Fridman y Cabrera. 2020. Relevancia de los razonamientos inductivos en la construcción matemática. Revista Sigma, 16 (1). Páginas 8–32.

REVISTA SIGMA
Departamento de Matemáticas
Universidad de Nariño

Volumen XVI Nº1 (2020), páginas 8–32

Relevancia de los razonamientos inductivos en la construcción matemática

Adolfo Ricardo Fridman [1]

Omar Armando Cabrera [2]

Abstract: Inductive reasoning is fundamental for mathematics and mathematics education. Ricardo Fridman, educator and vocational researcher, formulated various properties from the analysis of regularities. His works, which can be included in discrete mathematics, are clear examples of the inductive methodology. One of them is presented here, ordered and formulated with Professor Omar Cabrera. The aim of the article is to highlight the search process and the discovery of one of these properties, possibly unpublished. Subsequent demonstrations confirm the conjectured validity, supporting the complementarity of the inductive and deductive processes.

Keywords. Inductive reasoning, Discrete mathematics.

Resumen: Los razonamientos inductivos son fundamentales para el matemático y la educación matemática. Ricardo Fridman, docente e investigador vocacional, formuló variadas propiedades a partir del análisis de regularidades. Sus trabajos, que pueden incluirse en la matemática discreta, son claros ejemplos de la metodología inductiva. Se presenta aquí uno de ellos, ordenado y formulado con el profesor Omar Cabrera. El objetivo del artículo es destacar el proceso de búsqueda y el descubrimiento de una de esas propiedades, posiblemente inédita. Las posteriores demostraciones confirman la validez de la conjetura, ratificando la complementariedad de los procesos inductivos y deductivos.

Palabras Clave. Razonamientos inductivos, Matemática discreta.

[1]Profesor en Química en escuelas medias de Buenos Aires, Argentina; ricardofridman2018@gmail.com

[2]Profesor en Matemática, antes en escuelas medias y ahora en la Biblioteca Popular Cornelio Saavedra de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina; omararmandocabrera@yahoo.com.ar

1. Introducción

La obtención de patrones de una sucesión numérica para la determinación de otros de sus valores, constituye una práctica tradicional en la matemática educativa y recreativa. Es, también, una forma clásica de ejemplificar la metodología inductiva del descubrimiento, propiciada vigorosamente por algunas corrientes educativas[3].

En el nivel secundario, campo de acción de los autores, las virtudes de lo clásico, lejos de atenuarse por los avances científicos, didácticos y tecnológicos de las últimas décadas, merecen potenciarse: independientemente de los diseños curriculares oficiales, los docentes de las aulas reales plasman "currículos en acto" según variados criterios que dependen de la propia formación, sus posiciones político-pedagógicas (sus valores) y la lectura que realizan sobre las necesidades y posibilidades de sus alumnos. En muchas escuelas argentinas, principal pero no exclusivamente de sectores sociales vulnerables, se impone así una pedagogía de lo posible, a veces dramáticamente, alternando actitudes constructivistas con otras conductistas, momentos de elaboración colectiva con actividades de resolución mecánica, mancomunando auto-exigencias profesionales con heterogéneas realidades estudiantiles. En sus clases de matemática, los procesos inductivos y deductivos quedan supeditados a numerosas variables educativas, donde el tiempo (o la falta del mismo) merece el lugar principal. De cualquier forma, dichos procesos no son opuestos ni excluyentes: se complementan de maneras muy variadas en las construcciones matemáticas del investigador y deberían hacerlo en todas las aulas reales.

Julio Rey Pastor y Pedro Puig Adam, en su "*Metodología Matemática*", advierten sobre las limitaciones de la aritmética inductiva:

> ... la aritmética fue inductiva antes de los griegos, pero ya hemos dicho que estos la organizaron deductivamente, al observar que ciertas leyes, que parecían generales, dejaban de verificarse para grandes números. (...) Si en la expresión $2^{2^n}+1$ damos a "n" valores sucesivos, para $n = 0$ resulta 3, primo; para $n = 1$ resulta 5, primo; para $n = 2$ resulta 17, primo; para $n = 3$ resulta 257, primo; para $n = 4$ resulta 65.537, primo. Matemáticos tan famosos como Fermat creyeron que siempre sucedería lo mismo y, sin embargo, para n=5 resulta un número compuesto.*(Rey Pastor J., Puig Adam P., 1948, pp. 19-20)* [3]

Juan Foncuberta y Gustavo Barallobres llaman la atención sobre el mal uso de las demostraciones en la educación y destacan la combinación de procedimientos inductivos como parte inicial del hacer matemático:

[3] En este artículo, toda acción en pasado singular impersonal responde a los análisis inductivos efectuados por Ricardo Fridman; lo mismo si se hace referencia a "el investigador". Las acciones en plural reseñan el trabajo conjunto de Ricardo Fridman y Omar Cabrera, redactor del trabajo. Mucho agradecemos al docente universitario Pablo Samez por la revisión crítica de las demostraciones 5.1 y 5.4

> Cuando decimos que los alumnos deberían hacer demostraciones, no estamos pensando en teoremas acabados sino en argumentos que permitan justificar ciertas afirmaciones, que son un punto de partida para, en algún momento, perfeccionar y llegar a una prueba completa. Pero hablamos también de una parte muy importante del trabajo del matemático que en general no se muestra: que es cómo se llega a establecer una conjetura, cuáles son los caminos que se siguen para enunciar una propiedad. En su artículo "Las demostraciones, una tragedia en tres actos", Smith y Petcocz (Australia) afirman: "Es difícil concebir una educación matemática que no investigue y use demostraciones antes o después. Las demostraciones comunican la verdadera esencia de la matemática y conducen a un más profundo entendimiento de los resultados. Pero, a menudo, en los cursos, las demostraciones se emplean para proyectar una visión autoritaria del tema, para ocultar el modo en que realmente se hace matemática y para alentar métodos de aprendizaje inadecuado. (...) Más bien que enfocar su mira exclusivamente en las demostraciones, la matemática combina búsqueda de regularidades, hacer conjeturas, buscar contraejemplos, modificar y redefinir; dar pruebas heurísticas y finalmente llegar a pruebas formales. (...) Generalmente una demostración terminada muestra leves rastros del verdadero trabajo matemático. Cuando la prueba está terminada, todos los pasos y su desarrollo son borrados y reemplazados por una serie de definiciones y lemas. Entonces el teorema aparece en toda su gloria usando material previo".*(Foncuberta J., Barallobres G., 1996, p.46)* [2]

Claudi Alsina, por su parte, destaca los procesos inductivos y, citando a Pólya, hace hincapié en la intuición como elemento infaltable en los mismos:

> Morris Kline (Mathematics in Western Culture, Oxford Univ. Press, Oxford, 1964) proclama: "La deducción como método para obtener conclusiones tiene muchas ventajas sobre el método de prueba-error, el razonamiento por inducción o la analogía... pero a pesar de estas ventajas no puede anular estas otras formas de razonar."(...) Nuestro admirado George Pólya (Matemáticos y razonamiento plausible, Ed. Tecnos, Madrid, 1966) nos da unas reflexiones docentes relevantes sobre el tema de intuición-demostración: "El resultado del trabajo creador del matemático es el razonamiento demostrativo, una prueba, pero la prueba se descubre por razonamiento plausible, es decir, por intuición. Si esto es así, y yo lo veo, habrá un lugar para la intuición en la enseñanza de la matemática... ¡Enseñemos intuyendo!"Y Pólya nos anima a favorecer heurísticamente el desarrollo de los argumentos intuitivos, a detectar errores de la intuición, a aproximarnos inductivamente a los problemas: "Los hechos matemáticos se intuyen primero y después se prueban...hay que dar oportunidades al estudiante para hacer problemas en que primero intuya y luego pruebe."*(Alsina C., 2008)* [1]

A continuación, en el ítem 2 adelantaremos una propiedad descubierta por Ricardo Fridman desde el análisis de ciertas regularidades numéricas; en los ítems 3 y 4 desarrollaremos el proceso inductivo que realizó, propósito central de este trabajo, y, finalmente, en el ítem 5, las demostraciones correspondientes.

