Osejo. 2017. Aproximaciones iniciales a la resolución de problemas modelados con sistemas de ecuaciones lineales de tres variables en programación lineal usando por primera vez un método gráfico. Revista Sigma, 13 (2). Pág. 16-27 http://coes.udenar.edu.co/revistasigma/articulosXIII/2.pdf

REVISTA SIGMA
Departamento de Matemáticas
Universidad de Nariño

Volumen XIII №2 (2017), páginas 16–27

Aproximaciones iniciales a la resolución de problemas modelados con sistemas de ecuaciones lineales de tres variables en programación lineal usando por primera vez un método gráfico

Camilo. Osejo-Bucheli [1]

Abstract. The following work shows one of the first successful attempts to solve problems in applied linear programming which use equation systems with three variables using a graphic method. In order to have a successful application of that sort of method, the use of descriptive geometry and perspective methods to add and substract volume was used. The applications of the proposed method can be extended to any first degree, three variables equations system, yet the application of this method has an immediate impact in linear programming especially for academic purposes.

Keywords. Linear programming Descriptive Geometry Otimization Linear Algebra.

Resumen: El siguiente artículo muestra la aplicación exitosa de un nuevo método gráfico para la resolución de problemas de programación lineal que contengan sistemas de ecuaciones de tres variables de primer grado.

Debido a que graficar exitosamente tres variables exige un sistema de coordenadas de tres dimensiones, se optó por usar la geometría descriptiva más específicamente la perspectiva. Para expresar una diferencia y hacer uso del método gráfico como paralelo al nuevo método propuesto, he nombrado temporalmente a este nuevo método propuesto como el "Método Proyectivo".

Las aplicaciones más directas y útiles del método serán en la resolución de problemas de programación lineal modelados con sistemas de ecuaciones como los descritos anteriormente, sin embargo, el representar gráficamente tiene entre otras ventajas, por ejemplo: la fácil identificación de por qué los resultados de maximización o minimización son los óptimos a simple vista, y por esta razón tendrá una aplicación directa e inmediata en la academia.

Palabras Clave. Programación lineal Geometría Descriptiva Optimización Algebra Lineal.

[1] Mg Administración, Universidad del Valle, Docente Tiempo completo del departamento de Administración, Universidad de Nariño. Email: camiloosejo@hotmail.com, Colombia. Email: camiloosejo@hotmail.com

1. Introducción

El siguiente artículo es producto de la investigación profesoral "APLICACIÓN DE LA GEOMETRÍA DESCRIPTIVA PARA RESOLVER PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN LINEAL CON TRES VARIABLES APLICADAS EN EL CAMPO DE LA ADMINISTRACIÓN DE OPERACIONES" del grupo de Investigación S.O.L. del departamento de Administración de Empresas de la Universidad de Nariño. Este artículo resume los primeros avances en la investigación.

En administración de Operaciones (AO) e Investigación de Operaciones (IO), se hace un fuerte enfoque en la aplicación de métodos cuantitativos para la optimización, razón por la cual, la utilización de Programación Lineal (PL) es muy necesaria, las aplicaciones de esta en AO son muy diversas y abordan las 10 decisiones del Administrador de Operaciones en su totalidad; es fácil encontrar aplicaciones en Distribución, Inventario, Administración de Restricciones, Localización, Administración de procesos, Procesos de planificación, y por supuesto en Programación de la producción, etc. Y es en consecuencia, entre los métodos cuantitativos que se abordan en investigación de operaciones, el más versátil.

Entre los métodos para la resolución de problemas de programación lineal, se encuentra el método gráfico, -referido en algunos volúmenes de la literatura de métodos cuantitativos para administración de operaciones como "el enfoque gráfico"- este tiene la característica de permitir ver en conjunto del sistema de ecuaciones planteado, y como su nombre lo indica, gráficamente, todas las restricciones (ecuaciones de restricción) al mismo tiempo. Esto tiene una connotación didáctica importante, por cuanto el cerebro procesa de manera mucho más expedita y natural, las imágenes que las abstracciones numéricas.

Sin embargo, el método o enfoque gráfico, se limita a la representación de sistemas ecuaciones lineales con dos variables, debido a que se gráfica en un plano cartesiano (dos ejes).

