Gómez, M. y Pantoja, Y. 2013. Límite de funciones, sistemas de representación y estándares de calidad: una metodología de análisis de textos escolares. Revista Sigma. 11(1). Pág. 26-38
http://revistasigma.udenar.edu.co/articulos/Volúmen XI 1/1.pdf

REVISTA SIGMA
Departamento de Matemáticas
Universidad de Nariño

Volumen XI N° 1 (2013) páginas 26-38

Límite de funciones, sistemas de representación y estándares de calidad: una metodología de análisis de textos escolares

Leidy Marcela Gómez Melo[1]
Yuly Maribel Pantoja Portillo[2]

Resumen. Discriminar los sistemas de representación y estándares de calidad utilizados al construir el concepto de límite en los textos escolares es un asunto de interés en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, pues, según sea el tipo de representación privilegiado y estándar movilizado se ponen en acto tanto características distintas del concepto matemático en estudio, como el desarrollo de habilidades de naturaleza diferente. En este artículo describimos una metodología de análisis que permite caracterizar los textos escolares según las representaciones usadas y los tipos de estándar movilizados en el desarrollo de los ejemplos referentes al concepto de límite de una función. Fueron cuatro las categorías que se tuvieron en cuenta para la construcción del instrumento de análisis, tres de ellas según el sistema de representación utilizado (analítico, algebraico y aritmético), la otra considera el tipo de estándar matemático privilegiado (utilización de técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos y uso de propiedades y representaciones en los números naturales y reales en el cálculo del límite).
Palabras clave: representaciones, sistemas de representación, límite de función, estándares, indicadores de logro.

Abstract. Discriminating representation systems and quality standards used to build the concept of limits in school textbooks is a matter of interest in the teaching and learning of mathematics, then, depending on the type of representation standard privileged and are then enacted mobilized different characteristics of both mathematical concept under study, such as the development of skills of a different nature. We describe an analytical methodology to characterize the textbooks as the representations used and standard types mobilized in developing the examples relating to the concept of limit of a function. There were four categories that were considered for the construction of the assessment tool, three of them as the representation system used (analytical, algebraic and arithmetic), the other considers the type of standard mathematical privileged (using approximation techniques in infinite processes and use numerical representations of properties and natural and real numbers in the calculation of the limit).
Keywords: representations, representational systems, limit function, standard, indicators.

1. Introducción.

Cuando recordamos, razonamos o comunicamos nuestras reflexiones usualmente no lo hacemos presentado los objetos o conceptos sobre los que tratamos, sino que nos servimos de

[1] Egresada de programa de licenciatura en Matemáticas. Universidad de Nariño (Pasto). 2011
[2] Egresada de programa de licenciatura en Matemáticas. Universidad de Nariño (Pasto).2012

expresiones, dibujos o símbolos que, de algún modo, las representan. Para pensar y razonar sobre las ideas matemáticas es necesario hacerse una representación interna de las mismas de forma que, la mente, tenga la posibilidad de operar con tales representaciones. Para comunicar estas ideas es preciso representarlas externamente, para que sea posible dicha comunicación. En este sentido, este trabajo se realiza desde una perspectiva semiótica basada en las representaciones. Al respecto Kaput (1996) considera que la noción de representación es un instrumento teórico de gran ayuda para la caracterización de los procesos constructivos en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. El aspecto de la representación tiene cada vez más peso en la enseñanza. Así, Kaput (1996) considera necesario utilizar sistemáticamente varios sistemas de representación e incidir en sus relaciones desde el principio de la enseñanza para evitar que los alumnos obtengan visiones sesgadas de los conceptos. Los *Estándares Curriculares de Matemáticas,* del MEN (2003), señalan la importancia de las conexiones en Matemáticas en todos los niveles educativos; estas conexiones incluyen las que se producen entre dos representaciones equivalentes y los correspondientes procesos de cada una.

La enseñanza de la noción de límite tiende a ser abordada privilegiando las representaciones numéricas, para luego dar entrada a representaciones gráficas, pero, en uno y otro caso, se alude a ellas de forma limitada, (Medina, 2001); en consecuencia, no se recurre a este tipo de representaciones como verdaderos soportes para la comprensión del concepto de límite. Es aquí donde aparecen las dificultades en el aprendizaje de dicho concepto, pues los estudiantes aplican algoritmos sin comprender verdaderamente su significado, aspecto que, en palabras de Medina (2001), se ve reflejado en las concepciones erróneas que evidencian los estudiantes y que se manifiestan al resolver problemas en los que se hace necesaria su aplicación.