2. Propiedad descubierta por Fridman mediante procedimientos inductivos

Dada la suma de "n" potencias de igual exponente "E", cuyas bases forman una progresión aritmética de diferencia "d" y primer elemento 1, se buscó, con métodos inductivos, una fórmula para hallar la suma de sus términos en función de E, n y d, considerando $E \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$; en $\mathbb{N}$ no incluimos el cero. En el proceso inductivo, el investigador consideró valores de "d" solamente naturales, extendiéndolos posteriormente al conjunto de los reales $\mathbb{R}$.

Consideremos la suma

$$S(E,n,d) = (1+0d)^E + (1+1d)^E + (1+2d)^E + (1+3d)^E + ... + [1+(n-2)d]^E + [1+(n-1)d]^E$$

con $E \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $d \in \mathbb{R}$, la cual expresamos como:

$$S(E,n,d) = \sum_{i=0}^{n-1} (1+id)^E$$

.

Fridman *conjeturó* la siguiente propiedad, que denominaremos **Propiedad RF**:

$$\begin{aligned}
S(E,n,d) = &\binom{n}{1}\left[(-1)^0\binom{0}{0}(1+0d)^E\right] \\
&+ \binom{n}{2}\left[(-1)^1\binom{1}{0}(1+0d)^E + (-1)^0\binom{1}{1}(1+1d)^E\right] \\
&+ \binom{n}{3}\left[(-1)^2\binom{2}{0}(1+0d)^E + (-1)^1\binom{2}{1}(1+1d)^E + (-1)^0\binom{2}{2}(1+2d)^E\right] + \cdots + \\
&+ \binom{n}{E}\left[(-1)^{E-1}\binom{E-1}{0}(1+0d)^E + (-1)^{E-2}\binom{E-1}{1}(1+1d)^E\right. \\
&+ (-1)^{E-3}\binom{E-1}{2}(1+2d)^E + \cdots + (-1)^1\binom{E-1}{E-2}(1+(E-2)d)^E \\
&\left.+ (-1)^0\binom{E-1}{E-1}(1+(E-1)d)^E\right] + \binom{n}{E+1}\left[(-1)^E\binom{E}{0}(1+0d)^E\right. \\
&+ (-1)^{E-1}\binom{E}{1}(1+1d)^E + (-1)^{E-2}\binom{E}{2}(1+2d)^E + \cdots + \\
&\left.+ (-1)^1\binom{E}{E-1}(1+(E-1)d)^E + (-1)^0\binom{E}{E}(1+Ed)^E\right] \qquad \text{siempre que } \; n > E.
\end{aligned}$$

2.1. Primera expresión reducida de la Propiedad RF

Podemos sintetizar el anterior desarrollo de la forma:

$$S(E,n,d) = \sum_{v=0}^{E}\left[\binom{n}{v+1}\sum_{i=0}^{v}(-1)^{v-i}\binom{v}{i}(1+id)^E\right]$$

En adelante, escribiremos las fórmulas con notación funcional, exponiendo las variables independientes en el primer miembro -como hicimos arriba consignando (E, n, d)- para explicitar claramente los datos que requerirán sus aplicaciones.
Indicamos la **Propiedad RF**, en forma completa, de la siguiente manera:

$$\boxed{\begin{gathered}\sum_{i=0}^{n-1}(1+id)^E = \sum_{v=0}^{E}\left[\binom{n}{v+1}\sum_{i=0}^{v}(-1)^{v-i}\binom{v}{i}(1+id)^E\right] \\ E\in\mathbb{N}, n\in\mathbb{N}, n>E, d\in\mathbb{R}\end{gathered}}$$

2.1.1. Ejemplo numérico

Hallar $1^3 + 5^3 + 9^3 + 13^3 + 17^3$ aplicando la **Propiedad RF**.

Datos: $E = 3$, $n = 5$ y $d = 4$

$$S(3,5,4) = \sum_{v=0}^{3}\left[\binom{5}{v+1}\sum_{i=0}^{v}(-1)^{v-i}\binom{v}{i}(1+i\cdot 4)^3\right]$$

Desarrollando:

$$\begin{aligned} S(3,5,4) = &\binom{5}{1}\left[(-1)^0\binom{0}{0}(1+0\cdot 4)^3\right] \\ &+\binom{5}{2}\left[(-1)^1\binom{1}{0}(1+0\cdot 4)^3+(-1)^0\binom{1}{1}(1+1\cdot 4)^3\right] \\ &+\binom{5}{3}\left[(-1)^2\binom{2}{0}(1+0\cdot 4)^3+(-1)^1\binom{2}{1}(1+1\cdot 4)^3+(-1)^0\binom{2}{2}(1+2\cdot 4)^3\right] \\ &+\binom{5}{4}\left[(-1)^3\binom{3}{0}(1+0\cdot 4)^3+(-1)^2\binom{3}{1}(1+1\cdot 4)^3+(-1)^1\binom{3}{2}(1+2\cdot 4)^3\right. \\ &\left.+(-1)^0\binom{3}{3}(1+3\cdot 4)^3\right] = \binom{5}{1}1+\binom{5}{2}124+\binom{5}{3}480+\binom{5}{4}384 \\ &= 5+1240+4800+1920 = \mathbf{7965} \end{aligned}$$

Verificación: $1^3 + 5^3 + 9^3 + 13^3 + 17^3 = 1 + 125 + 729 + 2197 + 4913 = \mathbf{7965}$.

Importante: esta propiedad tiene la ventaja de presentar un desarrollo con un número de sumandos muy inferior al que posee la sucesión de potencias, cuando la cantidad de términos de dicha sucesión es notablemente mayor que el exponente.

Para $E = 3$, como en este ejemplo, y $n = 159$ en lugar de $n = 5$, la dimensión del desarrollo se conserva, modificándose solamente los números combinatorios $\binom{n}{v+1}$.

Es así que, para los valores $E = 3$, $n = 159$ y $d = 4$, se obtiene finalmente:

$$S(3,159,4) = \binom{159}{1}1 + \binom{159}{2}124 + \binom{159}{3}480 + \binom{159}{4}384$$
$$= 159 + 1'557'564 + 315'532'320 + 9'844'608'384 = \mathbf{10'161'698'427}$$

2.2. Otra expresión de la Propiedad RF

En la búsqueda de regularidades se observó que:

1. La cantidad de términos de la sumatoria principal es una unidad mayor que el exponente.

2. El último término de dicha sumatoria (correspondiente a $v = E$) es igual al producto entre el número combinatorio $C_{n,E+1}$ y el resultado de $E!d^E$.

De estas afirmaciones, nos queda:

$$\binom{n}{E+1}\sum_{i=0}^{E}(-1)^{E-i}\binom{E}{i}(1+id)^E = \binom{n}{E+1}E!d^E$$

Es decir, se verifica numéricamente, *con independencia de* "n", la identidad que sigue (caso particular de la propiedad que demostraremos en 5.1):

$$\sum_{i=0}^{E}(-1)^{E-i}\binom{E}{i}(1+id)^E = E!d^E$$

Para el ejemplo anterior, corresponde:

$$\sum_{i=0}^{3}(-1)^{3-i}\binom{3}{i}(1+i\cdot 4)^3 = 3!\cdot 4^3 = \mathbf{384}$$

Considerando esta identidad, podemos expresar la **Propiedad RF** así:

$$\boxed{\begin{gathered}\sum_{i=0}^{n-1}(1+id)^E = \sum_{v=0}^{E-1}\left[\binom{n}{v+1}\sum_{i=0}^{v}(-1)^{v-i}\binom{v}{i}(1+id)^E\right] + \binom{n}{E+1}E!d^E \\ E\in\mathbb{N}, n\in\mathbb{N}, n>E, d\in\mathbb{R}\end{gathered}}$$

3. Desarrollo del proceso inductivo

A partir de la búsqueda de regularidades realizada en numerosos ejemplos, Fridman obtuvo el desarrollo de la fórmula detallada en 2.2. Si bien la simbología matemática puede oscurecer las ventajas de la síntesis, riesgo que asumimos, detallaremos a continuación las fases cumplidas por el investigador, empleando, por razones de comunicación, una simbología más profusa de la que necesitó.

