SOTO y JÀCOME. 2018. Construcciòn de un triángulo isósceles dado el perìmetro y la altura relativa a la base, una oportunidad cónica. Revista Sigma, 14 (1). Pág. 1-12.http://coes.udenar.edu.co/revistasigma/articulosXIV/1.pdf

REVISTA SIGMA
Departamento de Matemáticas
Universidad de Nariño

Volumen XIV №1 (2018), páginas 1–12

Construcciòn de un triàngulo isòsceles dado el perìmetro y la altura relativa a la base, una oportunidad cònica

Óscar Fernando Soto Ágreda [1]
Libardo Manuel Jácome[2]

Abstract.
In the didactic technique called Problem Planning and Resolution, George Polya, determines that sometimes the discovery of a big problem is made. This problem fuels curiosity and induces the use of inventive faculties, elements that leave the enjoyment of the path traveled and the enjoyment in the encounter of the answers, solutions and opening of new questions and problems. Solutions that carry the imprint of the character of its solver.

The problem studied in this article certainly boasts of being classified in the category of great problem. Because having infinite solutions, it dares that geometric elements such as the line, circumference, parabola, ellipse and hyperbola are adopted as instruments of the solution, through simple, clear, precise and creative solutions.

The article presents a solution for each of the aforementioned instruments or curves. Although for the cases of the line, parabola and circumference, it seems that there is only one solution, the problem of uniqueness is not addressed because it is outside the objective of the article. In the final construction it is noticed the way in which infinite hyperballs and ellipses solve the problem. The proposed solutions have been developed in the software of assistance of dynamic geometry Cabrí , of which the University of Nariño possesses infinite license. Each of these solutions are simple constructions that are executed with few steps leaving glimpse, as in many problems, the main role of the concept of mediatrix as fundamental piece in the solutions.

Keywords. Problem, isosceles triangle, ellipse, hyperbola, parabola, circumference, straight.

Resumen.
En la técnica didáctica denominada Planteamiento y Resolución de Problemas, George Polya, determina que en ocasiones se hace el descubrimiento de un gran problema, este problema aviva la curiosidad e induce el uso de las facultades inventivas, elementos que dejan el disfrute del camino recorrido y el goce en el encuentro de las respuestas, soluciones y apertura de nuevos interrogantes y problemas, soluciones que conllevan la impronta del carácter de su resolutor.

[1]Universidad de Nariño, email: fsoto@udenar.edu.co
[2]Universidad de Nariño, email: elo@udenar.edu.co

El problema que estudia este artículo se ufana, sin duda, de clasificarse en la categoría de gran problema, pues teniendo infinita soluciones, osa de que elementos geométricos como la recta, circunferencia, parábola, elipse e hipérbola se adopten como instrumentos de la solución, a través de soluciones sencillas, claras, precisas y creativas.

El artículo presenta una solución por cada uno de los instrumentos o curvas mencionadas y aunque para los casos de la recta, parábola y circunferencia, parece que existe una única solución, no se aborda el problema de unicidad, pues está fuera del objetivo del artículo y en la construcción final se advierte la forma en que infinitas hipérbolas y elipses resuelven el problema. Las soluciones propuestas se han elaborado en el software de asistencia geometría dinámica Cabrí , del que la Universidad de Nariño, posee licencia infinita y cada una de las soluciones, son construcciones simples que se ejecutan con pocos pasos dejando entrever, como en muchos problemas, el rolle principal del concepto de mediatriz, como pieza fundamental en las soluciones.

Palabras Clave. Problema, triángulo isósceles, elipse, hipérbola, parábola, circunferencia, recta.

1. Elementos Iniciales

Cuando se plantea el resolver un problema a través de una construcción geométrica, de manera tácita se asume que solo se debe utilizar la regla y el compás a la usanza clásica, pero, asumiendo otras libertades, perfectamente se puede combinar métodos y se puede atacar el problema, por ejemplo, usando las cónicas como instrumentos de trabajo, es decir, como herramientas físicas que viabilizan la solución sin asegurar que por usar estas curvas el problema sea más fácil o su solución se cargue de trampa o truco.

De hecho, al usar diferentes estrategias y herramientas hay mayor riqueza intelectual y goce estético con la posibilidad de contemplar la belleza infinita de la Matemática en la construcción de su conceptos y teorías y además si el problema no se puede resolver con regla y compás (plan a) al haber otros caminos, aparecen planes b, c d, etc., que enriquecen de manera heurística, el mismo planteamiento del problema.