El estudio de las representaciones del concepto de límite se ha llevado a cabo en diferentes ámbitos, por ejemplo Blázquez y Ortega (2001), al analizar los "Sistemas de Representación en la Enseñanza del Límite", en España, llaman la atención sobre la necesidad de trabajar con diferentes sistemas de representación para mejorar la interpretación y comprensión de este concepto. Así mismo, Camós y Rodríguez (2010), al estudiar las "Conversiones entre los Registros Verbal y Simbólico en el Aprendizaje del Límite, analizan actividades que atienden a la conversión entre diferentes registros de representación y diseñan nuevas actividades que tienen en cuenta la conversión entre los registros semióticos, permitiendo a los estudiantes la construcción de una definición del concepto de limite, a partir de su propia actividad, estableciendo relaciones entre las representaciones. En un sentido diferente, Medina (2001), estudia las concepciones del concepto de límite en estudiantes universitarios, a partir de los libros de texto. Los resultados de esta investigación permiten afirmar que la forma de presentar el concepto de límite en los textos analizados, se ubica en los marcos analítico y algebraico; de esta manera el esquema o secuencia de la presentación del tema, relacionado con límites, se caracteriza desde dos enfoques: uno, referente al papel del concepto de límite en la estructura secuencial y lineal del Cálculo y otro, relacionado con el modelo didáctico de introducción del concepto.

Si bien llama la atención el cada vez más creciente interés por reflexionar sobre el rol que desempeñan las representaciones en la enseñanza y el aprendizaje de la noción de límite, en el campo de la educación matemática, son pocos los reportes de investigación que centran su atención en la manera en que los textos escolares recurren a las representaciones para construir dicha noción. Es más, en el análisis de los estudios de este tipo, que hasta el momento hemos realizado, no se ha encontrado evidencia alguna de investigaciones que permitan comparar libros de textos colombianos utilizados antes y después de la aparición de los estándares de Calidad. Así, pues, nuestro interés está centrado en discriminar los sistemas de representación y determinar los estándares básicos de calidad de matemáticas, utilizados en los textos escolares, al construir el concepto de límite. En este sentido pretendemos aportar elementos que nos permita dar respuesta a la siguiente cuestión ¿Cuáles y qué características tienen los sistemas de representación utilizados, al construir el concepto de límite de una función, en los libros de texto de grado undécimo? Se diseñó un modelo de análisis que permite caracterizar los ejemplos de los textos escolares privilegiados, al construir el concepto de límite, según la función que desempeñan en ellos las representaciones y los estándares de calidad.

Son dos los aspectos que nos han llevado a centrar la atención en el concepto de límite de funciones: su importancia para la construcción de nuevos conocimientos matemáticos y la complejidad que subyace a su enseñanza y a su aprendizaje. En el primer caso, el límite se constituye en uno de los tópicos de mayor importancia para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, posteriores a la educación obligatoria, pues, ocupa una posición central en el campo conceptual del cálculo, ya que su carácter estructural constituye el eje central y básico sobre el cual se construye el cálculo diferencial e integral. Además, debido a su carácter instrumental, tiende a ser usado como herramienta para la resolución de problemas, tanto de naturaleza matemática como cotidiana (Sánchez y Contreras, 1995). En relación a la complejidad en la enseñanza y aprendizaje del límite, son grandes las dificultades presentes en la transición del bachillerato al primer año de universidad. Según Enríquez y Palles (2007), en el bachillerato, se utiliza un discurso intuitivo donde la aplicación suele ser de naturaleza práctica más que teórica; por el contrario, a nivel universitario, su presentación se realiza de forma totalmente teórica y formal. Lo anterior genera un alto porcentaje de fracaso académico en las asignaturas de cálculo y grandes niveles de deserción estudiantil en las carreras universitarias.

En esta investigación a los libros de texto se les considera un importante lugar de interés, ya que, por un lado, son los materiales didácticos de mayor uso por parte de educadores, al preparar e implementar sus clases de matemáticas y, por los estudiantes, en sus intentos por comprender las matemáticas enseñadas (Pepín et al, en Marmolejo, 2011). Por otro lado, estos materiales didácticos son considerados por los educadores como importantes referentes que puntualizan, en la praxis educativa, las exigencias presentadas en los decretos y órdenes ministeriales (Schubring, 1987).

El propósito de este artículo es describir y caracterizar una metodología de análisis de textos escolares que permite discriminar tanto los tipos de representación, como los estándares de calidad, imperantes en la enseñanza del concepto de límite. Este instrumento de análisis está compuesto por cuatro categorías, tres de ellas según el sistema de representación utilizado (analítico, algebraico y aritmético); la otra, considera el tipo de estándar matemático privilegiado (utilización de técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos y uso de propiedades y representaciones en los números naturales y reales en el cálculo del límite).

2. Representaciones y sistemas de representación.

El marco teórico de referencia en la investigación fue el desarrollado por Goldin y Kaput (1996), en él se considera que la profundización de ciertas nociones matemáticas está íntimamente relacionada con el tipo de representación que movilizan y son estas, las representaciones, las que permiten referirse a los conceptos matemáticos de forma sistemática y precisa. En lo que sigue describimos los elementos que caracterizan el contexto teórico en el cual se desarrolla nuestro estudio.

Una representación es una configuración de algún tipo, que en su totalidad o en parte, significa, simboliza ó interactúa algo (Palmer, S. E. 1977). Las representaciones no se producen de forma aislada, al contrario, pertenecen a sistemas altamente estructurados (personales, idiosincráticos, culturales, convencionales), los cuales han sido denominados "sistemas de símbolos" o "sistemas de representación" (Goldin, 1987; Lesh, Landau, y Hamilton, 1983). Kaput (1983) considera dos tipos de representaciones; internas y externas. Las primeras aluden a todo tipo de configuraciones mentales que tiene un individuo. Al ser internas este tipo de representaciones no son directamente observables. Las representaciones externas, por su parte, aluden a todo tipo de configuraciones físicamente incorporadas en el sujeto, son accesibles a la observación; es el caso de las palabras, los gráficos, las imágenes, las ecuaciones, etc. Las representaciones externas pertenecen a sistemas estructurados y la interpretación de las relaciones que representan no es "objetiva" o "absoluta", sino que depende de las representaciones internas de las personas que hacen la interpretación.