Este artículo presenta un ejemplo de las primeras aproximaciones exitosas a responder la pregunta: ¿Es posible aplicar el método grafico para resolución de sistemas de ecuaciones lineales de tres variables, representando gráficamente dicho sistema, y aplicando la misma lógica de resolución del método gráfico tradicional?.

2. Métodos y Materiales

2.1. Programación lineal:

Chase, Jacobs y Aquilano (2009:37) definen la programación lineal (o PL): "...se refiere a varias técnicas matemáticas utilizadas para asignar, en forma óptima, los recursos limitados a distintas demandas que compiten por ellos. La PL es el más popular de los enfoques que caben dentro del título general de técnicas matemáticas para la optimización y se ha aplicado a muchos problemas de la administración de operaciones..."

Según los mismos autores, algunas aplicaciones típicas son: Planeación de operaciones y ventas agregadas, Análisis de la productividad en la producción/servicios, Planeación de los productos, Rutas de los productos, Programación de vehículos/cuadrillas, Control de procesos, Control de inventarios, Programación de la distribución, Estudios para ubicar la planta, Manejo de materiales. Por otro lado Taha (2011) "...La técnica de IO más importante es la programación lineal. Está diseñada para modelos con funciones objetivo y restricciones lineales. Otras técnicas incluyen la programación entera (en la cual las variables asumen valores enteros)...".

2.2. Métodos para la programación lineal.

Los métodos que se usan para la resolución de problemas son el método gráfico, donde se grafican las ecuaciones en un plano cartesiano, lo que permite ver el comportamiento de cada una de las restricciones y la función objetivo dentro del sistema y del problema en su totalidad de forma clara en el proceso de resolución del mismo. Otra forma de resolución de sistemas de es el método simplex, que se usa en conjunción y usualmente es sinónimo con el método gráfico, es un proceso algebraico iterativo, que toma puntos extremos de las soluciones factibles y evalúa el comportamiento de la función objetivo con cada iteración (Krajewsky et al, 2008:610). La forma más usual para resolver problemas de programación lineal es usando el MSExcel-solver, que es una función del programa Excel, específica para la resolución de este tipo de sistemas de ecuaciones, sin embargo, para la utilización de este método hay que tener un conocimiento básico de la herramienta y del método, y el programa no arroja proceso, sino solo resultados, por lo cual no es de uso amplio en entornos académicos cuando se aborda la pedagogía del método, y es la herramienta más popular en el uso diario de la Investigación de Operaciones. Potencialmente existen otros métodos como el algebraico, o el álgebra lineal, que son aplicables a este tipo de sistemas de ecuaciones, pero que no se usan comúnmente ni se citan en los textos de administración de operaciones de uso más corriente.

2.3. Geometría descriptiva.

La geometría descriptiva (GD) es una ciencia que trata la representación de cuerpos tridimensionales en un espacio bidimensional mediante técnicas estandarizadas de representación, lo que permite la operación con exactitud de estos cuerpos. La geometría descriptiva se ocupa de dos cosas: la representación y la operación. La operación en GD, se resume en la relación de los cuerpos, es decir, la intersección, unión, sustracción, y la relación entre cuerpos, perpendicularidad, paralelismo, etc. Otras operaciones que tienen un poco mayor complejidad son la obtención de verdadera magnitud, proyección, homología, analogía, rotación perspectiva, etc. y en general, la especificación de lugares geométricos.

2.4. Perspectiva.

La perspectiva es una variación importante de la representación en geometría descriptiva, y aborda la posibilidad de representar de forma exacta cuerpos, incluyendo las deformaciones que se producen en los mismos con la visión normal, de manera tal que aquellos cuerpos que están representados de manera exacta en bidimensional, sean al mismo tiempo, operables, y familiares estéticamente a lo que se percibe con el ojo a simple vista.