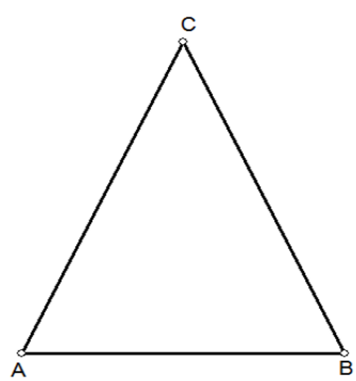

Figura 1: Triángulo Isósceles

LATERALES $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ BASE $\overline{AB}$

Para todas las construcciones que se exponen a continuación se tiene en cuenta que $\overline{PQ}$ es el perímetro y B punto medio de $\overline{PQ}$, $\overline{AB}$ la altura del triángulo a construir, como se indica en la Figura 2. Se debe tener en cuenta que para llevar a efecto la construcción se debe cumplir la condición, $AB < \frac{P}{2}$.

2. Usando la mediatriz

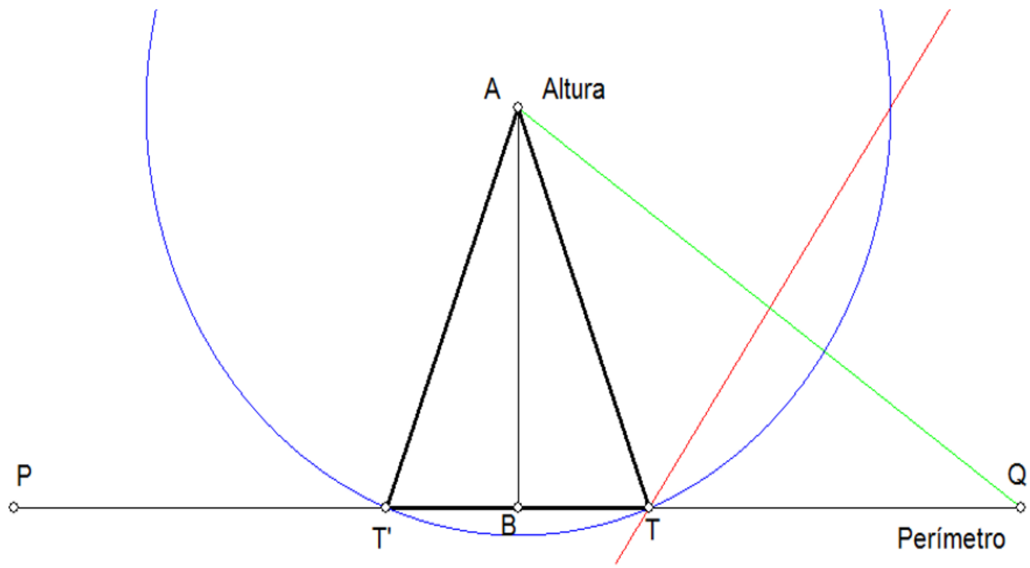

Figura 2: Construcción 1

Se traza el segmento $\overline{AQ}$ y luego su mediatriz que corta al segmento $\overline{PQ}$ en T . Con centro en A y $\overline{AT}$ como radio se traza un circunferencia que corta a $\overline{PQ}$ en T' .

El $\triangle T'TA$ es el triángulo pedido.

El triángulo $\triangle T'TA$ es isósceles por construcción. Ahora $TA = TQ$ por ser T un punto de la mediatriz $\overline{AQ}$.

$P = T'T + TA + AT' = 2BT + 2TA = 2(BT + TA) = 2(BT + TQ) = 2BQ = PQ.$

3. Usando el circuncentro

Se traza por Q la recta $n \perp \overline{PQ}$ y se toma en la recta n el punto móvil M . Se considera el $\triangle MAQ$ y se determina su circuncentro R . Cuando el punto M se mueve por la recta n el circuncentro genera un lugar geométrico, en este caso la recta m , que corta al segmento $\overline{PQ}$ en T.

Con centro A y radio AT se traza una circunferencia cuya intersección con $\overline{PQ}$ es T'.

El triángulo $\triangle T'TA$ es isósceles por construcción.

Como T es circuncentro se tiene $TA = TQ$ $P = T'T + TA + AT' = 2BT + 2TA = 2(BT + TA) = 2(BT + TQ) = 2BQ = PQ$.