De especial importancia son las interacciones bidireccionales entre representaciones internas y externas. Por lo general un sujeto exterioriza las representaciones internas, en forma física, a través de representaciones externas, como: actos de escritura, expresión oral, manipulación de los elementos de un sistema concreto externo, etc. que hace explicita tal exteriorización. Dichos actos interpretativos pueden tener lugar a nivel activo y deliberado y están sujetos a un control consciente, que se desarrolla de forma automática. Es aquí donde las estructuras físicas del individuo actúan como si "resonaran" en estructuras mentales previamente construidas (Grossberg, 1980). Así, el lenguaje natural o las expresiones matemáticas conocidas por el sujeto son "entendibles" sin que exista de por medio una actividad mental deliberada y consciente. Las interacciones entre las representaciones internas y externas suelen ocurrir de forma simultánea.

Según Goldin (1987, 1992) y Kaput (1987, 1991), un sistema de representación o sistema de símbolos puede ser entendido como un constructo conformado por caracteres primitivos o señales no siempre discretas; es el caso de las palabras habladas, las cartas del alfabeto o los números. Estas señales son a menudo incorporadas en algún medio físico, sin embargo, como lo afirman estos investigadores, los signos no deben ser entendidos literalmente como incorporaciones físicas, sino como clases de equivalencia de realizaciones, donde la equivalencia se determina a través de actos de interpretación. Así, cuando hablamos de la gráfica de $y = 3x - 6$ no alude a un dibujo particular o a una construcción matemática abstracta; se refiere, por el contrario, a una clase más o menos acotada de realizaciones "aceptables" para un sistema de representación gráfico de coordenadas. De hecho, las clases de equivalencia para una representación externa pueden considerarse como los aspectos compartidos de un sistema de este tipo con cualquier instancia particular o miembro de esta clase (Goodman, 1976). Las representaciones externas, pues, nos permiten hablar de relaciones matemáticas y su significado, independientemente de las inferencias del alumno. Las representaciones internas, por otra parte, nos dan el marco para describir las estructuras de conocimiento individual y procesos de solución de problemas. Las interacciones entre sistemas representacionales internos y externos proporcionan los medios para hacer inferencias acerca del aprendizaje de los individuos como consecuencia del ambiente y posibilidades del entorno.

Para Goldin y Kaput (1996), un sistema de representación externa es una estructura que contiene reglas o mecanismos para la manipulación de sus elementos. Desde esta perspectiva es importante diferenciar entre dos sistemas de representación, el uno analógico (basado en imágenes), el otro matemático. En el primer caso, los elementos fundamentales son los signos y las configuraciones. Las representaciones que provienen de este tipo de sistemas se caracterizan por dos aspectos, por un lado, guardan fuertes similitudes con el objeto que representan, por otro lado, no son representaciones de carácter verbal, ni formal. El sistema de representación analógico puede ser interpretado ampliamente para incluir imágenes internas y representaciones esquemáticas de la imagen; por ejemplo, los objetos y sus atributos. También pueden incluir representaciones externas inactivas y pictóricas, realizaciones concretas y manipulables, representaciones generadas por ordenadores etc. Las representaciones matemáticas, por su lado, son objetos abstractos con múltiples muestras físicas posibles.

Las representaciones internas basadas en imágenes se asumen, desde esta perspectiva, como elementos esenciales para la comprensión e intuición matemática, que van desde el concepto de número y el significado de las operaciones aritméticas y construcciones geométricas, a la comprensión de las ecuaciones y funciones a través de gráficos cartesianos.

Los sistemas formales de representación, en palabras de Goldin (1987, 1992) y Kaput (1987, 1991), se asumen como constructos conscientes a considerar en el logro de metas específicas y abiertas, donde las reglas no siempre son implícitas. Son ejemplos de sistemas formales de representación matemáticos, entre otros, el sistema de numeración y los sistemas algebraicos de notación. Por otra parte, los sistemas informales han evolucionado con reglas predominantemente implícitas como lo es la lengua natural. Algunos sistemas, más o menos informales, más tarde tienden a ser formalizados. Está claro que el proceso de desarrollo de las matemáticas durante siglos ha involucrado muchos actos de formalización, como la introducción de notaciones formales y la creación de definiciones, axiomas y métodos de prueba.

3. Representaciones y estándares de calidad en los libros de texto: un instrumento de análisis

El instrumento de análisis a describir se diseñó de forma inductiva, es decir, las categorías de análisis fueron extraídas de los libros o adaptadas a los temas que en ellos se desarrolla. Se consideraron los capítulos donde, explícitamente, lo libros de texto abordan el estudio de límite de funciones. Se analizaron 4 manuales escolares (grado once); los de mayor uso en la cuidad de Pasto (Colombia). Las unidades de análisis son los ejemplos propuestos en los libros de texto. Fueron tres los sistemas de representación considerados en dichos libros al suscitar la enseñanza del límite de funciones (analítico, algebraico y aritmético) y dos las clases de estándar de calidad[3] movilizados. En lo que sigue describimos y ejemplificamos en detalle cada una de ellas.

