma: $f(a_1 + a_2) = f(a_1) + f(a_2)$
ii. Homogeneidad con respecto a la multiplicación por un escalar: $f(\lambda a) = \lambda f(a)$,

permite la realización de procedimientos de gran utilidad en el tratamiento de las situaciones, ya que centran su estudio en los procesos de variación, esto es, determinan cómo varían las cantidades de magnitud de una de las magnitudes para luego trasladar dicha variación a las correspondientes cantidades de magnitud de la magnitud faltante. El análisis escalar implica reconocer que dadas M_1 y M_2 dos magnitudes, a_1, a_2 dos cantidades de magnitud de M_1 y b_1 una cantidad de magnitud de M_2 si $b_1 = (a_1 + a_2)$ y si $b_1 = \lambda a_1$ entonces $f(b_1) = f(a_1) + f(a_2)$ y $f(b_1) = \lambda f(a_1)$, respectivamente. En este caso λ es un número racional sin unidades, denominado factor escalar, el cual resulta del cociente entre cualesquiera dos cantidades de magnitud de una misma magnitud y puede ser interpretado como una razón.

Análisis funcional. Se debe reconocer que para cualquier par de valores $a_1, f(a_1)$ se tiene que $f(a_1) = \lambda a_1$, donde λ es un número racional con unidades, llamado constante de proporcionalidad. En este caso se pretende establecer una relación funcional entre las cantidades de magnitud de una magnitud y su correspondiente valor en la otra magnitud.

3. Antecedentes

Para iniciar el trabajo de investigación se tomó como referente tres investigaciones: Vinculo entre el pensamiento proporcional cualitativo y cuantitativo: el caso de Paulina (Ruiz y Valdemoros, 2006), Una estrategia para la aprehensión cognitiva de la razón (Barra, Díaz y Ramírez, 2006) y Una oportunidad para profundizar en aspectos relativos a la enseñanza de razón como tópico matemático (Perry, Guacaneme, Andrade y Fernández, 2003). En la primera se considera que el enriquecimiento del pensamiento proporcional cualitativo[7] del niño le permite ampliar las relaciones cuantitativas entre magnitudes y mejorar el manejo de los algoritmos, enmarcándolos en aplicaciones plenas de sentido. Además se afirma que uno de los sujetos considerados en la investigación (Paulina)[8] designó la razón como la relación entre dos magnitudes y la proporción como la relación de equivalencia entre dos razones. Esto fue constatado por las investigadoras a través de las respuestas dadas por Paulina en la entrevista que se realizó en la parte final de la investigación y luego de aplicar unas actividades de enseñanza: logró relacionar ambas columnas de una tabla, en la cual aparecían los valores para

[7] Las autoras no definen explícitamente lo que entienden por pensamiento proporcional cualitativo, pero para tal fin citan directamente los trabajos de Piaget, Inhelder, Ban de Brink y Streefland.
[8] La niña de su caso de estudio, la cual fue seleccionada puesto que caracterizaba a aquellos estudiantes que mostraron en la aplicación de un cuestionario inicial un gran apego al manejo de algoritmos pero carentes de sentido, es decir, que tenía claro el procedimiento pero no el uso, además de exhibir pocas elaboraciones en el terreno cualitativo.

el alto y el ancho de cuatro roperos de forma rectangular, es decir, Paulina a través de la escritura de las razones externas, determinadas por las medidas de los altos y las medidas de los anchos, estableció la relación entre las magnitudes que obtuvo de la misma tabla, demostrando que entendía la razón como relación entre magnitudes. Según Ruiz y Valdemoros (2006) "Paulina llegó a construir los conceptos de razón y proporción, lo que se notó por su aplicabilidad en distintos ámbitos y por el uso de los distintos modos de representación." (p. 321).

En la segunda de las investigaciones aquí consideradas, Barra, Díaz y Ramírez (2006) pretenden suscitar en un grupo de estudiantes de séptimo grado de Educación Básica una aprehensión cognitiva de la noción matemática escolar de razón. La experiencia parte desde la visualización cualitativa en la distribución de los colores en la bandera Chilena hasta el análisis de destrezas y sub-destrezas de pensamiento: cálculo, representación numérica y reflexión. Inicialmente los estudiantes son cuestionados acerca de lo que ellos entienden por razón y se observa que un alto porcentaje asocian el concepto de razón con acepciones cotidianas que utilizan, como por ejemplo tener la razón, la razón de saber si algo es cierto o falso o razonar con alguien, entre otras. La actividad siguiente es comparar qué color de la bandera Chilena ocupa más superficie, con lo cual las autoras pretenden un acercamiento cualitativo. La mayor parte de los estudiantes utilizan categorías de comparación, "más superficie que", "menos superficie que" entre dos colores. Finalmente con la pretensión de pasar de lo cualitativo, entendido por las autoras como el uso de expresiones verbales para establecer comparaciones, a lo cuantitativo, tomado como el uso de expresiones numéricas y números para el establecimiento de comparaciones, las investigadoras invitan a los estudiantes a realizar representaciones numéricas y de comparación mediante el uso de cuadrículas. En esta última actividad, teniendo en cuenta las frases con las que se refieren a las partes de un todo,[9] sus representaciones gráfica y numérica, evidencian que los estudiantes empiezan a utilizar una acepción de razón distinta a la que inicialmente habían dado desde su cotidianidad. En palabras de las autoras, "Aunque de un modo implícito, se advierten en sus textualidades facetas de la concepción matemática de razón. Resta pendiente el desafío de hacer conscientes a los estudiantes de este proceso de aprehensión cognitiva de la razón, con actividades subsecuentes" (p. 6).