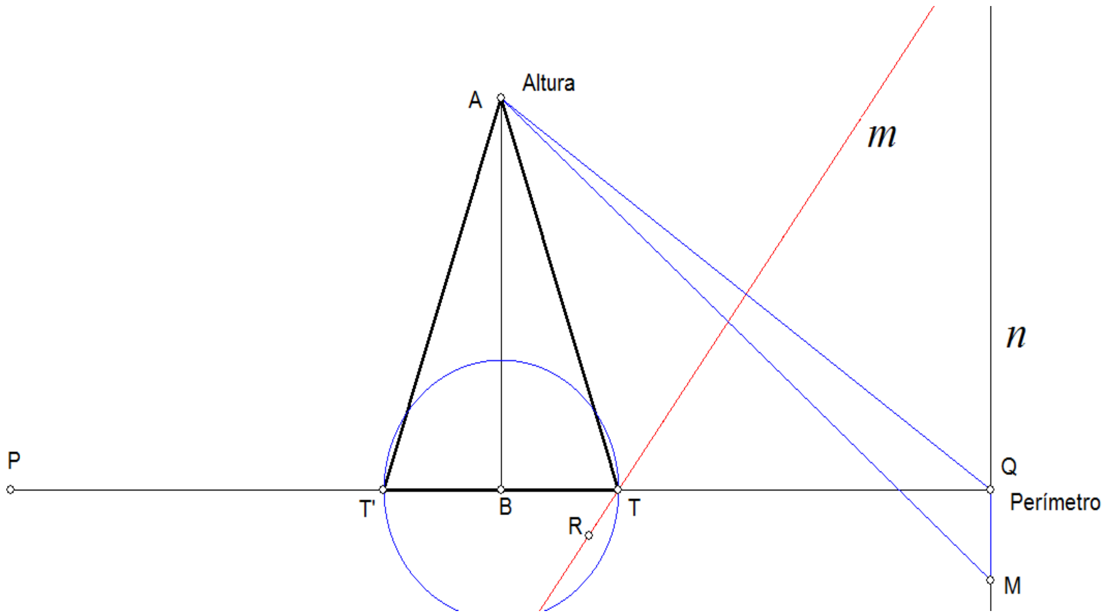

Figura 3: Construcción 2

4. Usando la elipse

Con centro en B y radio BP se traza una circunferencia, en ella se toma un punto móvil M, se trazan $\overline{AM}$, $\overline{BM}$ y la mediatriz m de $\overline{AM}$. Sea S el corte de m con $\overline{BM}$.

$SM = SA$ ya que $S \in m$ $BM = BQ = s = \frac{P}{2}$ por construcción

$BM = BS + SM = BS + SA$ reemplazando SM por SA

$BS + SA = s$, $S \in m$, donde A, B son puntos fijos y S es punto móvil al moverse M, s es constante. Lo anterior significa que S describe una elipse con focos A, B y eje focal de longitud BQ que corta a $\overline{PQ}$ en T y en T'.

El $\triangle T'TA$ es el triángulo pedido.

$BT = BT'$ por simetría de la elipse.

Como $\overline{AB} \perp \overline{PQ}$ entonces $\angle TBA \cong \angle T'BA$ y $\overline{AB}$ es común a los triángulos $\triangle TBA$ y $\triangle T'BA$ entonces $\triangle TBA \cong \triangle T'BA$ y $\overline{AB}$ y por ende $AT = AT'$

Cuando $M = Q$ se tiene $TA = TQ$

$P = T'T + TA + AT' = 2BT + 2TA = 2(BT + TA) = 2(BT + TQ) = 2BQ = PQ$.

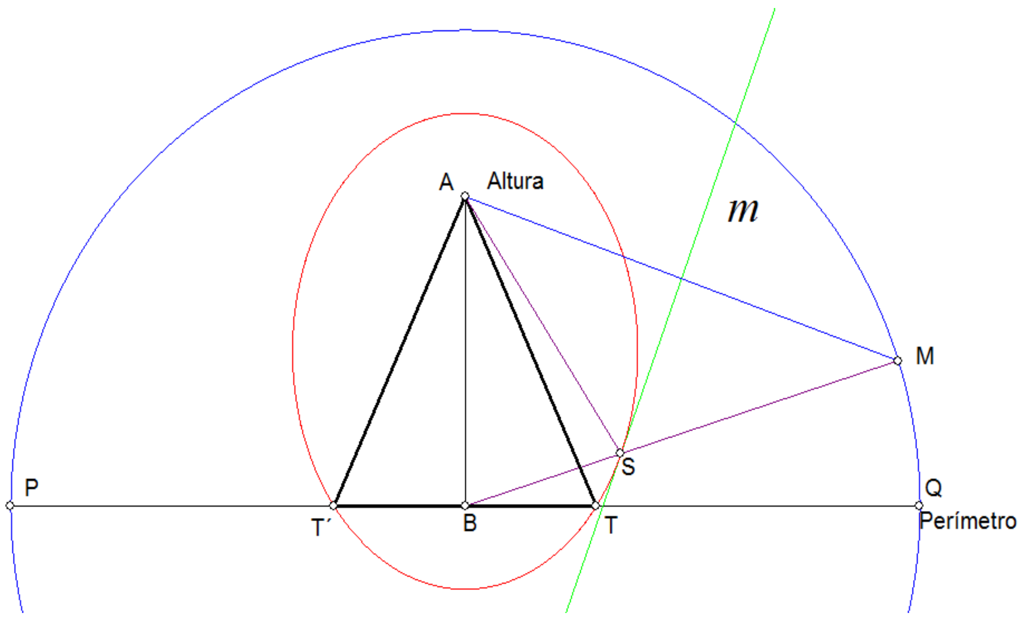

Figura 4: Construcción 3

5. Usando la paràbola

Por Q se traza la recta $l \perp \overline{PQ}$, se toma $M \in l$ y por M se traza $n \perp l$.