3.1. El Sistema de representación analítico: considera todo tipo de representaciones sobre las que se construye el concepto de límite de funciones (Medina, 2001). Son cinco los tipos de representación que aparecen en los ejemplo de los libros de texto donde se estudia el limite de funciones, a saber:

- *Numérico-tabular de función:* a través de una tabla de valores y de un proceso de tabulación se representa el comportamiento de una función considerando valores próximos a un punto determinado. En la ilustración 1 se ejemplifica este tipo de representación; se desataca en ella los valores que toma la función cuando x se aproxima a 3, tanto por la derecha como la izquierda. Así, se evidencia intuitivamente el valor al que tiende el límite de la función que se estudia (Medina, 2001).

Ejemplo:

1. Calcular el límite de $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ para $x \to 3$.

Solución:

La tabla muestra los valores *f(x)* en varios *x* cercanos al 3.

x	4	3,5	3,1	3,01	3,001	3	2,999	2,99	2,9
$\frac{x^2-9}{x-3}$	7	6,5	6,1	6,01	6,001	?	5,999	5,99	5,9

Luego: concluimos que el límite es 6.

Ilustración 1: Representación numérico-tabular de la función $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ Tomado en Matemática 11 Editorial Santillana (1995), p. 50.

[3] Los estándares son enunciados que establecen criterios claros, sencillos y medibles, que los maestros y maestras deben considerar como meta del aprendizaje de sus estudiantes, y de lo que deben saber y saber hacer. En otras palabras, son los aprendizajes básicos que todo niño o niña de un grado debe alcanzar al finalizar el ciclo escolar. Además son un marco de referencia para los docentes de lo que los estudiantes han de saber y saber hacer al finalizar un grado, ciclo o nivel escolar.

- *Gráfico-cartesiano:* describe gráficamente por medio de representaciones en el plano cartesiano el acercamiento de la variable dependiente a un valor cuando la variable independiente tiende a otro; en ocasiones no se describen los acercamientos, solo aparece la curva de la función. La ilustración 2 evidencia este tipo de representación (Medina, 2001).

Ejemplo:

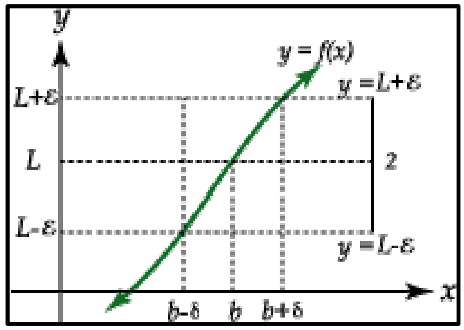

Ilustración 2: representación gráfico-cartesiano de la función $y = f(x)$ Tomado en Espiral 11 Editorial Norma (2005), p. 124.

La representación gráfica es una herramienta muy útil para comprender la definición formal del límite, ya que de su análisis puede extraerse la idea intuitiva de que el límite de una función f, cuando x tiende a b, es L, si puede lograrse que $f(x)$ esté tan próximo a L como se desee, siempre que se tomen valores de x lo suficiente próximos a b. Esto significa que la distancia entre $f(x)$ y L puede hacerse tan pequeña como se desee y de aquí que, para cada número positivo ε, por pequeño que este sea, se tenga que:$|\ f(x) - L\ | < \varepsilon$ "para ciertos valores de x".

- *Simbólico-específico de función*: según Medina (2001), este tipo de representación suele aparecer en tareas donde se pide calcular el límite de una función a través de la expresión $\lim_{x \to a} f(x) = L$**.** Para evaluar el límite en cuestión es necesario sustituir sobre la expresión de la función el valor al que ha de tender la variable independiente (sustitución directa). La actividad presentada en la ilustración 3 es un ejemplo tomando de los libros de texto donde este tipo de representación juega un papel determinante.

Ejemplo:

c. $\text{Lím}_{x \to 1} \dfrac{3x - 2}{2x - 1}$

Como $2(1) - 1 = 1$, por tanto, $2x - 1$ es diferente de 0 cuando $x = 1$. Luego,

$\text{Lím}_{x \to 1} \dfrac{3x - 2}{2x - 1} = \dfrac{3(1) - 2}{2(1) - 1}$ *Se aplica la sustitución directa.*

$= \dfrac{3 - 2}{2 - 1} = 1$ *Se realizan las operaciones.*

Por tanto, $\text{Lím}_{x \to 1} \dfrac{3x - 2}{2x - 1} = 1$

Ilustración 3: representación simbólico-específico de la función $f(x) = \frac{3x-2}{2x-1}$ Tomado en Hipertexto 11 Editorial Santillana (2011), p. 93.

En esta investigación consideramos que las representaciones simbólico-especificas están presentes en los ejemplos de los libros de texto únicamente cuando, de forma explicita, se pone en evidencia la aplicación del proceso de sustitución directa.