3.1. Análisis de sucesiones asociadas a una progresión aritmética

Ejemplo inicial:

valores arbitrarios

g				6		6		6		6			
k=0			**a_1 = 14**		**20**		**26**		**32**		**a_n = 38**		
k=1		p_1 = 4		18		38		64		96		f_1 = 134	
k=2	p_2 = 9		13		31		69		133		229		f_2 = **363**

Tabla 1

A partir de la elección de la diferencia constante $g = 6$ de una progresión aritmética, en la fila $k = 0$ se determinaron cinco términos consecutivos de la misma, en orden creciente. En este **Ejemplo inicial**, esa progresión aritmética de primer valor *arbitrario* $\boldsymbol{a_1 = 14}$, cantidad de términos (mayor que 1) $n_0 = 5$ y último término $\boldsymbol{a_n = 38}$, constituye la base para la construcción de las sucesiones que corresponden a las filas subsiguientes. En adelante, a esa diferencia "g" la llamaremos *constante generadora* (reservamos la notación "d" para la **Propiedad RF**).

En la fila $k = 1$ se desarrolló la sucesión de *número inicial* $p_1 = 4$, seleccionado *arbitrariamente*; los términos siguientes de esa sucesión se obtuvieron sumando, sucesivamente, cada término de la progresión aritmética (4+14=18, 18+20=38, etc.); el último número es el *número final* $f_1 = 134$; su cantidad de términos ($n_1 = 6$) es una unidad mayor que la cantidad de términos de la progresión aritmética ($n_0 = 5$). O sea, se verifica $n_1 = n_0 + 1$. En la fila $k = 2$ ocurrió lo análogo, eligiendo $p_2 = 9$ y sumando sucesivos términos de la sucesión de la fila $k = 1$.

3.1.1. Cálculo del último término de la sucesión k-ésima

Aplicando las fórmulas del último término y de la suma de los términos de la progresión aritmética ($k = 0$), $a_n = a_1 + (n_0 - 1)g$ y $S = 1/2(a_1 + a_n)n_0$, respectivamente:

Para la fila $k = 1$:

$$f_1 = p_1 + S = p_1 + \frac{1}{2}(a_1 + a_n)n_0 = p_1 + \frac{1}{2}[a_1 + a_1 + (n_0 - 1)g]n_0$$

$$= p_1 + \frac{1}{2}[2a_1 + (n_0 - 1)g]n_0 = p_1 + a_1 n_0 + \frac{1}{2}g n_0(n_0 - 1)$$

Reemplazando n_0 por $n_1 - 1$:

$$f_1 = p_1 + a_1(n_1 - 1) + \frac{1}{2}g(n_1 - 1)(n_1 - 2)$$

Análogamente, para la fila $k = 2$:

$$f_2 = p_2 + p_1(n_2 - 1) + \frac{1}{2}a_1(n_2 - 1)(n_2 - 2) + \frac{1}{6}g(n_2 - 1)(n_2 - 2)(n_2 - 3)$$

Y para $k = 3$:

$$\begin{aligned} f_3 = \ & p_3 + p_2(n_3 - 1) + \frac{1}{2}p_1(n_3 - 1)(n_3 - 2) + \frac{1}{6}a_1(n_3 - 1)(n_3 - 2)(n_3 - 3) \\ & + \frac{1}{24}g(n_3 - 1)(n_3 - 2)(n_3 - 3)(n_3 - 4) \end{aligned}$$

Denotando al primer término de la progresión aritmética a_1 como p_0, f_3 queda:

$$\begin{aligned} f_3 = \ & p_3 + p_2(n_3 - 1) + \frac{1}{2}p_1(n_3 - 1)(n_3 - 2) + \frac{1}{6}p_0(n_3 - 1)(n_3 - 2)(n_3 - 3) \\ & + \frac{1}{24}g(n_3 - 1)(n_3 - 2)(n_3 - 3)(n_3 - 4) \qquad \boxed{a_1 = p_0} \end{aligned}$$

Utilizando la notación factorial, *se indujo* la siguiente generalización:

$$\begin{aligned} f_k = p_k & + \frac{1}{1!}p_{k-1}(n_k - 1) \\ & + \frac{1}{2!}p_{k-2}(n_k - 1)(n_k - 2) \\ & + \frac{1}{3!}p_{k-3}(n_k - 1)(n_k - 2)(n_k - 3) + \cdots + \\ & + \frac{1}{k!}p_0(n_k - 1)(n_k - 2)(n_k - 3)\cdots[n_k - (k-1)](n_k - k) \\ & + \frac{1}{(k+1)!}g(n_k - 1)(n_k - 2)(n_k - 3)\cdots(n_k - k)[n_k - (k+1)] \end{aligned}$$

Una de sus fórmulas representativas es:

$$\boxed{f_k(g, p_k, p_{k-j}, n_k) = p_k + \sum_{j=1}^{k}\left[\frac{1}{j!}p_{k-j}\prod_{m=1}^{j}(n_k - m)\right] + \frac{1}{(k+1)!}g\prod_{t=1}^{k+1}(n_k - t)} \qquad (1)$$

Se conjeturó la siguiente identidad, que demostraremos en 5.2:

$$\frac{1}{u!}\prod_{i=1}^{u}(n - i) = \frac{1}{u!}(n-1)(n-2)(n-3)\cdots[n-(u-1)](n-u) = \binom{n-1}{u}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\frac{1}{j!}\prod_{m=1}^{j}(n_k - m) = \binom{n_k - 1}{j}} \qquad \boxed{\frac{1}{(k+1)!}\prod_{t=1}^{k+1}(n_k - t) = \binom{n_k - 1}{k+1}}$$

Reemplazando en (1), obtenemos la siguiente expresión del *número final de la sucesión* k, que es su último término:

$$f_k(g, p_k, p_{k-j}, n_k) = p_k + \sum_{j=1}^{k} p_{k-j}\binom{n_k - 1}{j} + g\binom{n_k - 1}{k+1}$$

Conmutando factores e incorporando p_k en la sumatoria, la (1) queda:

$$\boxed{f_k(g, p_{k-j}, n_k) = \sum_{j=0}^{k}\binom{n_k - 1}{j}p_{k-j} + \binom{n_k - 1}{k+1}g} \tag{2}$$

Ejemplo numérico:

Obtener el número final f_2 del **ejemplo inicial** del ítem 3.1 (fila $k = 2$ de la **Tabla 1**) Datos: $k = 2$, $g = 6$, $p_0 = a_1 = 14$, $p_1 = 4$, $p_2 = 9$, $n_2 = 7$

$$\begin{aligned}
f_2(g, p_{2-j}, n_2) &= \sum_{j=0}^{2}\binom{n_2 - 1}{j}p_{2-j} + \binom{n_2 - 1}{2+1}g \\
f_2(6, p_{2-j}, 7) &= \sum_{j=0}^{2}\binom{7 - 1}{j}p_{2-j} + \binom{7 - 1}{3}6 \\
f_2(6, p_{2-j}, 7) &= \binom{6}{0}p_2 + \binom{6}{1}p_1 + \binom{6}{2}p_0 + \binom{6}{3}6 \\
&= 1.9 + 6.4 + 15.14 + 20.6 \\
&= \mathbf{363}
\end{aligned}$$

3.1.2. Cálculo de la suma de los términos de la sucesión k-ésima

Fridman realizó una importante apreciación: si $p_{k+1} = 0$, entonces f_{k+1} es igual a la suma de términos de la sucesión k. Por esa razón:

$$S_k(g, p_{k+1-j}, n_k) = f_{k+1}(g, p_{k+1-j}, n_k) = \sum_{j=0}^{k+1}\binom{n_{k+1} - 1}{j}p_{k+1-j} + \binom{n_{k+1} - 1}{k+2}g$$

Como $n_{k+1} - 1 = n_k$, pues cada sucesión tiene un término menos que la siguiente:

$$S_k(g, p_{k+1-j}, n_k) = f_{k+1}(g, p_{k+1-j}, n_k) = \sum_{j=0}^{k+1}\binom{n_k}{j}p_{k+1-j} + \binom{n_k}{k+2}g$$

Por ser $p_{k+1} = 0$, podemos aumentar una unidad el límite inferior de la sumatoria:

$$S_k(g, p_{k+1-j}, n_k) = \sum_{j=1}^{k+1}\binom{n_k}{j}p_{k+1-j} + \binom{n_k}{k+2}g$$

Restando una unidad en ambos límites de la sumatoria:

$$S_k(g, p_{k-j}, n_k) = \sum_{j=0}^{k} \binom{n_k}{j+1} p_{k-j} + \binom{n_k}{k+2} g$$

A continuación presentamos un ejemplo, destacando que los números iniciales p_k son *arbitrarios*. El objetivo es sumar los términos de la sucesión $k = 4$

g						**38**		**38**		**38**					
k=0					p_0 = **7**		45		83		121				
k=1				p_1 = **11**		18		63		146		267			
k=2			p_2 = **6**		17		35		98		244		511		
k=3		p_3 = **13**		19		36		71		169		413		924	
k=4	p_4 = **2**		15		34		70		141		310		723		1647

Tabla 2: los números en negrita son arbitrarios; la flecha indica el orden de construcción.