Se traza el segmento $\overline{AM}$, su mediatriz m que corta a n en el punto R.

$RA = RM$ ya que $R \in m$.

$\overline{RM} \perp l$ por construcción.

El punto A es fijo y la recta l es fija entonces R es un punto de la parábola con foco en A y directriz l, que se genera cuando el punto M se mueve a lo largo de la recta l.

La parábola corta $\overline{PQ}$ en T. Con centro A y radio AT se traza una circunferencia que corta a $\overline{PQ}$ en T'.

El triángulo pedido es $\triangle ATT'$.

El $\triangle ATT'$ es isósceles por construcción.

$TA = TQ$ por ser T punto de la parábola.

$P = T'T + TA + AT' = 2BT + 2TA = 2(BT + TA) = 2(BT + TQ) = 2BQ = PQ$.

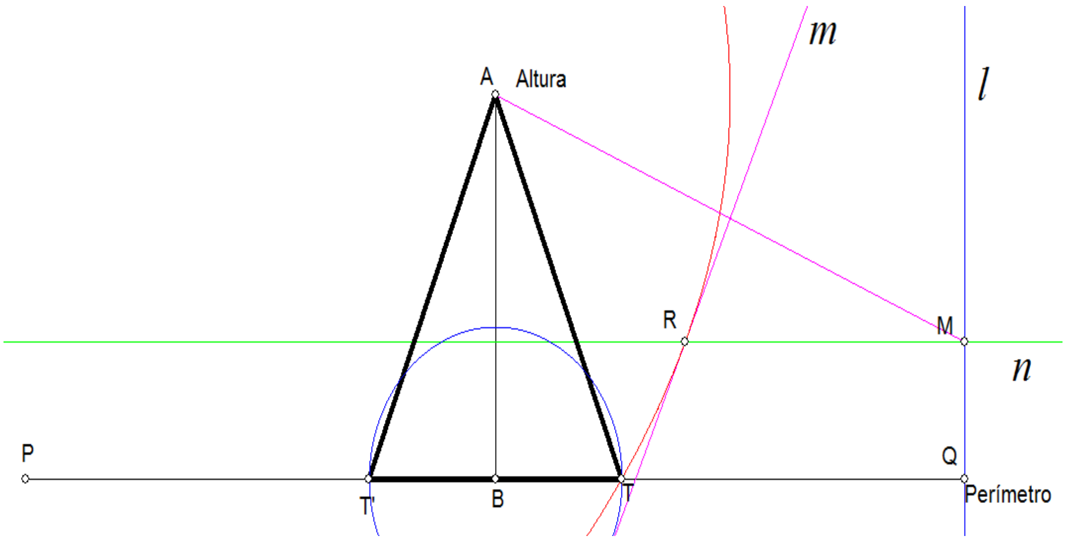

Figura 5: Construcción 4

6. Usando la hipèrbola

Se traza la circunferencia con centro B y radio BA que corta a $\overline{PQ}$ en R por cumplirse que $AB < \frac{P}{2}$.

Se traza la circunferencia de centro R y radio RQ, en esta circunferencia se toma un punto móvil M y se traza la recta $n = \overleftrightarrow{MR}$.

Se traza el segmento $\overline{AM}$ y su mediatriz m que corta a n en X.

$XA = XM$ ya que $X \in m$.

$XM = XR + RM$ ya que X, R, M son colineales.

$XM - XR = RM$

$XA - XR = RM$ ya que $XM = XA$, RM es constante. Lo anterior significa que es un punto de la hipérbola de focos A, R y eje real de medida RM.

Xes punto móvil cuando M se mueve sobre la circunferencia de centro R y genera la hipérbola que corta a $\overline{PQ}$ en T.

Con centro A y radio AT se traza una circunferencia que corta a $\overline{PQ}$ en T'.

El triángulo pedido es $\triangle ATT'$.

Él $\triangle ATT'$ es isósceles por construcción.

Como T es un punto de la hipérbola se tiene:
$TA - TR = RM = RQ$ de dónde $TA = TR + RQ = TQ$.

$P = T'T + TA + AT' = 2BT + 2TA = 2(BT + TA) = 2(BT + TQ) = 2BQ = PQ$.