- *Definición formal de función:* en el desarrollo o compresión de la problemática planteada se considera explícitamente que: Sea f una función cuyo dominio es el intervalo *I.* Sea "a" un valor cualquiera que puede o no pertenecer a *I*. Decimos que: $\lim_{x \to a} f(x) = L$, si y solo si: $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$. De igual manera, esta dimensión se evidencia en ejemplos donde se comprueba la existencia del límite aplicando la definición (Medina, 2001). Como es el caso presentado en la ilustración 4.

Ejemplo:

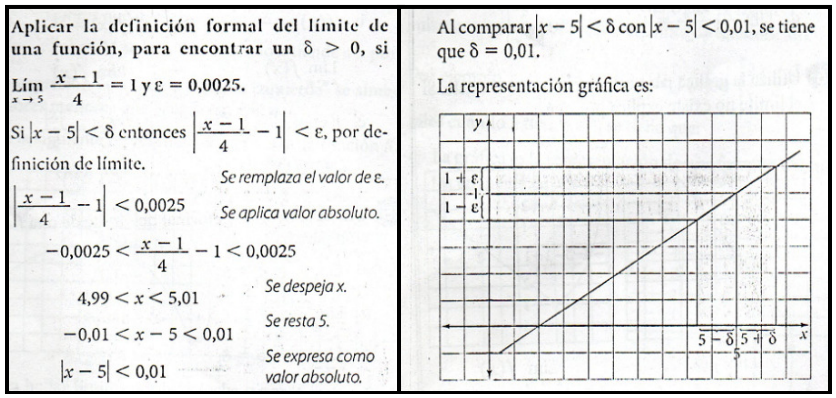

Ilustración 4: definición formal de la función $f(x) = \frac{x-1}{4}$ Tomado en Hipertexto 11 Editorial Santillana (2011), p. 87.

- *Verbal de función*: al definir el límite de una función no se recurre explícitamente a los símbolos ε y δ, que representa respectivamente a $|f(x) - L|$ y $|x - a|$. Por el contrario, se alude a ellos de forma implícita a través de expresiones tipo: si nos acercamos a "a" a través de valores muy cercanos a "a" pero más pequeños (ó más grandes) que él $f(x)$ se aproxima a"L" (Medina, 2001). En el ejemplo de la ilustración 5 se recurre a este tipo de representación.

Ejemplo:

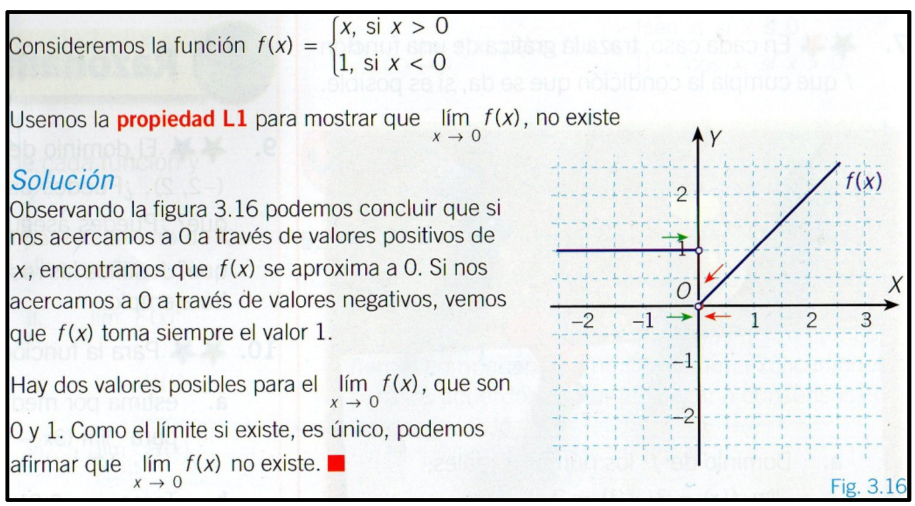

Ilustración 5: representación verbal del límite de la función$f(x) = \begin{cases} x \; si \; x > 0 \\ 1 \; si \; x < 0 \end{cases}$Tomado en Espiral 11. Editorial Norma (2005), p. 128.

3.2. El Sistema de Representación Algebraico: según Medina (2001) este sistema hace uso de notaciones y simbolismo de naturaleza algebraica. Su aplicación se reduce a la presentación de teoremas de límites y a la aplicación de algoritmos de naturaleza algebraica. El sistema de representación algebraico aparece en los libros de texto por dos clase de representación, a saber:

- *Algebraico-indeterminado:* presente en los procesos de cálculo de límites donde la aplicación de factorizaciones, racionalizaciones, uso de conjugadas y simplificaciones se constituyen en el único camino que permite dejar de lado posibles indeterminaciones (observar ejemplo presentado en la ilustración 6).

Ejemplo:

2. Calcular $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

Solución:

Primero eliminamos la indeterminación:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} =$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x+3}+2)} =$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} = \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}.$$

Luego: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \dfrac{1}{4}$

Ilustración 6: representación algebraica-indeterminada de la función $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ Tomado en Matemática 11 Editorial Santillana (1995), p. 53.