Datos: $k = 4$, $g = 38$, $p_0 = 7$, $p_1 = 11$, $p_2 = 6$, $p_3 = 13$, $p_4 = 2$, $n_4 = 8$

$$\begin{aligned}
S_2(g, p_{4-j}, n_4) &= \sum_{j=0}^{4} \binom{n_4}{j+1} p_{4-j} + \binom{n_4}{4+2} g \\
S_2(38, p_{4-j}, 8) &= \sum_{j=0}^{4} \binom{8}{j+1} p_{4-j} + \binom{8}{6} 38 \\
&= \binom{8}{1} p_4 + \binom{8}{2} p_3 + \binom{8}{3} p_2 + \binom{8}{4} p_1 + \binom{8}{5} p_0 + \binom{8}{6} 38 \\
&= 8.2 + 28.13 + 56.6 + 70.11 + 56.7 + 28.38 \\
&= \mathbf{2942}
\end{aligned}$$

Verificación: $2 + 15 + 34 + 70 + 141 + 310 + 723 + 1647 =$ **2942**

3.2. Cálculo de la suma de los términos de una sucesión de potencias de igual exponente "E" y término inicial 1^E, cantidad de términos "n",cuyas bases son una progresión aritmética de diferencia "d".

En los dos ejemplos siguientes (**Tabla 3** y **Tabla 4**) se realizó el procedimiento inverso al de la **Tabla 2:** se partió de dos sucesiones de potencias de igual exponente, primer término 1^E, exponentes $E = 2$ y $E = 3$, cantidad de elementos $n = 7$ y $n = 6$, y diferencias $d = 5$ y $d = 4$ respectivamente. Restando sus términos consecutivos, se obtuvo la progresión aritmética de fila $k = 0$ en el **Ejemplo 1** y de la fila $k = 1$ en el **Ejemplo 2**. Restando los términos consecutivos en ambas, se llegó a la constante c_2 y a la progresión $k = 0$, respectivamente. Restando los términos consecutivos de la progresión $k = 0$ del **Ejemplo 2**, se alcanzó la constante c_3.

Ejemplo 1 (la flecha indica el orden de construcción):

c_2			50		50		50		50		50		
k=0		$p_0 = 35$		85		135		185		235		$a_n = 285$	
k=1	$p_1 = \mathbf{1^2}$		$\mathbf{6^2}$		$\mathbf{11^2}$		$\mathbf{16^2}$		$\mathbf{21^2}$		$\mathbf{26^2}$		$f_1 = \mathbf{31^2}$

Tabla 3

Ejemplo 2 (la flecha indica el orden de construcción):

c_3				384		384		384			
k=0			$p_0 = 480$		864		1248		$a_n = 1632$		
k=1		$p_1 = 124$		604		1468		2716		$f_1 = 4348$	
k=2	$p_2 = \mathbf{1^3}$		$\mathbf{5^3}$		$\mathbf{9^3}$		$\mathbf{13^3}$		$\mathbf{17^3}$		$f_2 = \mathbf{21^3}$

Tabla 4

Fridman *conjeturó*: al restar los términos consecutivos de toda suma de potencias de igual exponente natural -con bases en progresión aritmética- se obtiene una sucesión; restando los términos consecutivos de esta última se produce otra, y así sucesivamente hasta llegar a una progresión aritmética ($k = 0$). Por lo tanto, tal resta de potencias deviene finalmente en una constante que llamaremos *constante final* "c", correspondiente a la anterior constante generadora "g". Ello se cumple si el primer término de la sucesión es 1^E, como las de este trabajo, o si no lo es.

A diferencia con lo desarrollado en 3.1, como partimos ahora de la sucesión de potencias, los números iniciales ya no son arbitrarios, como tampoco lo es "c".

La constante final "c" no depende de la cantidad de términos de la sucesión de potencias, sino que lo hace solo del exponente y la diferencia constante de la progresión aritmética que forman sus bases; la denotaremos con el valor de "E" como subíndice, o sea, c_E. Su expresión en función de "d" será $c_E(d)$.

El investigador llegó a estas conclusiones analizando distintas sucesiones de potencias como las dos descritas.

Siendo "n" la cantidad de términos de la sucesión de potencias, llamando "S" a la suma de sus términos y reemplazando "g" por c_E, resulta:

$$S(n, p_{k-j}, c_E) = \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j+1} p_{k-j} + \binom{n}{k+2} c_E$$

En las **Tablas 3** y **4** puede verse que el número de fila "k", correspondiente a la sucesión de potencias, es una unidad menor que el exponente. O sea, para el mayor valor de k, correspondiente a la sucesión de potencias en estudio, se verifica $k = E - 1$. Reemplazando "k" por $E - 1$, (2) queda:

$$\boxed{S(E,n,p_{E-1-j},c_E)=\sum_{j=0}^{E-1}\binom{n}{j+1}p_{E-1-j}+\binom{n}{E+1}c_E} \tag{3}$$

Ejemplo numérico:

Hallar la suma de potencias del **Ejemplo 2** de este apartado (fila $k=2$ de la **Tabla 4**)
Datos: $k=2$, $E=3$, $n=6$, $p_2=1$, $p_1=124$, $p_0=480$, $c_3=384$

$$\begin{aligned} S_2(3,6,p_{2-j},384) &= \sum_{j=0}^{2}\binom{6}{j+1}p_{2-j}+\binom{6}{3+1}384 \\ &= \binom{6}{1}p_2+\binom{6}{2}p_1+\binom{6}{3}p_0+\binom{6}{4}384 \\ &= 6.1+15.124+20.480+15.384 \\ &= \mathbf{17226} \end{aligned}$$

-Si bien ya no son arbitrarios, para aplicar (3) los números iniciales p_k y la constante final c_E aún deben leerse de la tabla.

Verificación: $1^3+5^3+9^3+13^3+17^3+21^3=\mathbf{17226}$

Como puede apreciarse en el ejemplo anterior, los subíndices de los números iniciales p_k aparecen en orden decreciente. Eso obedece a que su orden es inverso al orden de construcción. Para que ambos coincidan, reemplazaremos en la **Tabla 4** la variable “k” por la ordenadora “v”, y en (3) lo haremos con p_{E-1-j} por p_v:

v=0	$p_0 = \mathbf{1^3}$		5^3		$\mathbf{9^3}$		$\mathbf{13^3}$		$\mathbf{17^3}$		$f_0 = \mathbf{21^3}$
v=1		$p_1 = 124$		604		1468		2716		$f_1 = 4348$	
v=2			$p_2 = 480$		864		1248		$a_2 = 1632$		
c_E				384		384		384			

Tabla 5: **Ejemplo 2** con el orden de fila invertido

Así, (3) queda:

$$\boxed{S(E,n,p_v,c_E)=\sum_{v=0}^{E-1}\binom{n}{v+1}p_v+\binom{n}{E+1}c_E} \tag{4}$$

Pudimos hacer coincidir el índice de la sumatoria con el número de fila (ambos “v”) porque el subíndice de “p” no incluye operaciones entre variables.

3.2.1. Suma de términos de la sucesión de potencias en función de E, n y d, solamente

Los números iniciales p_v y la constante final c_E, como dijimos, no son arbitrarios sino que dependen de la sucesión de potencias en estudio. Por esa razón, Fridman buscó una expresión de la suma de dichas potencias que no incluyera los números iniciales ni la constante final. Su objetivo fue que dicha *función suma* tuviera solamente como variables independientes: el exponente "E", la cantidad de términos de la sucesión de potencias "n" y la diferencia constante entre sus bases consecutivas "d". Buscaremos, entonces, una fórmula para $S(E, n, d)$.

Fridman analizó varias series de potencias. Consignaremos, como ejemplo, cinco sucesiones, cada una de igual exponente "E", de $n = 7$ términos que comienzan con 1^E, cuyas bases están en progresión aritmética de diferencia constante $d = 2$. Hemos sombreado los números iniciales p_v y la constante final c_E.