Finalmente, en Perry y otros (2003), se presenta la experiencia de aula: "Una oportunidad para profundizar en aspectos relativos a la enseñanza de razón como tópico matemático"; experiencia en la cual se implementó una secuencia de actividades con grupos de estudiantes de grado séptimo y octavo de Educación Básica Secundaria. De los resultados encontrados en la aplicación de tres talleres,[10] se destaca el haber identificado que varios estudiantes concibieron la relación entre cantidades correspondientes como relación de orden entre números y no como una relación de equivalencia entre cantidades adjetivadas.[11] Igualmente se detectó la complejidad[12] que hay detrás del aprendizaje y la enseñanza del concepto de razón como tema matemático y concluyen que los obstáculos, dificultades y conflictos que surgen en el proceso de enseñanza y en el de aprendizaje del tema, tales como la naturaleza de los objetos de estudio, el lenguaje usado o necesario para referirse a situaciones en las que está implicada la razón,

[9] En este caso las partes son las franjas de cada color y el todo la bandera,

[10] En los dos primeros talleres se plantea una situación problema y en el tercero una reflexión especial sobre estas situaciones. En la primera situación se pide a los estudiantes leer y realizar el siguiente ejercicio: en un salón hay 48 estudiantes colocados en seis filas. En cada fila hay 3 niños y 5 niñas. A continuación se les solicitó elaborar una representación de la situación, hacer comparaciones entre el número de niños y niñas que hay en cada fila y hacer una representación cartesiana de los pares ordenados (número de niños, número de niñas). La segunda situación plantea que cuando una libra de chocolate es colocada en una máquina entonces esta produce 24 chocolatinas. Enunciado con el cual los estudiantes determinan el número de chocolatinas obtenidas a partir de cierta cantidad de libras de chocolate, establecen una expresión matemática que relacione la cantidad de libras de chocolate con el número de chocolatinas producidas y nuevamente se les requiere hacer una representación cartesiana con las parejas obtenidas.

[11] Según Schwartz (1988, p. 41): Todas las cantidades que surgen en los procesos de contar o de medir o como resultado de la combinación de cantidades contadas o medidas hacen referencia y serán referenciadas como cantidades adjetivadas..

[12] Dicha complejidad no es explicitada por los autores.

proporcionan elementos para reorientar su proceso de enseñanza, por lo que se requiere que el profesor esté atento y no se limite a los aportes de los textos escolares, donde se ha detectado la perpetuación de un trabajo deficiente con algunos aspectos que caracterizan a la razón. Para reorientar su proceso de enseñanza recomiendan tener muy en cuenta el contexto, las ideas previas, el lenguaje que se va a utilizar, que los estudiantes hayan tenido suficiente experiencia con procesos de ordenar y clasificar, establecer diferencias claras entre magnitud, cantidad de magnitud y medida y que hagan representaciones adecuadas de parejas de valores en el plano cartesiano para con ello facilitar la visualización de la relación de equivalencia que hay detrás del significado de razón.

Estas tres investigaciones tienen en común la aplicación de situaciones en las cuales se determina la manera como los estudiantes se acercan a las razones, las proporciones y la proporcionalidad y el modo como las aplican en diferentes contextos. De igual manera se establece la forma como los estudiantes pasan del razonamiento proporcional cualitativo al razonamiento proporcional cuantitativo. Por otro lado, las investigaciones enuncian la complejidad que hay detrás de la enseñanza y aprendizaje de estos objetos de conocimiento matemático. En tal sentido queda pendiente determinar la manera como deben diseñarse situaciones de variación y cambio que permitan identificar los sistemas de práctica que despliegan los estudiantes en su resolución y cómo esos sistemas contribuyen a dar forma a las razones las proporciones y la proporcionalidad.

4. Metodología

Aproximación metodológica. El interés se centró en realizar una investigación desde, y en la práctica a partir de la experiencia profesional como docente de básica y media. Esto es, que en lugar de esperar soluciones provenientes del exterior, se pretende empezar con la investigación de los problemas a los que se enfrenta el maestro, con una lógica de intervenir y transformar, sabiendo de antemano a dónde se pretende llegar. Para Ponte (1998) la característica definitoria de esta forma particular de investigación se refiere justo al hecho de que el investigador tiene una relación muy particular con el objeto de estudio. Él no estudia un objeto, sino un cierto aspecto de su práctica profesional. De este modo se empieza a hablar menos del profesor como investigador y cada vez más de la investigación sobre la propia práctica. Según Ponte (2008) los artículos sobre investigación, ponen de manifiesto que realizar investigación sobre la propia práctica es una actividad que puede despertar gran interés en los respectivos actores y que es susceptible de proporcionar implicaciones significativas para su práctica profesional. Cochran – Smith (2003) resume así esta perspectiva:

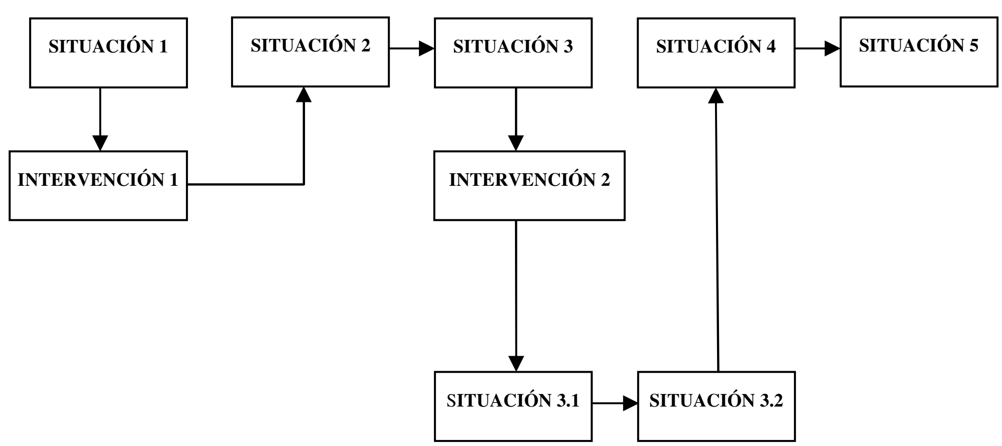
> Asumir una investigación como forma de ser profesional significa que los profesores y futuros profesores trabajan en comunidades de investigación para generar conocimiento local, dar perspectiva y teorizar su práctica, interpretar e interrogar una teoría y la investigación de los demás. Fundamental en esta noción es la idea de que el trabajo en comunidades de investigación es social y político, es decir, implica problematizar las actuales formas de organización de la escuela; las formas como se construye el conocimiento, evalúa y usa, y los papeles individuales y colectivos de los profesores para promover un cambio. (p. 8)