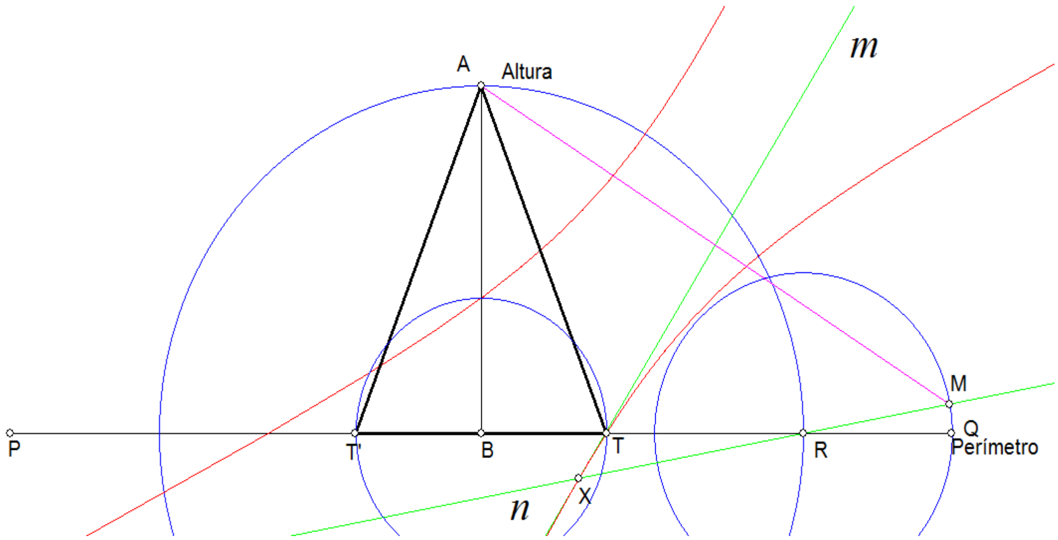

Figura 6: Construcción 5

7. Usando la circunferencia

Sea M el punto medio de $\overline{AQ}$.

Se traza la circunferencia que pasa por los puntos A, B, M que corta al segmento $\overline{PQ}$ en T.

Con centro A y radio AT se traza una circunferencia que corta a $\overline{PQ}$ en T'.

El triángulo pedido es $\triangle ATT'$.
$\triangle TQA \cong \triangle CMA$

El $\triangle ATT'$es isósceles por construcción.

Se traza el segmento $\overline{AT}$

Se sabe qué $m\angle ABT = \frac{1}{2} mAMT$ pero $m\angle ABT = 90°$ de donde $m\angle AMT = 180°$

Esto significa que $\overline{AT}$ es diámetro de la circunferencia y sea C el centro de la misma y se traza $\overline{CM}$.
Entonces se cumple que $\overline{CM} \cong \frac{1}{2}\overline{TQ}$ y se tiene que $\triangle TQA \square \triangle CMA$ por lo tanto se puede establecer la proporción $\frac{TQ}{TA} = \frac{CM}{CA} = 1$ de donde $TQ = TA$.

$P = T'T + TA + AT' = 2BT + 2TA = 2(BT + TA) = 2(BT + TQ) = 2BQ = PQ.$

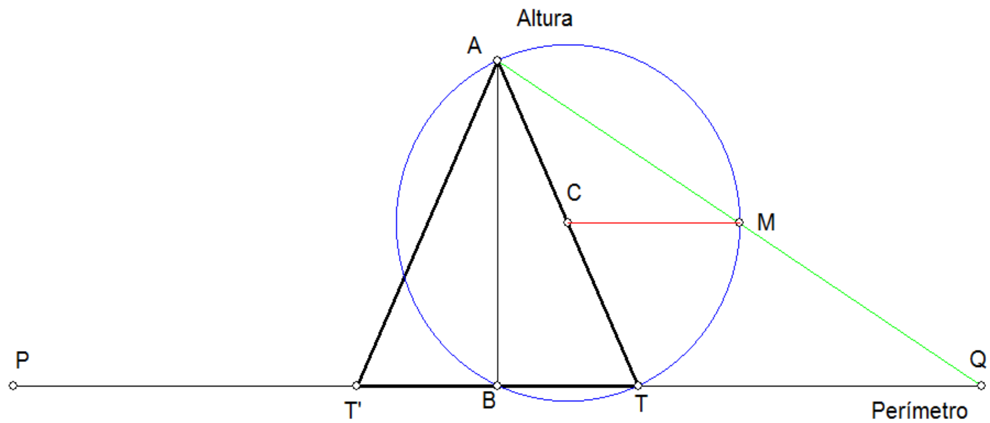

Figura 7: Construcción 6

8. Caso especial

Supongamos que usando cualquier método anterior ya se halló el triángulo isósceles $\triangle ATT'$

Se toma un punto móvil $O \in n = \overleftrightarrow{PQ}$. Con centro O y radio OQ se traza una circunferencia y en ella se toma el punto móvil M que se desplaza por la circunferencia. Si O está a la derecha de T.