Sucesión con E=1, n=7, d=2							
v=0	**1^1**	**3^1**	**5^1**	**7^1**	**9^1**	**11^1**	**13^1**
c_1	2	2	2	2	2	2	

Sucesión con E=2, n=7, d=2							
v=0	**1^2**	**3^2**	**5^2**	**7^2**	**9^2**	**11^2**	**13^2**
v=1	8	16	24	32	40	48	
c_2	8	8	8	8	8		

Sucesión con E=3, n=7, d=2							
v=0	**1^3**	**3^3**	**5^3**	**7^3**	**9^3**	**11^3**	**13^3**
v=1	26	98	218	386	602	866	
v=2	72	120	168	216	264		
c_3	48	48	48	48			

Sucesión con E=4, n=7, d=2							
v=0	**1^4**	**3^4**	**5^4**	**7^4**	**9^4**	**1^4**	**3^4**
v=1	80	544	1776	4160	8080	13920	
v=2	464	1232	2384	3920	5840		
v=3	768	1152	1536	1920			
c_4	384	384	384				

Sucesión con E=5, n=7, d=2							
v=0	**1^5**	**3^5**	**5^5**	**7^5**	**9^5**	**11^5**	**13^5**
v=1	242	2882	13682	42242	102002	210242	
v=2	2640	10800	28560	59760	108240		
v=3	8160	17760	31200	48480			
v=4	9600	13440	17280				
c_5	3840	3840					

Tabla 6: presentada en cinco partes.

En los 5 ejemplos analizados, Fridman verificó que $\boldsymbol{c_E = E!d^E}$

Para examinar los números iniciales p_v y la constante final c_E, el investigador construyó tablas como:

Valores de los números iniciales $\boldsymbol{p_v}$ y de la constante $\boldsymbol{c_E}$ (los sombreados), para $\boldsymbol{d = 2}$:

E	v=0	v=1	v=2	v=3	v=4	v=5
1	1	2	----	----	----	----
2	1	8	8	----	----	----
3	1	26	72	48	----	----
4	1	80	464	768	384	----
5	1	242	2640	8160	9600	3840

Tabla 7

Luego realizó estas observaciones:

Desarrollo de los números iniciales p_v y de la constante c_E (los sombreados), para $d = 2$:

E	v=0	v=1	v=2	v=3	v=4	c_E
1	1^1	$-1+1.3^1$	----	----	----	----
2	1^2	$-1+1.3^2$	$1-2.3^2+1.5^2$	----	----	----
3	1^3	$-1+1.3^3$	$1-2.3^3+1.5^3$	$-1+3.3^3-3.5^3+1.7^3$	----	----
4	1^4	$-1+1.3^4$	$1-2.3^4+1.5^4$	$-1+3.3^4-3.5^4+1.7^4$	$1-4.3^4+6.5^4-4.7^4+1.9^4$	----
5	1^5	$-1+1.3^5$	$1-2.3^5+1.5^5$	$-1+3.3^5-3.5^5+1.7^5$	$1-4.3^5+6.5^5-4.7^5+1.9^5$	$-1+5.2^5-10.3^5+10.4^5-5.5^5+1.6^5$

Tabla 8

En las **Tablas 7** y **8**, cada celda no sombreada encierra un número inicial p_v y cada celda sombreada un valor de c_E. En la **Tabla 8** los mismos fueron desarrollados en forma polinómica, notándose que:

1) Los valores absolutos de los coeficientes de las potencias respetan la estructura del Triángulo de Tartaglia (luego se expresarán como números combinatorios).

2) Las bases de las potencias coinciden con las bases de las potencias de la sucesión en estudio y, además, equivalen a binomios cuyas regularidades se destacarán más abajo.

Algunos desarrollos del análisis fueron:

Para E=1:

$$p_0 = 1.1^1 = (-1)^0\binom{0}{0}1^1 = (-1)^0\binom{0}{0}(1+0.2)^1$$
$$c_1 = -1.1^1 + 1.3^1 = (-1)^1\binom{1}{0}1^1 + (-1)^0\binom{1}{1}3^1 = (-1)^1\binom{1}{0}(1+0.2)^1 + (-1)^0\binom{1}{1}(1+1.2)^1$$

Para E=2:

$$p_0 = (-1)^0\binom{0}{0}(1+0.2)^2$$
$$p_1 = (-1)^1\binom{1}{0}(1+0.2)^2 + (-1)^0\binom{1}{1}(1+1.2)^2$$
$$c_2 = (-1)^2\binom{2}{0}(1+0.2)^2 + (-1)^2\binom{2}{1}(1+1.2)^2 + (-1)^0\binom{2}{2}(1+2.2)^2$$

Para E=3:

$$p_0 = (-1)^0\binom{0}{0}(1+0.2)^3$$
$$p_1 = (-1)^1\binom{1}{0}(1+0.2)^3 + (-1)^0\binom{1}{1}(1+1.2)^3$$
$$p_2 = (-1)^2\binom{2}{0}(1+0.2)^3 + (-1)^1\binom{2}{1}(1+1.2)^3 + (-1)^0\binom{2}{2}(1+2.2)^3$$
$$c_3 = (-1)^3\binom{3}{0}(1+0.2)^3 + (-1)^2\binom{3}{1}(1+1.2)^3 + (-1)^1\binom{3}{2}(1+2.2)^3 + (-1)^0\binom{3}{3}(1+3.2)^3$$

Coef. de las potencias de p_v y c_3 (E=3)							
v=0				1			
v=1			-1		1		
v=2		1		-2		1	
c_3	-1		3		-3		1

Para cada número inicial p_v, Fridman observó que:

a) La cantidad de sumandos es una unidad mayor que el subíndice, o sea, que el número de fila "v".

b) Los signos de los coeficientes de las potencias son alternados, comenzando con positivo si "v" es par, y negativo si es impar.

c) El número superior de los combinatorios coincide con "v" y el inferior crece desde 0 hasta "v".

d) Las bases de las potencias equivalen a binomios $1 + vd$, donde "d" es la diferencia constante entre las bases consecutivas de la sucesión de potencias, que en este ejemplo es 2; esas potencias tienen exponentes iguales a "E".

Una fórmula que sintetiza tales características es:

$$P_v(E,d) = \sum_{i=0}^{v} (-1)^{v-i} \binom{v}{i} (1+id)^E$$

Las constantes finales c_E, a su vez, presentan singularidades análogas a las de los números iniciales, destacándose que el primer exponente de (-1), el número superior de los combinatorios, el último número inferior, el último factor de "d" y el exponente de los binomios, coinciden con el exponente "E". Con símbolos:

$$c_E(d) = \sum_{i=0}^{E} (-1)^{E-i} \binom{E}{i} (1+id)^E$$

En 3.2 habíamos presentado la Fórmula (4):

$$S(E,n,p_v,c_E) = \sum_{v=0}^{E-1} \binom{n}{v+1} p_v + \binom{n}{E+1} c_E$$

Sustituyendo p_v y c_E por las expresiones recién obtenidas, (4) queda:

$$\boxed{S(E,n,d) = \sum_{v=0}^{E-1} \left[\binom{n}{v+1} \sum_{i=0}^{v} (-1)^{v-i} \binom{v}{i} (1+id)^E \right] + \binom{n}{E+1} \sum_{i=0}^{E} (-1)^{E-i} \binom{E}{i} (1+id)^E} \tag{5}$$

Atendiendo a los distintos parámetros e índices participantes, podemos escribir la identidad siguiente, que demostraremos en 5.3:

$$S(E,n,d) = \sum_{v=0}^{E} \left[\binom{n}{v+1} \sum_{i=0}^{v} (-1)^{v-i} \binom{v}{i} (1+id)^E \right]$$

Como adelantamos en 2.2, Fridman *conjeturó* también que los valores de las constantes finales c_E coinciden con el producto $E!\ d^E$. Lo hizo a partir de diversos análisis numéricos como los ya expuestos. Reemplazando la sumatoria equivalente a c_E por $E!\ d^E$, (5) queda:

$$\boxed{\begin{gathered} S(E,n,d) = \sum_{v=0}^{E-1} \left[\binom{n}{v+1} \sum_{i=0}^{v} (-1)^{v-i} \binom{v}{i} (1+id)^E \right] + \binom{n}{E+1} E! d^E \\ E \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, n > E, d \in \mathbb{R} \end{gathered}} \tag{6}$$