La población objetivo de la investigación. El proyecto se desarrolló con 36 estudiantes de grado séptimo de educación básica cuyas edades oscilan entre los 11 y los 14 años matriculados en la Institución Educativa "Los Comuneros" ubicada en la comuna 6 del municipio de Popayán; es una Institución de carácter público, calendario A, que atiende estudiantes provenientes de barrios de la misma comuna, algunos de ellos en condición de desplazamiento. Los estudiantes se ubican mayoritariamente en los estratos socioeconómicos 1 y 2. La institución educativa tiene un énfasis en salud y desarrolla un proyecto de acuerdos de convivencia. En tal sentido el plan de estudio contempla el aporte desde cada una de las áreas al énfasis y a los acuerdos de convivencia[13] y ha definido en su Proyecto Educativo Institucional como modelo pedagógico la Pedagogía Dialogante[14]. El plan de estudios en el área de matemáticas ha sido construido tomando como base los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas emanados por el MEN. Como estrategia metodológica se tiene la solución y formulación de problemas y se trabaja el proyecto del juego de ajedrez[15].

El método empleado para el análisis de las estrategias desplegadas por un grupo de estudiantes de grado séptimo en la solución de un conjunto de cinco situaciones integra:

- ✓ *Instrumento de análisis*. Se tomó como modelo el esquema presentado en (Obando, Vanegas y Vásquez, 2006; Posada, 2006), que consistió en anticipar cuáles serían las posibles respuestas de los estudiantes y cómo resolvería las situaciones un experto. En este momento**,** se identificó si los estudiantes recurrían a análisis escalares o a análisis funcionales y se determinó cuál era el rol jugado por la razón en las diversas posibles soluciones, es decir, si la razón obraba como relator, como operador o como correlator entre cantidades de magnitud (Obando, Vasco y Arboleda, 2009), las cuales son consideradas como una parte del bloque teórico que soportas la técnicas empleadas para resolver los problemas de los distintos tipos de situaciones.
- ✓ El análisis de las soluciones dadas por los estudiantes a cada una de las situaciones: Teniendo en cuenta que antes de aplicar la siguiente situación se debe analizar la anterior.
- ✓ La determinación de la pertinencia o no de realizar una intervención por parte del investigador.
- ✓ El diseño de sub-situaciones que permitan determinar los alcances y deficiencias de las intervenciones.

Hay que anotar que los análisis que se hacen tienen un carácter cualitativo y obedecen a descripciones de los procesos empleados, y aunque se cuenta el número de estudiantes que desarrollaron una u otra estrategia, este número se toma como referencia más no como un elemento básico de interpretación, es decir, no se elaboraran tablas de frecuencia con esas cantidades. El método descrito anteriormente se esquematiza a través de lo que se ha denominado la ruta de aplicación de las situaciones diseñadas.



Gráfica 1. Ruta de aplicación de las situaciones diseñadas

[13] Los integrantes de la comunidad educativa han tomado distancia del manual o reglamento tradicional para construir en conjunto unos acuerdos de convivencia que favorezcan el clima escolar.
[14] La pedagogía dialogante es un modelo pedagógico, propuesto por Julián de Zubiria, que propende por el desarrollo cognitivo, valorativo y praxiológico
[15] La Institución Educativa los comuneros desarrolla unos proyectos propios denominados Proyectos de Integración Comunera (PIC) a los que los estudiantes asisten por interés y por gusto. Uno de estos proyectos es el de ajedrez en el cual se prepara a los estudiantes para participar en torneos intercolegiados.

Las situaciones aplicadas. Fueron cinco las tareas expuestas en la investigación, a saber: **Situación 1**: Llenemos el envase; **Situación 2**: ¿Con cuál vaso se llena más rápido?; **Situación 3**: A comprar el arroz**; situación 4**: Repartamos el premio**; Situación 5**: Un paseo por los descuentos. (Nos referiremos a estas cinco situaciones como situaciones base)
Para el desarrollo de la **Situación 1** los estudiantes dispusieron de un envase transparente de gaseosa en el que se habían graduado las onzas que puede contener, tres vasos de diferente capacidad (denominados ***A***, ***B*** y ***C***, siendo ***A*** el más pequeño y ***C*** el más grande) y agua. En la actividad los estudiantes llenaron de agua primero el vaso ***A*** y fueron depositando el contenido en el envase de gaseosa a la vez que iban registrando en una tabla el número de vasos utilizados y el volumen alcanzado. Seguidamente hicieron lo mismo con los otros dos vasos. En la **Situación 2** se dispuso de un envase transparente de gaseosa con un nivel marcado hasta donde sería llenado, seis vasos uno de 3, otro de 4, de 6, de 8, de 10 y de 12 onzas y agua. En la actividad los estudiantes llenaron de agua primero el vaso de 3 onzas y fueron depositando el contenido en el envase de gaseosa hasta llegar al nivel marcado, los estudiantes iban registrando en una tabla el número de vasos necesarios para alcanzar el nivel, este procedimiento fue replicado con los otros 5 vasos. En la **Situación 3** se presentaron por escrito en una tabla tres marcas de arroz en diferentes presentaciones (contenido en Kg) y diferentes precios. La **Situación 4** presenta por escrito una situación en la cual cuatro personas aportan, cada una, diferente cantidad de dinero para comprar una boleta para la rifa de dinero en efectivo. La **situación 5** presenta por escrito una situación en la cual un almacén ofrece diferentes porcentajes de descuento en sus artículos.