Se traza la mediatriz m del segmento $\overline{AQ}$ y la recta $\overleftrightarrow{MO}$ que corta a la mediatriz en el punto X.

En este momento tenemos la construcción 5 usando la hipérbola y la demostración es la misma. Hay que anotar que al mover el punto O se va generando una familia de hipérbolas.

Si 0 coincide con Q, la hipérbola se degenera en una recta exactamente en la mediatriz m que corresponde al primer caso.

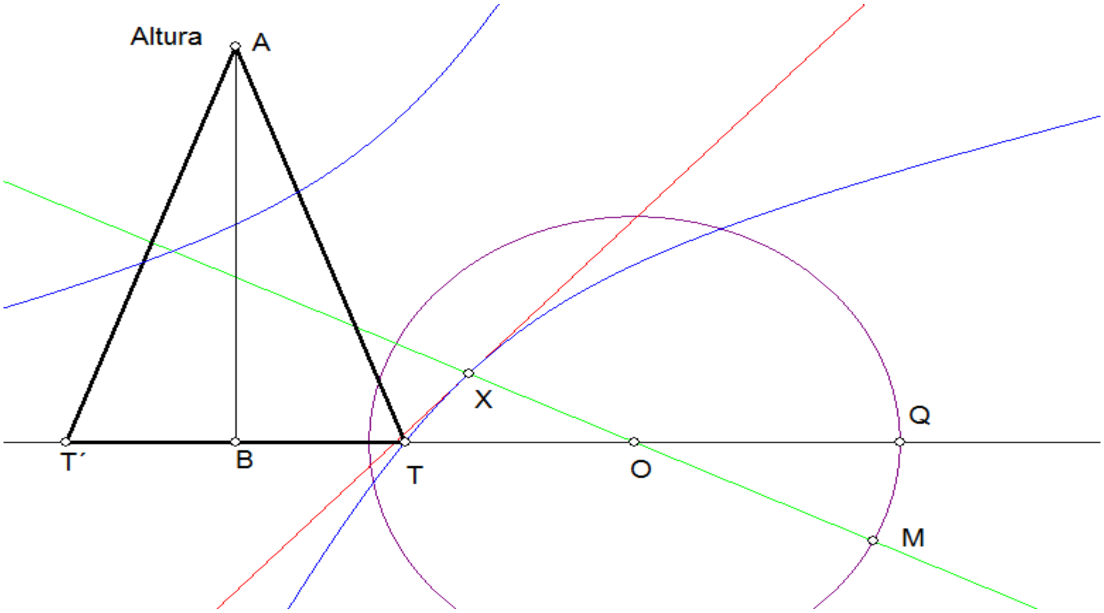

Figura 8: Construcción 7

Si O está a la izquierda de T se presenta un caso similar a la construcción usando la elipse y la demostración es la misma.

Hay que anotar que al mover el punto O se va generando una familia de elipses.

Cuando $O \to T^-$ (O tiende a T por la izquierda) la elipse se degenera en el segmento $\overline{AT}$.

Cuando $O \to T^+$ (O tiende a T por la derecha) la hipérbola se degenera en dos rayos