4. Conclusión del proceso inductivo

Se partió de:

$$S(E,n,d) = (1{+}0{\cdot}d)^E{+}(1{+}1{\cdot}d)^E{+}(1{+}2{\cdot}d)^E{+}(1{+}3{\cdot}d)^E{+}...{+}[1{+}(n{-}2){\cdot}d]^E{+}[1{+}(n{-}1){\cdot}d]^E$$

con $E \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $d \in \mathbb{R}$, cuyo desarrollo expresamos:

$$S(E,n,d) = \sum_{i=0}^{n-1}(1 + i \cdot d)^E$$

Reemplazando $S(E,n,d)$ por $\sum_{i=0}^{n-1}(1 + i \cdot d)^E$ en (6) se obtuvo la **Propiedad RF**, que permite hallar la suma de los términos de la sucesión de potencias, conociendo el exponente constante "E", la cantidad de términos "n" y la diferencia constante "d", de la progresión aritmética que forman sus bases:

$$\boxed{\begin{gathered}\sum_{i=0}^{n-1}(1 + i \cdot d)^E = \sum_{v=0}^{E-1}\left[\binom{n}{v+1}\sum_{i=0}^{v}(-1)^{v-i}\binom{v}{i}(1+id)^E\right] + \binom{n}{E+1}E!d^E \\ E \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N},\ n > E,\ d \in \mathbb{R}\end{gathered}}$$

4.1. Alcance y extensión de la Propiedad RF

En el trabajo inductivo, el dominio de E, n y d fue el conjunto de números naturales. Finalmente, la observación de la fórmula obtenida permitió la extensión del dominio de "d", de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$. Podemos destacar al respecto:

1. El exponente constante "E" está restringido a los naturales (mayores que cero) por el límite superior de la sumatoria, su inclusión en el combinatorio $C_{n,E+1}$ y su presentación como factorial. Dicho combinatorio exige que "n" sea mayor que "E".
2. No hay restricciones para la diferencia constante "d". En efecto, la **Propiedad RF** puede verificarse para todos los valores reales de "d". Si $d = 0$, por tratarse de sucesiones de potencias de primer término 1^E, los demás términos también serán 1^E y $S(E,n,0)$ será igual a "n", independientemente de "E".

   Ya señalamos en el ítem 2 que Fridman realizó sus análisis inductivos trabajando con $d \in \mathbb{N}$; después realizó la generalización a $\mathbb{R}$, a partir de la lectura de esta fórmula.
3. Al preguntarse qué cambios habría que hacer en la fórmula si el primer elemento de la serie de potencias fuese una base distinta de 1, la respuesta del investigador fue el reemplazo del "1" de los binomios $1 + id$ por la base seleccionada. Es decir, para cualquier base inicial $k \in \mathbb{R}$, los binomios de ambos miembros de la **Propiedad RF** deben ser $k + id$, generalización que utilizaremos en las demostraciones 5.1 y 5.3.

5. Demostraciones

5.1. Demostración -por inducción completa- de la propiedad del ítem 2.2:

$$\sum_{i=0}^{E}(-1)^{E-i}\binom{E}{i}(k+id)^E = E!d^E \qquad E \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{R}, d \in \mathbb{R}$$

Paso base para $E = 1$:

$$\sum_{i=0}^{1}(-1)^{1-i}\binom{1}{i}(k+id)^1 = (-1)^{1-0}\binom{1}{0}(k+0\cdot d)^1 + (-1)^{1-1}\binom{1}{1}(k+1\cdot d)^1$$
$$= -k+k+d = d = 1!d^1 \qquad \checkmark$$

Hipótesis inductiva. Suponemos que la propiedad vale para el exponente natural w:

$$\sum_{i=0}^{w}(-1)^{w-i}\binom{w}{i}(k+id)^w = w!d^w \qquad w\in\mathbb{N}, k\in\mathbb{R}, d\in\mathbb{R}$$

Tesis inductiva. Debe cumplirse también para el exponente natural $w+1$:

$$\sum_{i=0}^{w+1}(-1)^{w+1-i}\binom{w+1}{i}(k+id)^{w+1} = (w+1)!d^{w+1} \qquad w+1\in\mathbb{N}, k\in\mathbb{R}, d\in\mathbb{R}$$

Demostración. Partimos del primer miembro de la tesis de inducción:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{w+1}(-1)^{w+1-i}\binom{w+1}{i}(k+id)^{w+1}\\
&\quad= (-1)^{w+1}k^{w+1} + [k+(w+1)d]^{w+1} + \sum_{i=0}^{w}(-1)^{w+1-i}\binom{w+1}{i}(k+id)^w(k+id)\\
&\quad= (-k)^{w+1} + [k+(w+1)d]^{w+1} + k\sum_{i=0}^{w}(-1)^{w+1-i}\binom{w+1}{i}(k+id)^w\\
&\qquad + d\sum_{i=0}^{w}(-1)^{w+1-i}\binom{w+1}{i}(k+id)^w i \qquad (\bullet)
\end{aligned}$$

Aplicando en el tercer término de $(\bullet)$ la propiedad $\binom{w+1}{i} = \binom{w}{i} + \binom{w}{i-1}$

$$\begin{aligned}
&k\sum_{i=1}^{w}(-1)^{w+1-i}\binom{w+1}{i}(k+id)^w\\
&\quad= k\sum_{i=1}^{w}(-1)^{w+1-i}\binom{w}{i}(k+id)^w + k\sum_{i=1}^{w}(-1)^{w+1-i}\binom{w}{i-1}(k+id)^w\\
&\quad= (-k)\sum_{i=1}^{w}(-1)^{w-i}\binom{w}{i}(k+id)^w + k\sum_{i=1}^{w}(-1)^{w+1-i}\binom{w}{i-1}(k+id)^w\\
&\quad\overbrace{=}^{Hind.} (-k)[w!d^w - (-1)^w k^w] + k\sum_{i=1}^{w}(-1)^{w+1-i}\binom{w}{i-1}(k+id)^w\\
&\quad= (-1)^w k^{w+1} - kw!d^w + k\sum_{i=1}^{w}(-1)^{w+1-i}\binom{w}{i-1}(k+id)^w
\end{aligned}$$

Aplicando en el cuarto término de $(\bullet)$ la propiedad $\binom{w+1}{i} = \binom{w}{i-1}\dfrac{w+1}{i}$

$$d\sum_{i=1}^{w}(-1)^{w+1-i}\binom{w+1}{i}(k+id)^{w}i$$
$$= d\sum_{i=1}^{w}(-1)^{w+1-i}\binom{w}{i-1}\frac{w+1}{i}(k+id)^{w}i$$
$$= (w+1)d\sum_{i=1}^{w}(-1)^{w+1-i}\binom{w}{i-1}(k+id)^{w}$$

Reemplazando el tercer y cuarto términos de ($\bullet$) por los resultados obtenidos, ($\bullet$) queda:

$$(-k)^{w+1}+[k+(w+1)d]^{w+1}+(-1)^{w}k^{w+1}-kw!d^{w}+k\sum_{i=1}^{w}(-1)^{w+1-i}\binom{w}{i-1}(k+id)^{w}$$
$$+(w+1)d\sum_{i=1}^{w}(-1)^{w+1-i}\binom{w}{i-1}(k+id)^{w}$$
$$=[k+(w+1)d]^{w+1}-kw!d^{w}+[k+(w+1)d]\sum_{i=1}^{w}(-1)^{w+1-i}\binom{w}{i-1}(k+id)^{w}$$
$$=-kw!d^{w}+[k+(w+1)d]\left\{[k+(w+1)d]^{w}+\sum_{i=1}^{w}(-1)^{w-i}\binom{w}{i}[k+(i+1)d]^{w}\right\}$$
$$=-kw!d^{w}+[k+(w+1)d]\sum_{i=0}^{w}(-1)^{w-i}\binom{w}{i}[k+(i+1)d]^{w}\qquad(\bullet\bullet)$$

Como $k+(i+1)d=k+id+d=(k+d)+id$, con $(k+d)\in\mathbb{R}$:

$$\sum_{i=0}^{w}(-1)^{w-i}\binom{w}{i}[k+(i+1)d]^{w}=\sum_{i=0}^{w}(-1)^{w-i}\binom{w}{i}[(k+d)+id]^{w}\overbrace{=}^{\text{H ind.}}w!d^{w}$$