2.5. El modelado en la Programación Lineal.

La PL, antes de abordar la resolución de los problemas requiere un modelado de estos, el cual consiste en definir las variables que se requiere encontrar, en términos de incógnitas $(x_1, x_2, x_3 \cdots x_i)$ Formular las relaciones entre ellas planteadas en las restricciones del sistema, y una función, cuyo objetivo es la maximización o la minimización, es decir, encontrar las combinaciones de magnitudes de las variables antes definidas, de forma que se obtenga el máximo posible (por ejemplo, utilidades en una combinación de productos) o el mínimo posible (por ejemplo, en el costo de operación de dos fábricas).
Es por esto que el modelo de la PL tomará siempre la siguiente forma:

$$\text{Maximizar (minimizar) } Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_n$$

sujeto a las restricciones de los recursos con fórmula

$$\begin{array}{rcccc} Z = & A_{11}X_1 + A_{12}X_2 & \ldots & +A_{1n}X_n + \leq B_1 \\ Z = & A_{21}X_1 + A_{22}X_2 & \ldots & +A_{2n}X_n + \leq B_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z = & A_{m1}X_1 + A_{M2}X_2 & \ldots & +A_{mn}X_n + \leq B_M \end{array}$$

Un problema de PL se considera resuelto, en cuanto se ha logrado plantear exitosamente el modelo, debido a que, como se dijo antes, existen diferentes métodos para resolver el sistema de ecuaciones.

2.6. La resolución usando el método gráfico.

El algoritmo para aplicar el método gráfico: 1. Plantear en términos matemáticos (Formular el modelo), 2. Trazar las ecuaciones de las restricciones. (Convertir las ecuaciones en rectas, igualando alternativamente cada una de sus incógnitas a cero, en caso de que las contenga ambas), 3. Trazarlas en el plano, 4. Determinar el área de factibilidad. 5. Trazar la función objetivo, 6. Encontrar el punto óptimo.

2.7. Otras consideraciones.

Autores como Davis/McKeon (1984:28) afirman que el método gráfico solo sirve para resolver problemas de dos variables, Mathur y otro (1996) Afirman que, aunque el mundo real tiene muchas más variables, el método gráfico solo sirve para resolver problemas con dos variables. Por otro lado, TAHA (1997:14) dice que el método gráfico sirve para operar dos variables, cuando el mundo real presenta miles, y la excepción la presenta Chase y otros (2009:39), sugieren que mientras el método gráfico sirve para operar dos variables en PL, usando el plano, posiblemente modelos de tres variables pueden ser resueltos en el espacio.

3. La metodología propuesta:

Tal como lo intuyeron Chase y otros (2009), debe ser posible graficar sistemas de ecuaciones que contengan ecuaciones lineales de tres variables.
Si fuera posible graficar dichas ecuaciones, equivalentes a las restricciones del modelo matemático de un problema de programación lineal usando los métodos gráficos de intersección de planos, adición y sustracción de espacio de un volumen, en la perspectiva, podemos, usando la misma lógica del método gráfico de programación lineal, lograr un espacio de solución factible y someterlo a la evaluación del método simplex para determinar la solución óptima. El pasar de hacer una implementación de un método gráfico (bidimensional) que es totalmente intuitivo, a un método que contemple el espacio, no es igualmente intuitivo; Debido a que es necesario recurrir a herramientas de representación que no son propias de la programación lineal, ni del álgebra; es por esta razón que se recurrirá a las reglas de representación y operación de planos y sólidos que brinda la perspectiva. A este nuevo método, como se mencionó antes, se lo llamará de ahora en adelante, y de forma temporal el método proyectivo.

3.1. Se propone seguir el siguiente algoritmo:

1. Formular el modelo matemático asegurándose que no se encuentra un sistema de ecuaciones diferente a ecuaciones lineales con tres variables.

2. Verificar la condición de no negatividad de las variables en las restricciones determinando los puntos que definen el plano.

3. Graficar en perspectiva el volumen (generalmente un prisma) factible resultante del dimensionamiento mínimo o máximo de las variables independientes, si este existiera.

4. Graficar alternativamente las restricciones, y determinar la intersección resultante con el volumen inicial.

5. Verificar la adición o sustracción del volumen factible.

6. Repetir los pasos 4 y 5, con todas las demás restricciones.

7. Una vez se ha sustraído/añadido todas las restricciones al volumen factible, y se ha conseguido el volumen factible final, se determinan las soluciones óptimas que se ubicarán en cada uno de los vértices del volumen factible final.