$(\overleftrightarrow{AT} - \overline{AT}) \cup \{A, T\}$

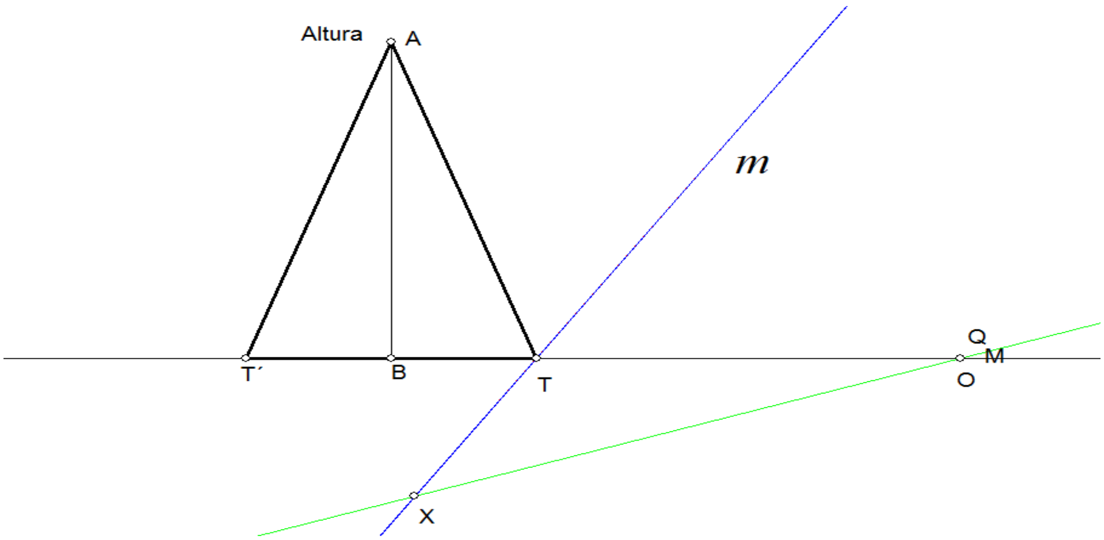

Figura 9: Construcción 8

Cuando $O \to T^-$ (O tiende a T por la izquierda) la elipse se degenera en el segmento $\overline{AT}$.

Cuando $O \to T^+$ (O tiende a T por la derecha) la hipérbola se degenera en dos rayos $(\overleftrightarrow{AT} - \overline{AT}) \cup \{A, T\}$

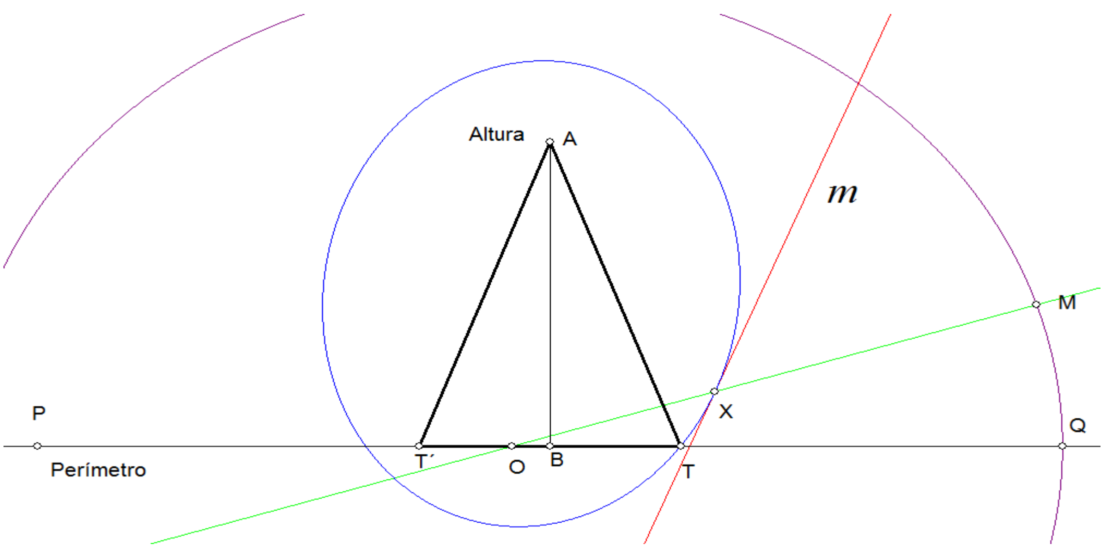

Figura 10: Construcción 9

9. Construcciòn en el plano cartesiano

Se puede construir el segmento $\overline{PQ}$ sobre el eje de las x de manera que el punto medio B coincida con el origen de coordenadas y la altura esté en el eje y.

De esta manera se puede identificar claramente la ecuación en coordenadas cartesianas de la cónica que entra en juego en la construcción.

Se da el ejemplo para el caso especial de la construcción donde la hipérbola es protagonista del momento matemático.