Reemplazando en ($\bullet\bullet$) :

$$-kw!d^{w}+[k+(w+1)d]w!d^{w}=w!d^{w}[-k+k+(w+1)d]=w!d^{w}(w+1)d=(w+1)!d^{w+1}\qquad\checkmark$$

En particular, la propiedad demostrada vale para $k=1$: $\sum_{i=0}^{E}(-1)^{E-i}\binom{E}{i}(1+id)^{E}=E!d^{E}$

Corolario : $$\sum_{i=0}^{E}(-1)^{E-i}\binom{E}{i}(k+id)^{E}=\sum_{i=0}^{E}(-1)^{E-i}\binom{E}{i}[k+(i+1)d]^{E}$$

$$E\in\mathbb{N},k\in\mathbb{R},d\in\mathbb{R}$$

5.2. Demostración -por inducción completa- de la propiedad del ítem 3.1.1:

$$\frac{1}{u!}\prod_{i=1}^{u}(n-i)=\binom{n-1}{u}\qquad u\in\mathbb{N},n\in\mathbb{N},n>u$$

Paso base para $u = 1$:

$$\frac{1}{1!}\prod_{i=1}^{1}(n-i) = \frac{1}{1!}(n-1) = \textbf{n-1} \qquad y \qquad \binom{n-1}{1} = \textbf{n-1} \qquad \checkmark$$

Hipótesis inductiva. Suponemos que la propiedad vale para el número natural $u = w$:

$$\frac{1}{w!}\prod_{i=1}^{w}(n-i) = \binom{n-1}{w} \qquad n > w$$

Tesis inductiva. Debe cumplirse también para el número natural $u = w+1$:

$$\frac{1}{(w+1)!}\prod_{i=1}^{w+1}(n-i) = \binom{n-1}{w+1} \qquad n > w+1$$

Demostración. Partimos del primer miembro de la tesis de inducción:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(w+1)!}\prod_{i=1}^{w+1}(n-i) &= \frac{1}{(w+1)!}[n-(w+1)]\prod_{i=1}^{w}(n-i) \\
&= \frac{1}{(w+1)!}n\prod_{i=1}^{w}(n-i) - \frac{1}{(w+1)!}(w+1)\prod_{i=1}^{w}(n-i) \\
&\overbrace{=}^{Hind.} \frac{1}{w+1}n\binom{n-1}{w} - \binom{n-1}{w} \\
&= \binom{n-1}{w}\left(\frac{n}{w+1} - 1\right) \\
&= \binom{n-1}{w}\left(\frac{n-w-1}{w+1}\right) \\
&= \frac{(n-1)!}{(n-1-w)!w!}\left(\frac{n-w-1}{w+1}\right) \\
&= \frac{(n-1)!}{(n-1-w)(n-w-2)!w!}\left(\frac{n-w-1}{w+1}\right) \\
&= \frac{(n-1)!}{(n-w-2)!(w+1)!} \\
&= \binom{n-1}{w+1} \qquad \checkmark
\end{aligned}$$

5.3. Demostración de la propiedad:

$$\sum_{i=0}^{E+1}(-1)^{E+1-i}\binom{E+1}{i}(k+id)^E = 0 \qquad E \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{R}, d \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{i=0}^{E+1}(-1)^{E+1-i}\binom{E+1}{i}(k+id)^E$$

$$= (-1)^{E+1}k^E + [k+(E+1)d]^E + \textstyle\sum_{i=1}^{E}(-1)^{E+1-i}\binom{E+1}{i}(k+id)^E \qquad (\bullet)$$

Aplicando la propiedad $\binom{E+1}{i} = \binom{E}{i} + \binom{E}{i-1}$, la expresión ($\bullet$) se transforma en:

$$(-1)^{E+1}k^E + [k+(E+1)d]^E + \sum_{i=1}^{E}(-1)^{E+1-i}\binom{E}{i}(k+id)^E$$
$$+\sum_{i=1}^{E}(-1)^{E+1-i}\binom{E}{i-1}(k+id)^E = (-1)^{E+1}k^E + [k+(E+1)d]^E - (-1)^{E+1}k^E +$$
$$+\sum_{i=0}^{E}(-1)^{E+1-i}\binom{E}{i}(k+id)^E - [k+(E+1)d]^E + \sum_{i=1}^{E+1}(-1)^{E+1-i}\binom{E}{i-1}(k+id)^E$$
$$= -\sum_{i=0}^{E}(-1)^{E-i}\binom{E}{i}(k+id)^E + \sum_{i=0}^{E}(-1)^{E-i}\binom{E}{i}[k+(i+1)d)]^E(\bullet\bullet)$$

Por el **Corolario** de la propiedad demostrada en 5.1, la expresión ($\bullet\bullet$) queda:

$$-\sum_{i=0}^{E}(-1)^{E-i}\binom{E}{i}(k+id)^E + \sum_{i=0}^{E}(-1)^{E-i}\binom{E}{i}(k+id)^E = 0 \qquad \checkmark$$

En particular, la propiedad demostrada vale para $k=1$:

$$\sum_{i=0}^{E+1}(-1)^{E+1-i}\binom{E+1}{i}(1+id)^E = 0$$

5.4. Demostración -por inducción completa- de la propiedad del ítem 3.2:

$$\sum_{i=0}^{n-1}(1+id)^E = \sum_{v=0}^{E}\left[\binom{n}{v+1}\sum_{i=0}^{v}(-1)^{v-i}\binom{v}{i}(1+id)^E\right] \qquad E\in\mathbb{N}, n\in\mathbb{N}, n>E, d\in\mathbb{R}$$

Paso base para $E=1$:

$$\sum_{i=0}^{n-1}(1+id)^1 = \sum_{i=0}^{n-1}1 + \sum_{i=0}^{n-1}+id = n + d\sum_{i=0}^{n-1}i = n + d\frac{n(n-1)}{2} \qquad \checkmark$$

$$\sum_{v=0}^{1}\left[\binom{n}{v+1}\ \sum_{i=0}^{v}(-1)^{v-i}\binom{v}{i}(1+id)^1\right] =$$
$$=\binom{n}{1}\sum_{i=0}^{0}(-1)^{0-i}\binom{0}{i}(1+id)^1 + \binom{n}{2}\sum_{i=0}^{1}(-1)^{1-i}\binom{1}{i}(1+id)^1$$
$$=n+\binom{n}{2}[-1+(1+d)]$$
$$=n+\frac{n!}{(n-2)!2!}d$$
$$=n+d\frac{n(n-1)}{2} \qquad \checkmark$$

Hipótesis inductiva. Suponemos que la propiedad vale para el exponente natural w:

$$\sum_{i=0}^{n-1}(1+id)^w = \sum_{v=0}^{w}\left[\binom{n}{v+1}\sum_{i=0}^{v}(-1)^{v-i}\binom{v}{i}(1+id)^w\right] \quad w \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, n > w, d \in \mathbb{R}$$

Tesis inductiva. Debe cumplirse también para el exponente natural $w+1$:

$$\sum_{i=0}^{n-1}(1+id)^{w+1} = \sum_{v=0}^{w+1}\left[\binom{n}{v+1}\sum_{i=0}^{v}(-1)^{v-i}\binom{v}{i}(1+id)^{w+1}\right]$$

$$w+1 \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, n > w+1, d \in \mathbb{R}$$

Demostración. Consideramos el primer miembro de la tesis inductiva:

$$\sum_{i=0}^{n-1}(1+id)^{w+1} = \sum_{i=0}^{n-1}(1+id)^w(1+id) = \sum_{i=0}^{n-1}(1+id)^w + \sum_{i=0}^{n-1}(1+id)^w id$$

es decir $\sum_{i=0}^{n-1}(1+id)^w = \sum_{i=0}^{n-1}(1+id)^{w+1} - \sum_{i=0}^{n-1}(1+id)^w id$

y utilizando la hipótesis inductiva se tiene que:

$$\sum_{i=0}^{n-1}(1+id)^{w+1} - \sum_{i=0}^{n-1}(1+id)^w id = \sum_{v=0}^{w}\left[\binom{n}{v+1}\sum_{i=0}^{v}(-1)^{v-i}\binom{v}{i}(1+id)^w\right] (\bullet)$$