La situación *Llenemos el envase* fue aplicada en primer lugar debido a que en ella se trabaja con material concreto y porque se tienen experiencias previas con estudiantes en su aplicación, aunque fue modificada radicalmente para que contribuyera al logró de los propósitos trazados y se acomodará al esquema de análisis que se va a implementar, esta experiencia está basada en una actividad que se realiza en la propuesta “Descubro la Matemática” del profesor Jorge Castaño (Castaño, 1998) . La situación *¿Con cuál vaso se llena más rápido?* se aplica en segundo lugar, ya que está estrechamente relacionada con la primera y pretende sacar a los estudiantes de la idea que todo proceso de covariación se comporta linealmente, como una proporcionalidad directa; también utiliza material concreto y ha sido llevada al aula en anteriores ocasiones. La situación *A comprar el arroz* se fundamenta en un hecho de la vida diaria, que tiene que ver con hacer las compras de un producto y escoger cuál representa mayor economía para el hogar, razón que la ubica en el tercer lugar. La actividad *Repartamos el premio* requiere procesos de pensamiento más elaborados, y por ello se ubicó de cuarta. La situación *Un paseo por los descuentos* es sobre porcentajes y tiene que ver con asistir a un supermercado en el cual se realizan descuentos.

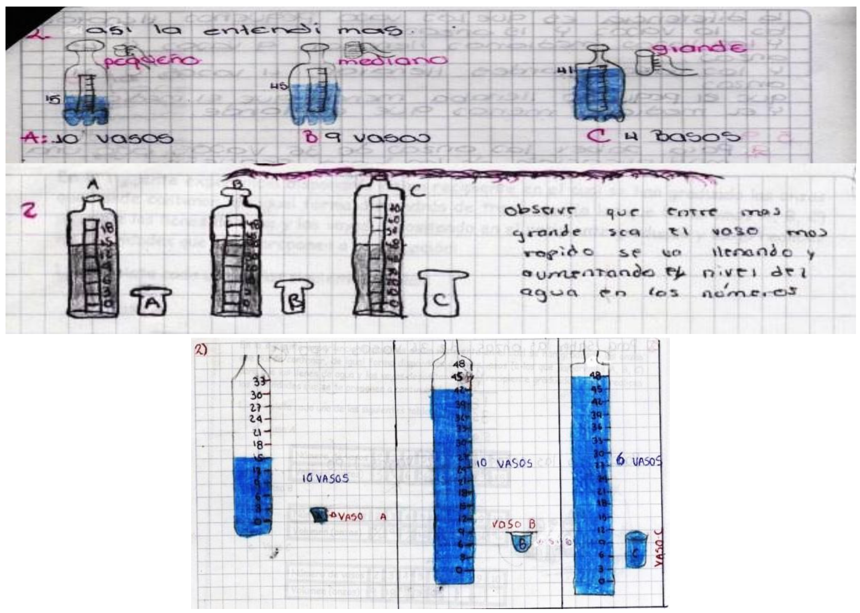
Cada una de las situaciones obedece a un tipo de situación según la categorización realizada por (Obando, et al., 2009). La primera y tercera se catalogan dentro de los isomorfismos de medidas, dos magnitudes que se correlacionan linealmente, la segunda hace parte de las situaciones en las que se comparan tres magnitudes a través de una correlación lineal de proporcionalidad simple inversa, la cuarta se ubica dentro de las situaciones de reparto proporcional y la quinta está dentro de las situaciones de medida real, porcentajes.

Instrumentos de recolección de datos. Además de los registros escritos (incluidas operaciones, gráficas cartesianas, estadísticas, icónicas, explicaciones, argumentos, justificaciones, tablas, diagramas, etc.), que los estudiantes realizan en hojas de cuadernillo que se entregan junto con las situaciones, se pregunta a los niños por qué han hecho el procedimiento que aparece escrito o cómo llegaron a la respuesta escrita. Las repuestas verbales dadas en las tres primeras situaciones quedaron registradas en el modo grabadora de sonidos de una cámara fotográfica, para la cuarta situación se utilizó la grabadora de sonidos de un celular. Estos instrumentos de registro de audio también se utilizaron para grabar, en palabras del investigador, los gestos y expresiones corporales de los estudiantes al desarrollar las situaciones; también se hicieron descripciones escritas de estos gestos y expresiones. De igual manera se recurrió a la utilización de fotografías y videos en las dos primeras situaciones. Este conjunto de registros permiten evidenciar las prácticas matemáticas.

5. **Resultados.**

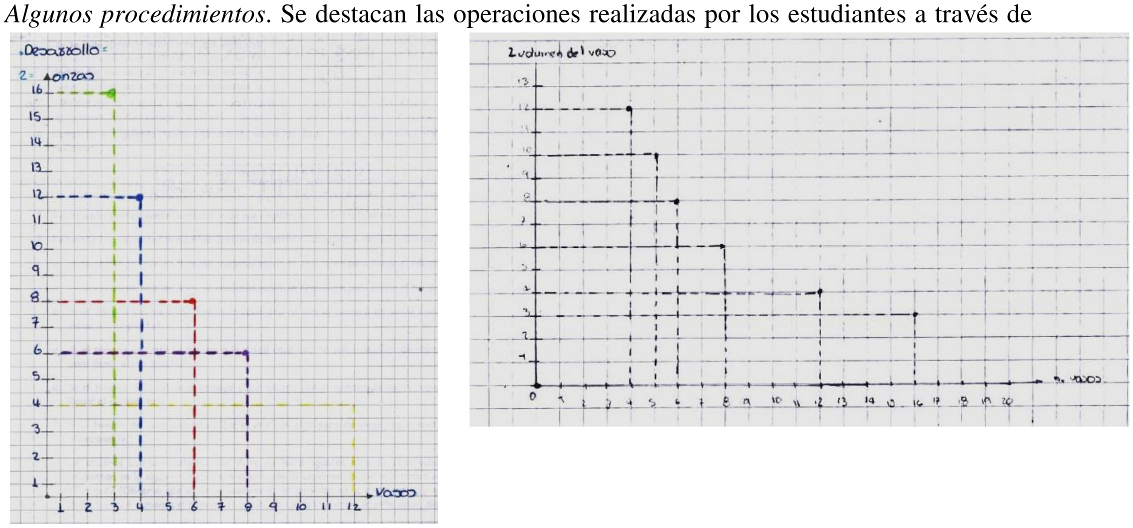
A continuación se exhiben algunas de las soluciones (gráficas y operaciones) dadas por los estudiantes a las preguntas de reflexión planteadas en cada una de las situaciones.