- *Algebraico-simple:* al igual que en el caso de las representaciones algebraicas-indeterminadas, se aplican en el proceso de cálculo de límite de una función, tanto factorizaciones como racionalizaciones. Pero en este caso el propósito es simplificar la expresión algebraica en cuestión y no para "eliminar" una posible indeterminación. Este tipo de representaciones suelen estar presentes en tareas donde es necesario calcular el límite de una función mediante la aplicación de la definición formal del límite. En la ilustración 7 se presenta un ejemplo de los libros de texto en los que este tipo de representación hace presencia.

Ejemplo:

2. Utilizar la definición de límite para comprobar que $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{2+\sqrt{x}} = \dfrac{1}{3}$

Solución:

Por definición de límite, tenemos:

$$\left|\frac{1}{2+\sqrt{x}} - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{3-(2+\sqrt{x})}{3(2+\sqrt{x})}\right| = \left|\frac{1-\sqrt{x}}{3(2+\sqrt{x})}\right| =$$

$$= \left|\frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{3(2+\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}\right| = \left|\frac{1-x}{3(2+\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}\right| =$$

$$= \frac{|1-x|}{6+9\sqrt{x}+3x} < \frac{|1-x|}{6}$$

Resulta que dado $\varepsilon > 0$, para $\delta = 6\varepsilon$ se cumple la condición de límite, ya que: $[|x-1| < \delta = 6\varepsilon]$.

Luego: $\left|\frac{1}{2+\sqrt{x}} - \frac{1}{3}\right| < \frac{|1-x|}{6} < \frac{\delta}{6} = \varepsilon$

Ilustración 7: representación algebraica-simple de la función $f(x) = \frac{1}{2+\sqrt{x}}$ Tomado en Matemática 11 Editorial Santillana (1995), p. 51.

3.3. El Sistema de Representación Aritmético: considera todo tipo de representaciones donde los números y la aplicación de operaciones sobre ellos juegan un papel determinante. Las representaciones que provienen de este sistema de representación están presentes en los ejemplos de los manuales escolares donde se reflexiona sobre el límite de sucesiones (Medina, 2001). Son 5 las subcategorías que lo describen:

- *Numérico-tabular de sucesión:* la representación del límite se realiza a través de una tabla de valores; en ella se expresan tanto los valores de la variable independiente como los de la sucesión. El propósito de este tipo de representaciones es poner en evidencia la tendencia del límite de la sucesión en estudio; es el caso del ejemplo mostrado en la ilustración 8, donde se muestran acercamientos infinitos numerables y sucesivos. En este caso se describe únicamente los primeros términos de la sucesión. Esta clase de representación se construye a partir de cálculos numéricos y se hace de forma inductiva (Medina, 2001).

Ejemplo:

n	S_n	S_n	$/1-S_n/$
1	½	0.5	0.5
2	¾	0.75	0.25
3	7/8	0.875	0.125
4	15/16	0.9375	0.0625
.	.	.	.
10	1023/1024	0.999023437	0.000976563
.	.	.	.
30		0.999999999	0.00000000093
...	.		

Ilustración 8: aproximaciones para la suma de ½+¼ + 1/8 + 1/16 +...n. Tomado de estudio "Concepciones del concepto de límite" de Medina (2001), p. 44.

- *Simbólico-específico de sucesión:* se da cuando se presenta un ejercicio de cálculo de límite de una sucesión de la forma $\lim_{n\to\infty} S_n = L$, obteniendo así el límite L (Medina, 2001).

Ejemplo:

1. Hallar: b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n^3+3}{2n^3+3n}\right)^{\frac{n^2+2}{n^2}}$

b) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n^3+3}{2n^3+3n}\right)^{\frac{n^2+2}{n^2}} = \left(\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3+3}{2n^3+3n}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+2}{n^2}}$$

Como $$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3+3}{2n^3+3n} = \lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{3}{n^3}}{2+\frac{3}{n^2}} = \frac{4}{2} = 2, \text{ y}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n^2}}{1} = \frac{1}{1} = 1, \text{ entonces}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n^3+3}{2n^3+3n}\right)^{\frac{n^2+2}{n^2}} = 2^1 = 2$$

Ilustración 9: representación simbólico-especifico de la sucesión $a_n = \frac{1}{n}$ Tomado en Matemática Moderna Estructurada 6 Editorial Norma (1976), p. 101.

En este tipo de representación, a diferencia de la simbólico-especifico de una función, no se realiza el proceso de sustitución directa, por el contario, es a través de transformaciones algebraicas que se llega a la expresión general $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ (ver el ejemplo presentado en la ilustración 9)

- *Definición formal de sucesión:* según Medina (2001), este tipo de representación está caracterizada por aquellos apartados donde está presente la siguiente definición: una sucesión (Sn) tiene límite L si, para cada número positivo ε, existe un número positivo N (que en general depende de ε) tal que $|s_n - L| < \varepsilon$ para todo $n \geq N$

Ejemplo:

Demuestre que si $|r| < 1$, entonces la sucesión $\{r^n\}$ es convergente y r^n converge a cero.