Tomamos ahora el segundo miembro de la tesis inductiva:

$$\sum_{v=0}^{w+1}\left[\binom{n}{v+1}\sum_{i=0}^{v}(-1)^{v-i}\binom{v}{i}(1+id)^{w+1}\right]$$
$$=\sum_{v=0}^{w+1}\left[\binom{n}{v+1}\sum_{i=0}^{v}(-1)^{v-i}\binom{v}{i}(1+id)^{w}(1+id)\right]$$
$$=\sum_{v=0}^{w+1}\left[\binom{n}{v+1}\sum_{i=0}^{v}(-1)^{v-i}\binom{v}{i}(1+id)^{w}\right]$$
$$+\sum_{v=0}^{w+1}\left[\binom{n}{v+1}\sum_{i=0}^{v}(-1)^{v-i}\binom{v}{i}(1+id)^{w}id\right]$$
$$=\binom{n}{w+2}\sum_{i=0}^{w+1}(-1)^{w+1-i}\binom{w+1}{i}(1+id)^{w}$$
$$+\sum_{v=0}^{w}\left[\binom{n}{v+1}\sum_{i=0}^{v}(-1)^{v-i}\binom{v}{i}(1+id)^{w}\right]$$
$$+\sum_{v=0}^{w+1}\left[\binom{n}{v+1}\sum_{i=0}^{v}(-1)^{v-i}\binom{v}{i}(1+id)^{w}id\right]$$
$$\overbrace{=}^{\text{Por 5.3}}\binom{n}{w+2}0+\sum_{v=0}^{w}\left[\binom{n}{v+1}\sum_{i=0}^{v}(-1)^{v-i}\binom{v}{i}(1+id)^{w}\right]$$
$$+\sum_{v=0}^{w+1}\left[\binom{n}{v+1}\sum_{i=0}^{v}(-1)^{v-i}\binom{v}{i}(1+id)^{w}id\right]$$
$$=\sum_{v=0}^{w}\left[\binom{n}{v+1}\sum_{i=0}^{v}(-1)^{v-i}\binom{v}{i}(1+id)^{w}\right]+\sum_{v=0}^{w+1}\left[\binom{n}{v+1}\sum_{i=0}^{v}(-1)^{v-i}\binom{v}{i}(1+id)^{w}id\right]$$

es decir $\sum_{v=0}^{w}\left[\binom{n}{v+1}\sum_{i=0}^{v}(-1)^{v-i}\binom{v}{i}(1+id)^{w}\right]$

$$=\sum_{v=0}^{w+1}\left[\binom{n}{v+1}\sum_{i=0}^{v}(-1)^{v-i}\binom{v}{i}(1+id)^{w+1}\right]-\sum_{v=0}^{w+1}\left[\binom{n}{v+1}\sum_{i=0}^{v}(-1)^{v-i}\binom{v}{i}(1+id)^{w}id\right]\ (\bullet\bullet)$$

Aplicando a $(\bullet)$ y $(\bullet\bullet)$ la propiedad transitiva de la igualdad:

$$\sum_{i=0}^{n-1}(1+id)^{w+1}-\sum_{i=0}^{n-1}(1+id)^{w}id$$

$$=\sum_{v=0}^{w+1}\left[\binom{n}{v+1}\sum_{i=0}^{v}(-1)^{v-i}\binom{v}{i}(1+id)^{w+1}\right]-\sum_{v=0}^{w+1}\left[\binom{n}{v+1}\sum_{i=0}^{v}(-1)^{v-i}\binom{v}{i}(1+id)^{w}id\right]$$

y por tanto

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n-1}(1+id)^{w+1}-\sum_{v=0}^{w+1}\left[\binom{n}{v+1}\sum_{i=0}^{v}(-1)^{v-i}\binom{v}{i}(1+id)^{w+1}\right]\\
&=\sum_{i=0}^{n-1}(1+id)^{w}id-\sum_{v=0}^{w+1}\left[\binom{n}{v+1}\sum_{i=0}^{v}(-1)^{v-i}\binom{v}{i}(1+id)^{w}id\right]\\
&=d\left\{\sum_{i=0}^{n-1}(1+id)^{w}i-\sum_{v=0}^{w+1}\left[\binom{n}{v+1}\sum_{i=0}^{v}(-1)^{v-i}\binom{v}{i}(1+id)^{w}i\right]\right\}\\
&=\frac{d}{w+1}\left\{(w+1)\sum_{i=0}^{n-1}(1+id)^{w}i-(w+1)\sum_{v=0}^{w+1}\left[\binom{n}{v+1}\sum_{i=0}^{v}(-1)^{v-i}\binom{v}{i}(1+id)^{w}i\right]\right\}(\bullet\bullet\bullet)
\end{aligned}$$

Consideramos los desarrollos del minuendo y el sustraendo de ($\bullet\bullet\bullet$) como polinomios de indeterminada $d \in \mathbb{R}$, por lo que excedemos aquí los límites de la matemática discreta. Las funciones que representan son *primitivas* de las derivadas con respecto a "d" cuyos polinomios consignamos en los respectivos minuendo y sustraendo de la siguiente expresión, por lo tanto equivalente a ($\bullet\bullet\bullet$):

$$\frac{d}{w+1}\left\{\left\{\sum_{i=0}^{n-1}(1+id)^{w+1}+c_1\right\}'-\left\{\sum_{v=0}^{w+1}\left[\binom{n}{v+1}\sum_{i=0}^{v}(-1)^{v-i}\binom{v}{i}(1+id)^{w+1}\right]+c_2\right\}'\right\}$$

$$c_1 \in \mathbb{R}, c_2 \in \mathbb{R}$$

Esas derivadas existen porque las funciones polinómicas son continuas y derivables en $\mathbb{R}$.

Considerando que la derivada de una constante es cero y la derivada de una resta es la resta de las derivadas del minuendo y el sustraendo, hemos arribado a:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n-1}(1+id)^{w+1}-\sum_{v=0}^{w+1}\left[\binom{n}{v+1}\sum_{i=0}^{v}(-1)^{v-i}\binom{v}{i}(1+id)^{w+1}\right]\\
&=\frac{d}{w+1}\left[\left\{\sum_{i=0}^{n-1}(1+id)^{w+1}\right\}-\left\{\sum_{v=0}^{w+1}\left[\binom{n}{v+1}\sum_{i=0}^{v}(-1)^{v-i}\binom{v}{i}(1+id)^{w+1}\right]\right\}\right]'
\end{aligned}$$

Para $d=0$, el segundo miembro es cero y, por lo tanto, el minuendo del primer miembro es igual al sustraendo correspondiente, con lo que llegamos a la tesis $^{(1)}$

Para $d \neq 0$, resolveremos la ecuación diferencial $f(d) = \frac{d}{w+1}f(d)'$, modelo representativo de la igualdad anterior, donde $f(d)$ y $f(d)'$ son funciones polinómicas. Su solución singular es $f(d)=0$, lo que nos lleva al cumplimiento de la tesis $^{(2)}$. También soluciona la ecuación diferencial la familia $f(d)=k|d|^{w+1}$, con $k \in \mathbb{R}$ y $k \neq 0$, con lo cual se obtiene una solución para cada valor de $k \neq 0$. Esta familia de soluciones debe descartarse porque no responde al modelo de las funciones polinómicas.
En síntesis, de $^{(1)}$ y $^{(2)}$ concluimos en que:

$$\sum_{i=0}^{n-1}(1+id)^{w+1}=\sum_{v=0}^{w+1}\left[\binom{n}{v+1}\sum_{i=0}^{v}(-1)^{v-i}\binom{v}{i}(1+id)^{w+1}\right] \qquad \checkmark$$

Referencias

[1] Alsina C. (2018). Como quisiéramos demostrar. Adaptación de la conferencia C.Q.D. *Sigma revista de matemáticas = matematika aldizkaria*. 32, 135-146. Recuperado el 21 de abril de 2018, de: https://dialnet.unirioja.es/ejemplar/200047 10

[2] Foncuberta J., Barallobres G. (1996).*Análisis Matemático. Sus aplicaciones. Programa de perfeccionamiento docente.* CONICET, Buenos Aires. 10

[3] Rey Pastor J., Puig Adam P. (1948). *Metodología Matemática.* Ibero-Americana, Buenos Aires. Obra original publicada en Madrid, en 1937. 9