8. Ya que el resultante es un volumen, y ya que interpretar un volumen es mucho más natural que otras convenciones, se descartan aquellos vértices del volumen o prisma truncado factible, que evidentemente no cumplan como solución óptima (lo anterior se hace solo para agilizar el proceso, y debido al rigor del método, en el ejemplo siguiente no se lo hará. En cambio, se analizarán todas las posibles soluciones).

9. Se verifica mediante simplex, la solución óptima y las de iso-utilidades.

4. La aplicación (Ejemplo 1):

Para la aplicación se toma un ejemplo popular, cuyo planteamiento y resolución por otros métodos, se encuentra en numerosas coincidencias en los buscadores de internet.: Minas Universal opera tres minas en West Virginia. El mineral de cada una se separa, antes de embarcarse, en dos grados. La capacidad diaria de producción de estas, así como sus costos diarios de operación son los siguientes:
Tabla 1. Relación de grado.

	Mineral de grado alto, ton/día	Mineral de grado bajo, ton/día	Costo de operación $ 1000/día
Mina I	4	4	20
Mina II	6	4	22
Mina III	1	6	18

Fuente: Esta investigación.
La Universal se comprometió a entregar al menos 54 toneladas de mineral de grado alto y al menos 65 toneladas de mineral de grado bajo para fines de la siguiente semana. Además, tiene contratos de trabajo que garantizan a los trabajadores de ambas minas el pago del día completo por cada día o fracción de día que la mina esté abierta. Determínese el número de días que cada mina debería operar durante la siguiente semana, si Minas Universal ha de cumplir su compromiso a un costo total mínimo.

Denótense con X_1, X_2 y X_3, respectivamente, el número de días qué las minas I, II y III habrán de operar durante la semana venidera. Entonces, el objetivo (expresado en $1000) es:

Minimícese:

$$z = 20X_1 + 22X_2 + 18X_3 \tag{1}$$

La demanda de mineral de grado alto es:

$$4X_1 + 6X_2 + X_3 \geq 54 \tag{2}$$

y la demanda de mineral de grado bajo es:

$$4X_1 + 4X_2 + 6X_3 \geq 65 \tag{3}$$

Como ninguna mina puede operar un número negativo de días, se plantean tres restricciones de no negatividad, y son: $X_1 \geq 0, X2 \geq 0$ y $X3 \geq 0$. Por otro lado, como ninguna mina puede operar más de 7 días a la semana, otras tres restricciones aparecerán: y son $X_1 \leq 7, X_2 \leq 7$ y $X_3 \leq 7$. Finalmente, debido a los contratos laborales, Minas Universal no tiene nada qué ganar al operar una mina cero días; en consecuencia, X_1, X_2 y X_3 deben ser mayores a cero. Combinando las restricciones con $(1), (2)$ y (3), se obtiene el modelo matemático:

1. Formular el modelo matemático asegurándose que no se encuentra un sistema de ecuaciones diferente a ecuaciones lineales con tres variables.

Minimícese: $z = 20X_1 + 22X_2 + 18X_3$
con las condiciones:
$4X_1 + 6X_2 + X_3 \geq 54$
$4X_1 + 4X_2 + 6X_3 \geq 65$

$$X_1 \leq 7. \tag{4}$$

$$X_2 \leq 7. \tag{5}$$

$$X_3 \leq 7. \tag{6}$$

Todas las variables enteras y no negativas.

2. Verificar la condición de no negatividad de las variables en las restricciones determinando los puntos que definen el plano.

La ecuación de restricción que dará origen al plano de restricción α será:

α: $4X_1 + 6X_2 + X_3 \geq 54$ (2)

α: $X_1 = \frac{54}{4}$ $X_2 = \frac{54}{6}$ $X_3 = 54$

Las coordenadas del plano serán:

α: { A:(13,5 ; 0 ; 0), B:(0 ; 9 ; 0), C:(0 ; 0 ; 54) } (2)

La ecuación de restricción que dará origen al plano de restricción β será:

$4X_1 + 6X_2 + X_3 \geq 65$ (3)

$X_1 = \frac{65}{4}$ $X_2 = \frac{65}{4}$ $X_3 = \frac{65}{6}$

Las coordenadas del plano serán:

α: { D:(16,25 ; 0 ; 0), E:(0 ; 16,25 ; 0), F:(0 ; 0 ; 10,8) }

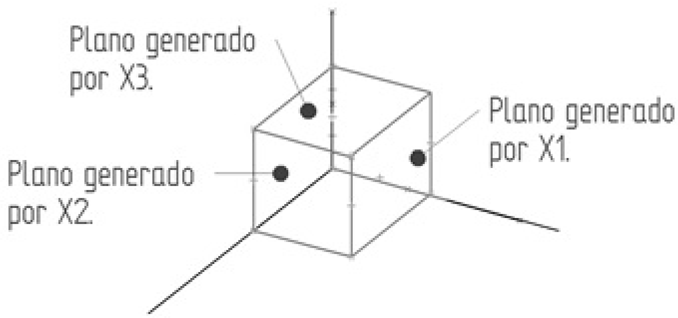
3. Graficar en perspectiva el volumen (prisma) factible resultante del dimensionamiento mínimo o máximo de las variables independientes, si este existiera.
Las restricciones individuales de cada una de las restricciones darán origen a las caras del volumen de solución óptima con los planos trazados sobre los ejes así:

$$\tau: \quad x_1 \leq 7 \quad \tau: (7; 0; 0) \tag{4}$$

$$\delta: \quad x_2 \leq 7 \quad \delta: (0; 7; 0) \tag{5}$$

$$\epsilon: \quad x_3 \leq 7 \quad \epsilon: (0; 0; 7) \tag{6}$$

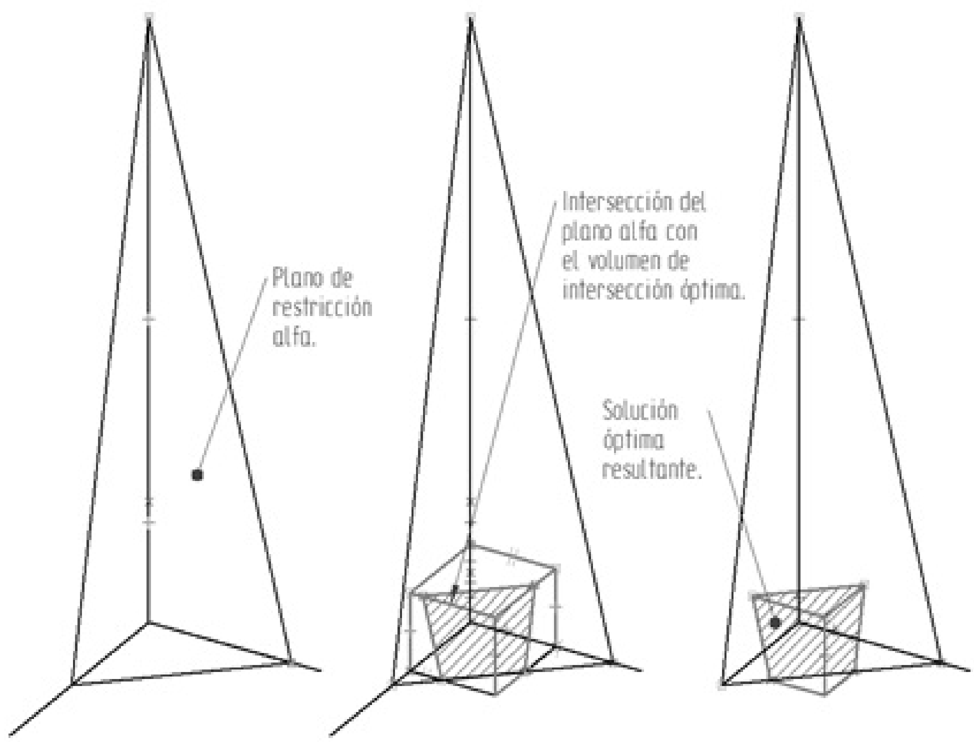
Figura 1. Volumen de solución óptima, construido con los planos τ, δ y ϵ.



Fuente: Esta investigación.