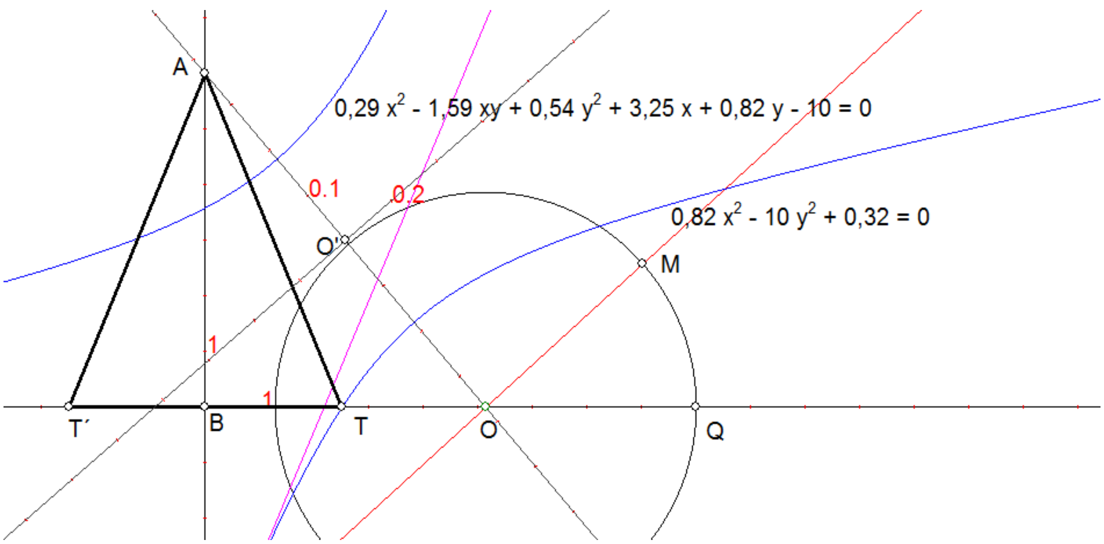

Figura 11: Construcción 10

En primera instancia se muestra la ecuación completa de segundo grado, pero se puede avanzar más estableciendo la ecuación en los nuevos ejes:

la recta $\overleftrightarrow{AO}$ y la mediatriz de $\overleftrightarrow{AO}$ y la ecuación se presenta simplificada a la máxima expresión, con el establecimiento de un nuevo sistema coordenado que permite el asistente Cabri.

10. Reflexiones

Queda la pregunta si utilizando otras curvas como la espiral, la lemniscata, flores de cuatro pétalos etc., ¿es posible construir un triángulo isósceles o un triángulo cualquiera, de manera que resuelva el problema?

¿Estas construcciones son fortuitas, es decir, son fruto de un momento de iluminación o es cuestión de proponerse realizar una construcción y poner manos a la obra?

¿Será cuestión de dedicarse horas y días enteros para realizar una construcción con unas

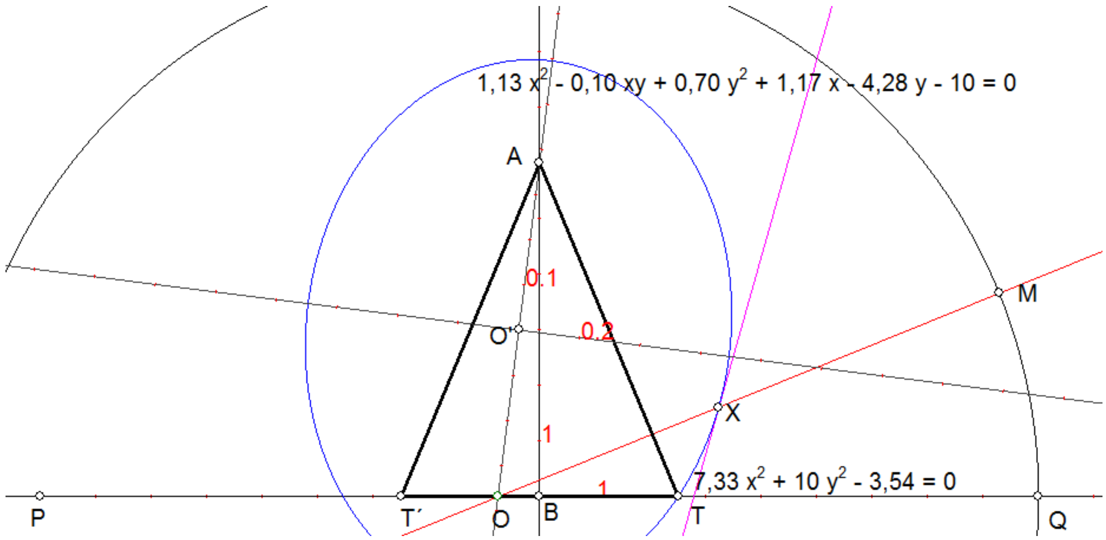

Figura 12: Construcción 10

condiciones dadas?

¿Será que el tiempo de solución puede trascender una vida humana, quizá generaciones o tal vez nunca se pueda resolver?

¿Se pueden considerar las construcciones 3,4 y 5 como las construcciones de la elipse, parábola e hipérbola?

Referencias

[1] Hemmerling, E. (2005). "Elementos básicos de la geometría" *en Geometría elemental*. México Limusa, pp. 11-62.

[2] Guerrero, B. (2002). *Geometría en el plano y en el espacio*, Bogotá, Colombia, Universidad Nacional de Colombia

[3] Lehmann, Charles H. *Geometría Analítica*. México, D.F.: Edit. Limusa. 1990.

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad de Nariño
e-mail: `elo@udenar.edu.co`
e-mail: `fsoto@udenar.edu.co`