Solución Primero se considera $r = 0$. Entonces la sucesión es $\{0\}$ y $\lim_{n\to+\infty} 0 = 0$. De este modo, la sucesión es convergente y el n-ésimo elemento converge a cero.

Si $0 < |r| < 1$, se debe demostrar que se cumple la definición 8.2.2 con $L = 0$. Por tanto, debe probarse que para cualquier $\epsilon > 0$ existe un número $N > 0$ tal que si n es un número entero y

$$
\begin{array}{llll}
 & \text{si } n > N & \text{entonces} & |r^n - 0| < \epsilon \qquad (4)\\
\Leftrightarrow & \text{si } n > N & \text{entonces} & |r|^n < \epsilon\\
\Leftrightarrow & \text{si } n > N & \text{entonces} & \ln|r|^n < \ln\epsilon\\
\Leftrightarrow & \text{si } n > N & \text{entonces} & n\ln|r| < \ln\epsilon
\end{array}
$$

Como $0 < |r| < 1$, $\ln|r| < 0$. La proposición anterior es equivalente a

$$\text{si } n > N \quad \text{entonces} \quad n > \frac{\ln\epsilon}{\ln|r|}$$

Por tanto, si $N = \ln\epsilon/\ln|r|$, se cumple (4). En consecuencia, $\lim_{n\to+\infty} r^n = 0$. De modo que la sucesión $\{r^n\}$ es convergente y r^n converge a cero. ◀

El teorema siguiente incorpora los teoremas de límites para sucesiones que son análogos a los teoremas de límites para funciones. Las demostraciones se omiten debido a que son semejantes a las demostraciones de los teoremas correspondientes para límites de funciones.

Ilustración 10: definición formal de la sucesión $a_n = r^n$ Tomado en El Cálculo de Leithold (1998), p. 652.

- *Verbal de sucesión:* en palabras de Medina (2001), en esta dimensión se presenta una descripción de la definición formal de sucesión; no se recurre explícitamente a los símbolos ε y δ y los cuantificadores $\forall$ y $\exists$, si se hace referencia a ellos, es de naturaleza totalmente implícita

Ejemplo: "El límite de una sucesión es el número respecto al cual todos los términos de la sucesión, después de cierto punto varían solamente por un número pequeño ε y esto para todo ε" (Vinner, 1991, p. 78).

En el ejemplo anterior se describe los acercamientos al punto límite de una sucesión, de forma totalmente implícita se alude al valor de N a partir de un épsilon dado.

- *Recta real:* en esta dimensión se recurre a la recta real para expresar el concepto de límite, se ubican en ella puntos cada vez más cercanos al valor límite, siempre que n sea más grande que N (Medina, 2001).

Ejemplo:

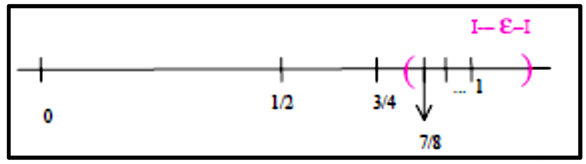

Ilustración 11: representación del límite de la sucesión $\left(1 - \left(\frac{1}{2n}\right)\right)$ por medio de puntos en una recta. Tomado en "Concepciones del concepto de límite" de Medina (2001), p. 46.

En el anterior ejemplo, la diferencia entre el punto al que tiende el límite de la sucesión $\left(1 - \left(\frac{1}{2n}\right)\right)$ y el término cercano a él se mide a través del calculo de la distancia entre ellos. Cualquier intervalo centrado en 1 contiene una infinidad de elementos de la sucesión y después de un valor N se encuentran todos los valores que le siguen.

- *Cartesiano:* los valores de la iteración de la sucesión forman un conjunto discreto de puntos, quedando representada la sucesión como función (Medina, 2001).

Ejemplo:

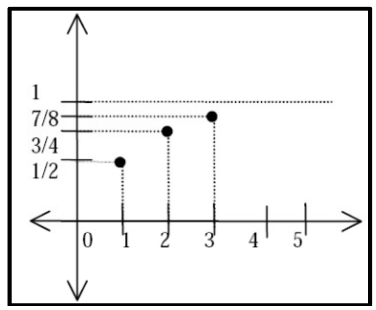

Ilustración 12: representación cartesiana de la sucesión $\left(1 - \left(\frac{1}{2n}\right)\right)$. Tomado en "Concepciones del concepto de límite" de Medina (2001), p. 46.

La representación del ejemplo anterior es de carácter global y muestra un punto de vista funcional. Los valores de la iteración de la sucesión forman un conjunto discreto de puntos; de esta forma se representa la sucesión como un tipo de función. Si no se considera el intervalo de radio ε sobre el eje y se pone en evidencia la idea de aproximación finita ó acercamiento a la recta $y = 1$ como medida de la distancia de los puntos a la recta. Por el contrario, al considerar dicho intervalo o vecindad, la idea de límite tiende a ser asociada a una aproximación infinita.

3.4 Estándares Curriculares: son dos los pensamientos matemáticos que los ejemplos de los libros de texto privilegian al reflexionar sobre el límite de funciones y sucesiones: numérico y variacional. Esta categoría alude a los estándares que designan acciones y habilidades relacionadas con estos dos tipos de pensamiento; se divide en dos subcategorías:

- *Utilización de técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos,* presente en los ejemplos de los textos escolares donde se privilegian acciones relacionadas con la interpretación y/o definición gráfica de un límite; determinación de un límite por aproximación, y de asíntotas horizontales, verticales y oblicuas en una función y aplicación de la definición formal del límite.