Sobre las representaciones gráficas. El 80% de los estudiantes inicialmente acudieron a representaciones icónicas pero luego de la primera intervención realizaron gráficas cartesianas.



Gráfica 2. Representaciones gráficas antes de la primera intervención

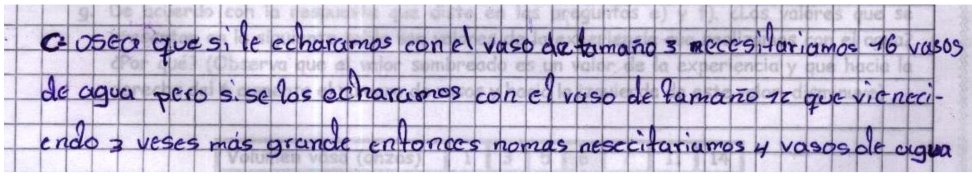
Algunos procedimientos. Se destacan las operaciones realizadas por los estudiantes a través de



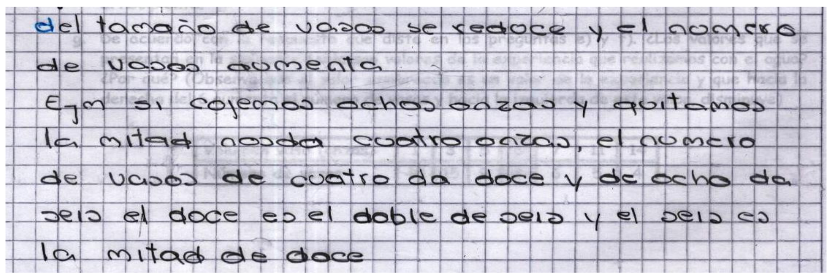
Gráfica 3. Gráficas después de la primera intervención

las cuales fue posible identificar los sistemas de prácticas.

Con respecto a preguntas de orden cualitativo en la situación 1 el 10% determinó que el número de vasos reduce si el tamaño del vaso aumenta y lo ilustró con ejemplos tomados de la tabla construida.

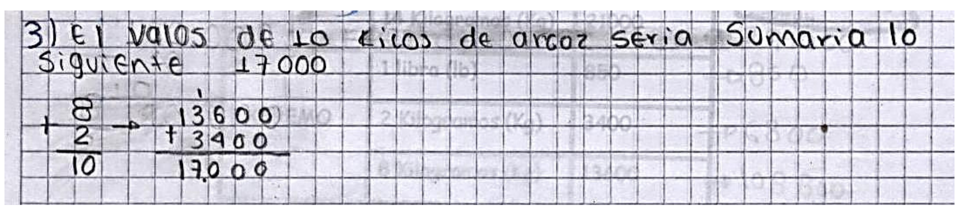

o sea que si le echaramos con el vaso de tamaño 3 necesitariamos 16 vasos de agua pero si se los echaramos con el vaso de tamaño 12 que viene siendo 3 veses más grande entonces nomas nesecitariamos 4 vasos de agua

Gráfica 4. Respuesta a preguntas de orden cualitativo.


del tamaño de vasos se redoce y el numero de vasos aumenta
Ejm si cojemos ochos onzas y quitamos la mitad queda cuatro onzas, el numero de vasos de cuatro da doce y de ocho da seis el doce es el doble de seis y el seis es la mitad de doce

Gráfica 5. Otra respuesta a preguntas de orden cualitativo.

Para preguntas de índole cuantitativo se tienen respuestas como las siguientes

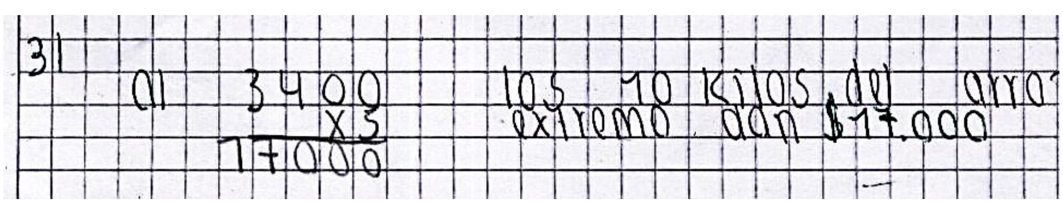

3) El valos de 10 kilos de arroz seria Sumaria lo siguiente 17000
$8 + 2 = 10 \rightarrow 13600 + 3400 = 17000$

Gráfica 6. Acudiendo a procesos aditivos.

En esta estrategia se utilizan análisis escalares de la forma

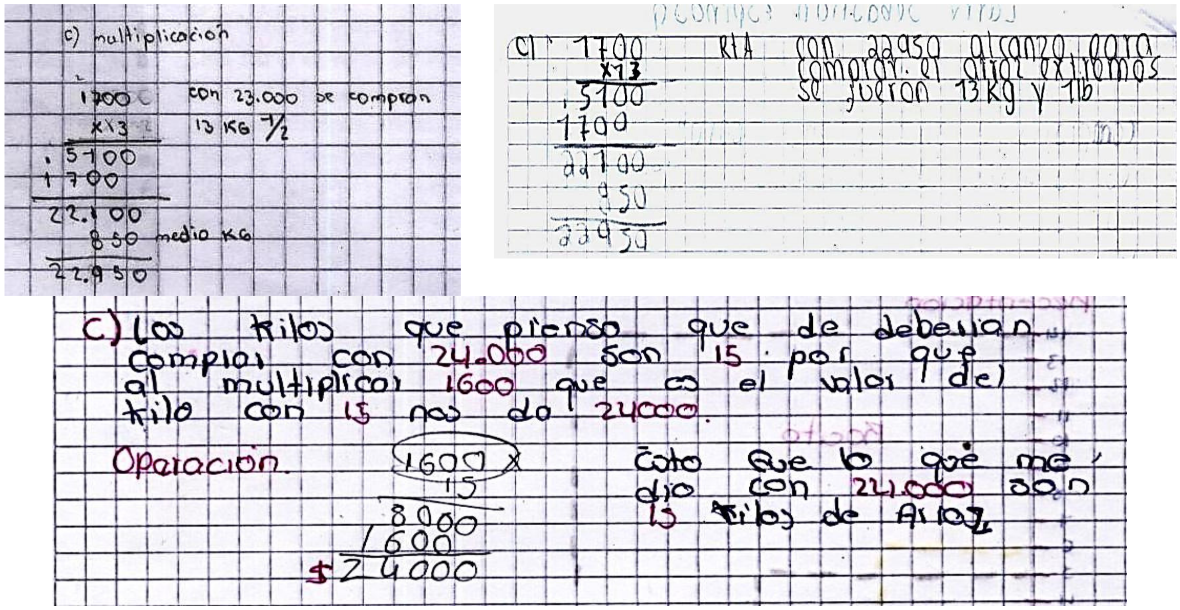
$$f(8Kg+2Kg)=f(8Kg)+f(2Kg)=\$13.600+\$6.400=\$17.000.$$