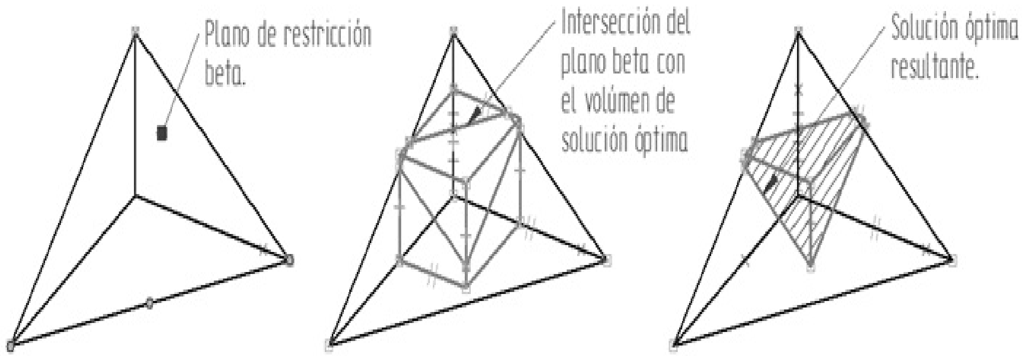
4. Graficar alternativamente las restricciones, y determinar la intersección resultante con el volumen inicial.

Figura 2. Plano de restricción α y la intersección con el volumen de solución factible.



Fuente: Esta investigación.

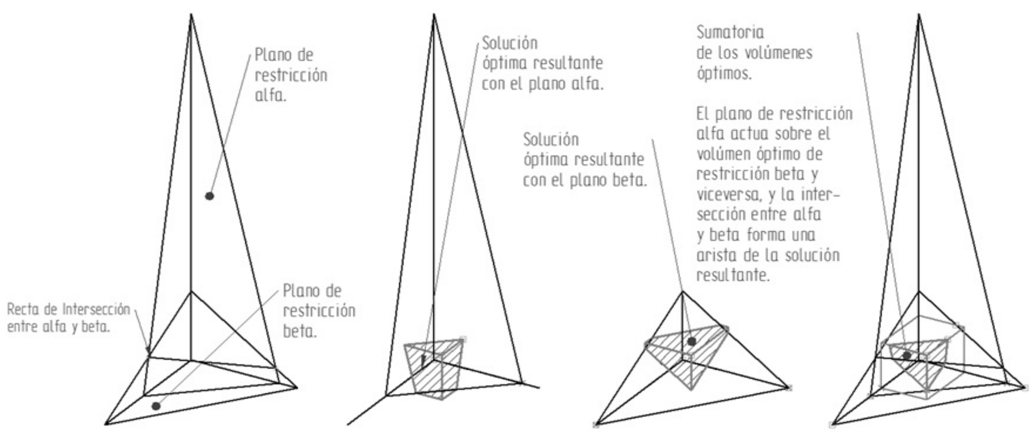
Figura 3. Plano de restricción β y la intersección con el volumen de solución factible.



Fuente: Esta investigación.

5. Verificar la adición o sustracción del volumen factible.

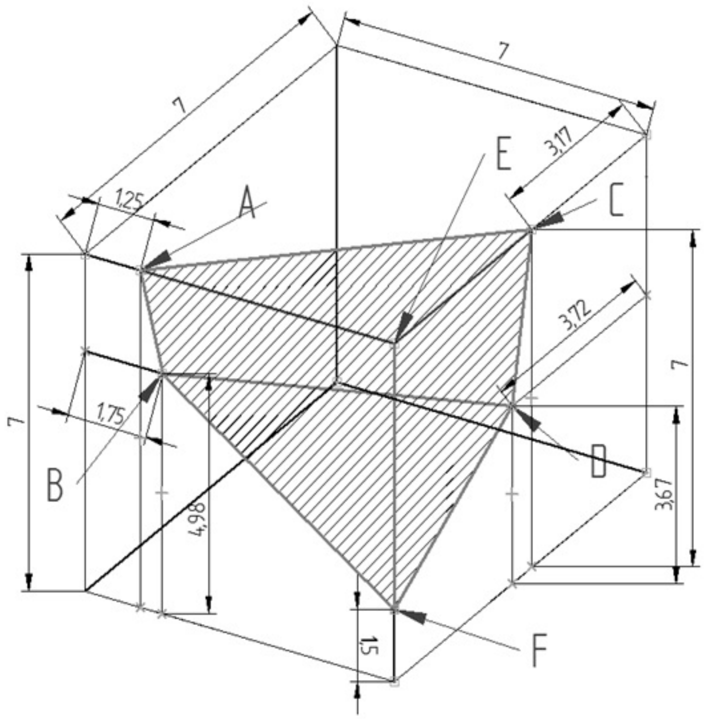
Figura 4. Sumatoria de los dos volúmenes de solución factible.