- *Uso de propiedades y representaciones en los números naturales y reales en el cálculo del límite,* relacionado con la puesta en acto de procedimientos como la aplicación de propiedades algebraicas, la evaluación de límites, el calculo de límites mediante la aplicación de propiedades de límites, el calculo de límites infinitos y al infinito, de funciones indeterminadas, de funciones trigonométricas.

4. Conclusión

Los libros de texto son considerados por los educadores como importantes referentes que puntualizan en la praxis educativa las exigencias presentadas en los decretos y órdenes ministeriales, y es así, que el instrumento metodológico aquí presentado es importante a la hora de evidenciar las diferentes características del concepto y conocer el funcionamiento de sus representaciones, para poder abordarlo desde diferentes perspectivas y de esta forma ayudar a su comprensión, además permite reconocer qué representaciones predominan al plantear el concepto y cómo se utilizan. Así mismo permite puntualizar el papel que juegan las habilidades matemáticas en la construcción del límite de funciones.

Referencias bibliográficas.

[1] Blázquez, S. & Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, p. 229-230.

[2] Camós, C. y Rogriguez, M. (2010). Exploración del uso de los leguajes natural y simbólico en la enseñanza de la Matemática superior. Proyecto de Tesis Doctoral en matemáticas. Universidad Abierta interamericana (Argentina). 185p.

[3] Encuentro colombiano de Matemática Educativa. (2007). Análisis de textos escolares en los dos primeros ciclos de la educación básica, identificando el rol de las figuras geométricas, la visualización y los factores de visibilidad en el aprendizaje del área de las figuras geométricas bidimensionales. Cali: Universidad del valle, marzo del 8 al 10, 2007: Cali Colombia.

[4] Enríquez, M. y Palles, R. (2007) un estudio acerca de la dificultades en el aprendizaje del concepto de límite de una función en el grado once de enseñanza media del colegio IMEM-Pasto. Universidad de Nariño (Pasto). Departamento de Matemáticas y estadística. 179p.

[5] Goldin, G. y Kaput, J. (1996). A join perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. En L. Steffen, P. Nessher, P. Cobb, G. Goldin y B. Greer (Eds.), Theories of mathematical learning , pp. 397- 430. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Asociates.

[6] Goldin, G. A. (1987). Cognitive representational systems for mathematical problem solving. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the leaching and learning of mathematics* (pp. 125-145). Hillsdale, NJ: Lawrence Eribaum Associates.

[7] Grossberg, S. (1980). How does a brain build a cognitive code? Psychological Review, 87, 1-51.

[8] Kaput, J. y Goldin, G. (1987). Representation Systems and Mathematics. En: Janvier, C. Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics. Ed. Lawrence Erlbaum Associates, Publishers. New Jersey, USA, p. 397- 431.

[9] Kaput, J. (1983. Representation systems and mathematics. In J. C. Bergeron & N. Herscovics (Eds.), *Proceedings of the Fifth Annual Meeting of PME-NA* (Vol. 2, pp. 57-66). Montreal: University of Montreal Faculty of Educational Sciences. Reprinted in Janvier (1987, pp. 19-26).

[10] Leithold, Louis. (1992). El Cálculo con geometría analítica. 6ª. Edición. Ed. Harla, S. A. México.

[11] Lesh, R., Landau, M., & Hamilton, E. (1983). Conceptual models in applied mathematical problem solving research. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), Acquisition of mathematics concepts and processes (pp. 263-343). New York: Academic Press.

[12] Medina, A. (2001). Concepciones del concepto de límite en estudiantes universitarios. Trabajo de grado (Maestría en Docencia de la Matemática). Bogotá D.C.: Universidad Pedagógica Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias y Tecnología. Departamento de Matemáticas, 231 h.

[13] Ministerio de Educación Nacional (2003) Matemáticas. Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. MEN. Gados once. Bogotá - Colombia.

[14] Palmer, S. E. (1977). Fundamental aspects of cognitive representation. In E. Rosch& B. B. Lloyd, Ed, Cognition and categorization. Hillsdale, NJ: Lawrence Eribaum Associates.

[15] Pepin, B. et al. (2001). Mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: a way to understand teaching and learning culture. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 33(5),P. 17.

[16] Sánchez y Contreras (1995). Análisis de manuales a través del tratamiento didáctico dado al concepto de límite de una función: una perspectiva desde la noción de obstáculo. En: Enseñanza de las Ciencias, Vol. 16, No. 1, p. 73-84.

[17] Schubring, G. (1987). On the methodology of analyzing historical textbooks: lacroix as textbooks author. For the Learning of Mathematics, 7(3).

[18] Vinner, S. (1991). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. En TALL, D. (Ed.), Advanced mathematical thinking. Dordrecht: Kluwer, pp. 65-81.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
UNIVERSIDAD DE NARIÑO
e-mail: lmarcegom@gmail.com
yuly-david@hotmail.com