De igual forma se apoyan en la teoría de los sistemas lineales directos y en la tecnología de los análisis escalares tales como $f(5\times 2Kg)=5\times f(2Kg)=5\times \$3.400=\$17.000$


3) a $3400 \times 5 = 17000$ los 10 kilos de arroz extremo dan $17.000

Gráfica 7. Utilizando la teoría de los sistemas lineales directos.

Emplean la teoría de la razón como operador. A través de la expresión $f(x) = \frac{\$1700}{Kg} \times x = \$23.400$ y de la tecnología del análisis funcional

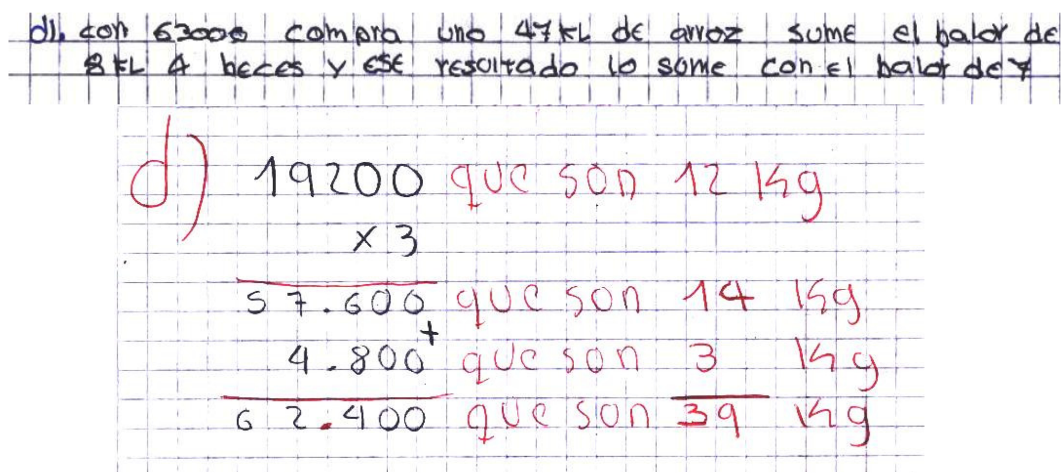


Gráfica 8. Uno de los roles de la razón.

O de un análisis escalar y la utilización de nuevo de un teorema en acción, (Vergnaud, 1983), que fundamenta una de las propiedades de la linealidad, a saber:

$$f(3 \times 14Kg) = 3 \times f(14Kg) = 3 \times \$21000 = \$63.000$$

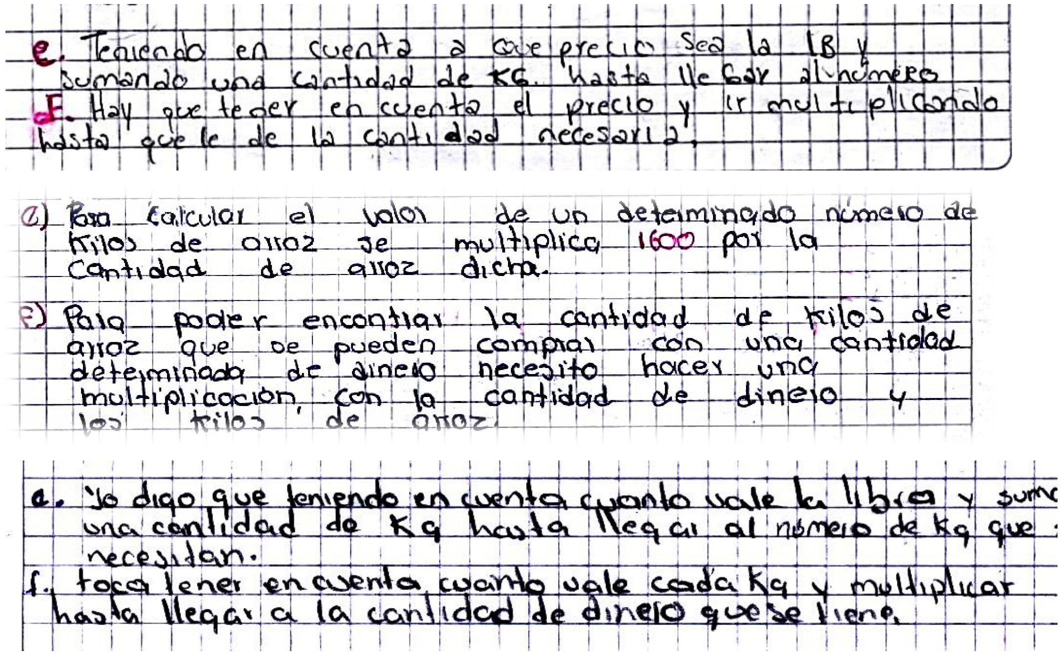
También utilizaron el producto y la adición para encontrar la respuesta.



Gráfica 9. Combinación de procesos aditivos y multiplicativos.