Fuente: Esta investigación.

6. Repetir los pasos 4 y 5, con todas las demás restricciones.
7. Una vez se ha sustraído/añadido todas las restricciones al volumen factible, y se ha conseguido el volumen factible final, se determinan las soluciones optimas, que se ubicarán en cada uno de los vértices del volumen factible final .

Figura 5. Volumen de solución factible, con todos los vértices de solución etiquetados y su ubicación resultante.



Fuente: Esta investigación.

8. Se verifica la solución óptima y las de iso-utilidades

Tabla 2. Verificación de la solución óptima.

PUNTO.	FUNCIÓN OBJETIVO.	valores de	x,y,z		Resultado.
A	z = 20(1,25) + 22(7) + 18(7)	1,25	7	7	305
B	z = 20(1,75) + 22(7) + 18(4,98)	1,75	7	4,98	278,64
C	z = 20(7) + 22(3,17) + 18(7)	7	3,17	7	335,74
D	z = 20(7) + 22(3,72) + 18(3,67)	7	3,72	3,67	287,9
E	z = 20(7) + 22(7) + 18(7)	7	7	7	420
F	z = 20(7) + 22(7) + 18(1,5)	7	7	1,5	321

Fuente: Esta investigación.

La respuesta al problema en particular, será el punto que genere el resultado menor con la función objetivo, descartando la existencia de un punto de coordenadas $(0, 0, 0)$, el cual sería el equivalente a "no hacer nada" y que en ejercicio propuesto está además descartado por que entran en efecto las restricciones δ y β.

De los resultados antes obtenidos, se toma el punto B, cuyo resultado es 278,64, y que representa la minimización de las variables τ, δ, ϵ, sujeto a las restricciones δ y β.

Además, en la proyección que se muestra en la figura 5, es posible evidenciar que los puntos que podrían generar una mejor respuesta en minimización son B y D debido a su cercanía al origen del sistema, esta observación se ratifica como verdadera en la tabla 2.

5. Análisis.

Debido a que los sistemas de ecuaciones a los que se amplían el método son de tres variables, el planteamiento del método proyectivo siempre comienza definiendo las cantidades mínimas o máximas de estas variables, por lo tanto, en todas las aplicaciones del método, se comienza con un prisma cuya base es un paralelogramo

Debido a que en PL, por definición se opta por maximizar o minimizar una zona restringida de posibles soluciones, mientras en el método gráfico es un área y en el método proyectivo es un volumen, todas las aplicaciones logradas hasta ahora han obtenido la adición o substracción de espacio, así como en el método gráfico es la adición o substracción de área.

Es necesario completar el método proyectivo con método que permita verificar la solución óptima exclusivamente en el método gráfico, tanto en bidimensionalidad como en el método proyectivo en tridimensionalidad.

Los métodos propuestos para el método proyectivo son los métodos de obtención de verdadera magnitud, que son: rebatimiento, rotación y cambio de planos.

6. Conclusiones:

- Hasta ahora, el método proyectivo ha resultado de excelente ayuda para expresar la lógica de la programación lineal en problemas más complejos que los que se pueden solucionar mediante el método gráfico, y por lo tanto tiene una gran potencialidad de ser una herramienta pedagógica.
- Es necesario continuar la investigación y hacer una aplicación gráfica del método simplex que complete el proceso en el método proyectivo.
- Debe ajustarse el método gráfico para incorporar la verificación de la función objetivo en un mismo sistema de coordenadas.
- Deben hacerse otras aplicaciones, explotando las posibilidades de rotación, verdadera magnitud y cambio de planos de la GD, para mostrar de mejor manera las soluciones óptimas.
- Una vez se ha adquirido destreza en la graficación del método proyectivo, la resolución de problemas se vuelve expedita, al parecer la mayor dificultad del método radica en acondicionar el cerebro a pensar tridimensionalmente y graficar en dos dimensiones, sin embargo entender el conjunto de posibles resultados y soluciones viables es completamente intuitivo y no requiere ningún entrenamiento.

Referencias

[1] Balacheff, N. y Gaudin, N. (2010). Modeling Students' Conceptions: The Case of Function. *Issues in Mathematics Education*, 16, 183-211.

[2] Bishop, A. (1999). *Enculturación matemática: La educación matemática desde una perspectiva cultural.* (G. Sanchez Barberán, Trad.) Barcelona: Ediciones Paidós Ibérica.

[3] Davis, R. y Mckeown, P. (1984). "Modelos cuantitativos para administración", Grupo Editorial Iberoamérica.

[4] Msthur, K. y Solow, D. (1996). "Investigación de Operaciones" *Prentice Hall*.

[5] Taha, H. (1997). "investigación de operaciones, una introducción" Sexta Edición, Pearsons.

[6] Chase, R., Aquilano, N. y Jacobs, F. (2006). *Administración de operaciones Producción y cadena de suministros*, Duodécima Edición, McGrawHill.

[7] McKeown, D. (1998). *Modelos Cuantitativos para Administración*, Grupo editorial Iberoamérica.

[8] Mathur, K. y Solow, D. (1996). *Investigación de Operaciones*. Prentice-Hall Hispanoamericana.

[9] Krajewski, L. y Ritzman, L. (2004). *Operations Management: Processes and Value Chains*. (7th ed). New Jersey: Pearson Prentice Hall.

[10] Chase, R. et-al, Administración de Producción y operaciones y cadenas de suministro, (2008), McGrawHill.

[11] Hawk, M. *Schaum's outline of Theory and problems Of Descriptive Geometry*. Mc Graw Hill.

[12] Bazaraa, M., Jarvis, J. y Sherali, H. (1981).*Programación lineal y flujo en redes*. Limusa.

[13] Huzarski, R. *Descriptive geometry in the geosciences*. Tesis doctoral, Texas Tech University, (1952).

[14] Rossi, M. (2012). *Descriptive Geometry and Digital Representation: Memory and Innovation*. Milano: McGraw-Hil.

[15] Watts, A. (1946). *Descriptive Geometry*. Prentice Hall.

[16] Church, A. (1864). *Elements of Descriptve Geometry*. A.S.Barnes Company, New York and Chicago.

[17] Hillier, F. , Lieberman, G. , y Osuna, M. (1997). *Introducción a la Investigación de Operaciones*. (Vol. 1). McGraw-Hill.

[18] Taha, H. (1995). *Investigación de Operaciones*. México D. F.: Editorial Alfaomega Grupo Editor. 5a Edición.

[19] Taha, H. (2011). *Investigación de Operaciones*, Novena Edición, Pearson Education,Inc.,publishing as Prentice Hall.

[20] Kaufmann, A. *Métodos y Modelos de la Investigación de Operaciones (Las Matemáticas de la empresa)*. Compañía editorial continental. 1984. 8ª Edición.

[21] Prawda, J. (1999). *Métodos y modelos de investigación de operaciones* (Vol. 1). Editorial Limusa.

[22] Moskowitz, H. y Wrigh, G.(1982). *Investigación de Operaciones*. Prentice Hall Hispanoamericana.

[23] Ackoff, R. y Sasieni, M. (1994). *Fundamentos de Investigación de Operaciones*. Limusa.

[24] Thierauf, R. (1997). *Toma de Decisiones por medio de Investigación de Operaciones*. Limusa.

[25] Phillips, D., Ravindran, A. y Solberg, J. (1976). *Operations Research: Principles and Practice*. John Wiley & Sons,

[26] Wellman, B. (1957), *Technical Descriptive Geometry*. McGraw-Hill.

[27] Holliday-Darr, K. *Applied Descriptive Geometry*, Delmar Publications, 1998. ISBN 978-0827379121.

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad de Nariño
e-mail: camiloosejo@hotmail.com