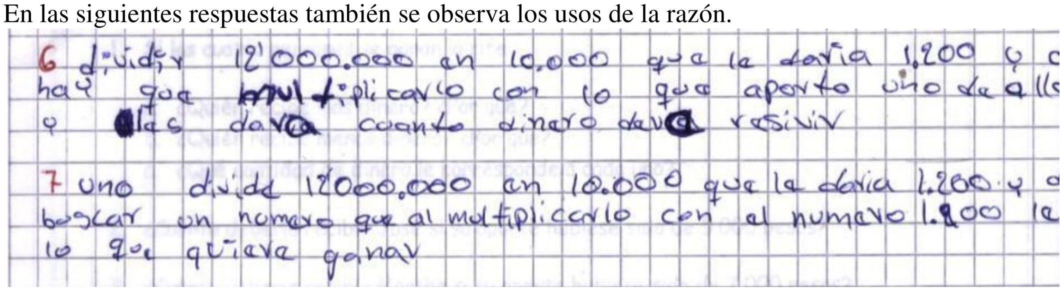
Nota: En este procedimiento hay un error de escritura del alumno, donde aparece 14 Kg es 36 Kg.

En las siguientes respuestas se puede determinar el papel jugado por la razón (relator, operador, correlator):



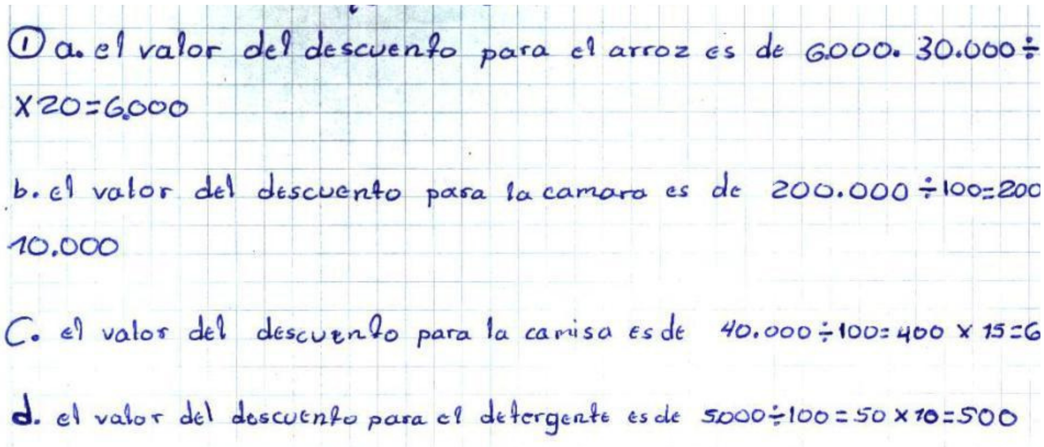
Gráfica 10. La razón en sus distintos roles

En las respuestas a estas dos últimas preguntas se observa que el 80 % de los estudiantes utilizaron el valor por libra (o por kilogramo), determinado anteriormente, como un valor constante, por lo tanto, quienes acudieron a este uso, estaban pensando en la razón como relator y en estas últimas respuestas la usaron como operador.
En las siguientes respuestas también se observa los usos de la razón.



Gráfica 11. Utilizando la razón.

En la situación de porcentaje se observa que el 85% de los estudiantes dividieron el valor original del artículo entre 100 y el resultado lo multiplicaron por el porcentaje del descuento. Por ejemplo para encontrar el 20% de \$30.000 (precio de una arroba de arroz), dividieron \$30.000 entre 100 y obtuvieron \$300, luego multiplicaron este valor por 20 obteniendo como resultado \$6.000, por lo tanto el descuento en el arroz fue de \$6.000.



Gráfica 1. Calculando porcentajes.

6. Conclusiones.

Teniendo en cuenta que se buscaba identificar los sistemas de prácticas desplegados por los estudiantes al resolver situaciones de variación y cambio y la manera como surgían las razones, las proporciones y la proporcionalidad en tales sistemas, todo esto teniendo como marco teórico y metodológico la TAD, se describirán a continuación las teorías y las técnicas y tecnologías asociadas que pudieron evidenciarse a través de los datos y resultados obtenidos.

Teorías. Tanto para el análisis de las situaciones por parte del investigador como para las soluciones dadas por los estudiantes se observa la necesidad de acudir a todo el aparato formal de las transformaciones lineales y de las funciones reales, por ejemplo, es necesario acudir a las funciones lineales, a las funciones bilineales, a las tres propiedades fundamentales de la linealidad y a los sistemas lineales directos e inversos, de igual forma a los tres roles de la razón (relator, operador y correlator).

Técnicas y tecnologías asociadas. Los estudiantes recurrieron inicialmente a la técnica correspondiente a las representaciones tabulares, para dar algunas respuestas. Aunque, en la situación 1, en la que se les solicitó hacer una gráfica, la mayoría de los estudiantes acudieron a la técnica de las representaciones icónicas. Este par de hechos llevó a que en la primera intervención se recordará lo referente a las gráficas cartesianas y estadísticas, lo que condujo a que en las siguientes dos situaciones, en las que se pedía hacer una gráfica, los estudiantes acudieran a la técnica de las gráficas cartesianas.

Se observó cómo en algunas situaciones los estudiantes acuden a realizar la división entre las cantidades de magnitud involucradas para determinar el valor por unidad. En este momento fue difícil determinar si los estudiantes estaban utilizando la razón como relator. Pero en las preguntas denominadas de generalización, se observa que el valor encontrado es utilizado como invariante o como constante de proporcionalidad. También se observó, aunque con menos frecuencia, la aplicación de técnicas asociadas con la tecnología de los análisis escalares, y con el razonamiento por analogías. Se pone en evidencia la preferencia de algunos estudiantes por la realización de procesos aditivos en lugar de la multiplicación.

En problemas de repartos proporcionales se evidenció mayor comodidad de los estudiantes para realizar análisis de tipo cualitativo y no tanto para el análisis de índole cuantitativo. De igual manera en un grupo significativo de estudiantes se observó la primacía de los repartos equitativos por encima de los repartos proporcionales, influenciada por la manera como en la vida cotidiana se dan las cosas. En este sentido es necesario diseñar situaciones de tal forma que induzcan al estudiante a asignar de manera natural el carácter proporcional que debe tener el reparto que se va a realizar. Ahora bien, en la realización de los análisis cuantitativos la técnica mayoritariamente utilizada permitió calcular la constante de proporcionalidad que luego se aplicó para determinar los valores del premio que debe recibir cada persona. Esta técnica está sustentada por las tecnologías de los análisis escalares y funcionales y de las proporciones, apoyadas por la teoría de los roles de la razón. En un menor número, los estudiantes utilizaron las técnicas que se apoyan en el uso de la razón como relator y de los sistemas lineales directos.

En lo referente a los problemas relacionados con porcentajes, la mayoría de los estudiantes acudieron a la técnica de determinar a cuanto correspondía el 1% de determinado valor la cual también tiene su sustento en la teoría de los roles de la razón. Por otro lado, teniendo en cuenta que se trabajó con porcentajes que eran múltiplos de 5, algunos estudiantes, aunque en menor número, recurrieron a la técnica soportada por la teoría de los sistemas lineales.

Bibliografía.

[1] Barra, Díaz, & Ramírez. (2006). Una estrategia para la aprehensión cognitiva de la razón. Consultado en febrero 13 de 2010. Disponible en http://www.sochiem.cl/jornadas2006/ponencias/37.pdf

[2] Bosch, M., & Chevallard, Y. (1999). Ostensifs et sensibilité aux ostensifs dans l'activité mathématique. *Recherches en didactique des mathématiques* 19 (1), 77-124.

[3] Castaño, J. (1998). Cuadernillo de la propuesta "Descubro la matemática". Comunidad de Hermanos Maristas de la Enseñanza. Bogotá.

[4] Cochran -Smith, M. (2003). Learning and unlearning: the education of teacher educators. *Teaching and teacher education*, 10(2), 5-28.

[5] D'amore, B., & Godino, J. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de las matemáticas. *Revista Latinoamenricana de Investigación en Matemática Educativa*, 10 (2), 191-218.

[6] Espinoza, L., & Azcarate, C. (2000). Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto "limite de una función": una propuesta metodológica para el análisis. *Enseñanza de las Ciencias*, 18 (3), 355-368.

[7] García, F. (2005). *La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar.De la proporcionalidad a las relaciones funcionales.* Tesis de Doctorado no publicada, Universidad de Jaen. España.

[8] Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2008). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento matemático. Consultado en diciembre 15, 2009. Disponible en http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm

[9] Guacaneme, E. (2001). *Estudio didáctico de la proporción y la proporcionalidad: una aproximación a los aspectos matemáticos formales y alos textos escolares de matemáticas.* Tesis de Maestría no publicada, Universidad del Valle, Cali.

[10] Lamon, S. (2007). Rational numbers and proportional reasoning. Toward a theoretical Framework for Research. En F. K. Lester (Ed.) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. (pp. 629 - 667). New York: Information Age Pub Inc.

[11] MEN. (2006). *Estándares básicos de competencia matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

[12] MEN. (2004). *Pensamiento variacional y tecnologías computacionales*. Bogotá: Ministerio de Educaión Nacional.

[13] Obando, G., Vasco, C., & Arboleda, L. (2009). *Praxeologías matemáticas en torno al número racional, las razones, las proprociones y la proporcionalidad*. Comunicación interna no publicada. Universidad del Valle. Cali.

[14] Obando, G., Vanegas, M., & Vásquez, N. (2006). *Pensamiento numérico y sistemas numéricos*. Medellín: Gobernación de Antioquia.Secretaría de Educación para la Cultura de Antioquia. Dirección de Fomento a la Educación con Calidad.

[15] Perry, P., Gucanéme, E., Andrade, L., & Fernández, F. (2003). *Transformar la enseñanza de la proporcionalidad en la escuela: Un hueso duro de roer*. Bogotá: Una empresa docente.

[16] Ponte, J. P. (2008). Investigar a nossa própria prática: Uma estratégia de formação e de construção do conhecimento profissional. *Revista PNA–Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*. 2 (4), 153 - 180.

[17] Ponte, P., Oliveira, H., Brunheira, L., Varandas, J., & Ferreira, C. (1998). O trabalho do professor numa aula de investigação matemática. *Quadrante*, 7 (2), 41 - 70.

[18] Posada Balvin, F. A. (2006). *Módulo 2 Pensamiento Variacional y Razonamiento Algebraico*. Medellín: Gobernación de Antioquia. Secretaría de Educación para la Cultura de Antioquia. Dirección de Fomento a la Educación con Calidad.

[19] Rico, L. (1997). *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación superior*. Madrid: Editorial Síntesis.

[20] Ruiz, E., & Valdemoros, M. (2006). Vinculo entre el pensamiento proporcional cualitativo y cuantitativo: el caso de Paulina. *Relime*, 9(2), 299-324.

[21] Sánchez, Eruin. (2011). *Razones, proporciones y proporcionalidad en términos de variación y correlación entre magnitudes: una posible forma para comprender las construcción de dichos objetos matemáticos*. Tesis de maestría no publicada, Universidad del Cauca. Colombia.

[22] Vergnaud, G. (1983). Multiplicative Structures. En R. Lesh y M Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 127-124). New York: Academic Press.

[23] Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 10 (23), 133-170.

[24] Vergnaud, G. (1991). *El niño las matemáticas y la realidad. Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria.* México: Trillas.

[25] Vergnaud, G. (1994). Multiplicative conceptual field: what and why? En G. Harel and J. Confrey (Eds.), *The Devepopment of MULTIPLICATIVE REASONING in the learning of mathematics* (pp. 41-61). Albany: State University of New York.

[26] Vergnaud, G. (2007). In what sense the conceptual fields theory might help us to facilitate meaningful learning? [¿En qué sentido la teoría de los campos conceptuales puede ayudarnos para facilitar aprendizaje significativo?]. *Investigações em Ensino de Ciências,* 12(2), 285 - 302.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DEL CAUCA
e-mail: eruinalonso@hotmail.com.