Pineda y Ñañez 2020. Desarrollo histórico-epistemológico de los números irracionales. Revista Sigma, 16 (1). Páginas. 33–49

REVISTA SIGMA
Departamento de Matematicas
Universidad de Nariño

Volumen XVI N°1 (2020), páginas 33–49

Desarrollo histórico-epistemológico de los números irracionales

Diana Carolina Pineda Pérez [1]

Yesika Viviana Ñañez Valdez [2]

Abstract: Some contributions of the historical development of the real numbers with the incorporation of irrational numbers, whose origins dates back to the Ancient Greek and were formalized in the XIX century with Cantor and Dedekind. This article is a phylogenetic study that focuses on identifying through history, how some mathematicians intuited, visualized and formalized the mathematical objects involved in the process of formalizing real numbers.

Keywords. Immeasurable magnitudes – Real numbers – Cuts – Sequences.

Resumen: En este artículo se exponen algunos aportes del desarrollo histórico de los números reales con la incorporación de los números irracionales, raíces que se remontan a la antigüedad griega y se formalizan en en el siglo XIX con Cantor y Dedekind. Este trabajo es un estudio filogénetico que se centra en identificar a través de la historia, cómo, algunos matemáticos, intuyeron, visualizaron y formalizaron los objetos matemáticos involucrados en el proceso de formalización de los números reales.

Palabras Clave. Magnitudes inconmensurables – Números reales –Cortaduras – Sucesiones.

1. Introducción

Este artículo es motivado en el trabajo de grado titulado *intuiciones, visualizaciones y formalizaciones en el desarrollo histórico-epistemológico de los números irracionales* [3][10], cuyo interés radica no sólo en contemplar que la historia de los números irracionales intervenga en las aulas en los procesos de enseñanza y aprendizaje, sino que permita una reflexión

[1]Estudiante de Maestría en Educacion Matemática en la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP)-México. Email: diana.c.pineda@correounivalle.edu.co

[2]Estudiante de la Maestría en Educación de la Universidad del Valle y docente de la misma Universidad en las sedes Cali y Zarzal. Email: yesika.nanez@correounivalle.edu.co

[3]Trabajo de grado dirigido por el Dr. Luis Recalde para la obtención del título de pregrado en Licenciatura en Matemáticas y Física en la Universidad del Valle.

didáctica y epistemológica en los docentes de matemáticas.

En este artículo se adaptan conceptos biológicos como la filogénesis y la ontogénesis a la Historia de los números reales, debido a la analogía existente entre ambos conceptos con la Historia de las Matemáticas. La "filogénesis" se refiere al proceso de evolución de los seres vivos desde su forma primitiva hasta la especie, y es por ello que en este artículo se vincula la filogénesis al desarrollo histórico de los números irracionales, hasta su formalización en los números reales. Por su parte, la "ontogénesis" alude a los procesos que sufren los individuos desde la fecundación hasta su madurez, razón por la cual es considerada desde la perspectiva de esta investigación, como el cambio que ha sufrido el uso del concepto de número irracional al convertirse en objeto matemático.

En este sentido, la ontogenia tiene que ver con el individuo y la filogenia con la especie, se puede decir que los problemas que ha tenido la humanidad para establecer los conceptos son similares a los problemas que tiene el individuo para aprenderlos. Se puede evidenciar una conexión de los conceptos y relaciones fundamentales de la filogénesis y la ontogénesis, con la estructuración y formalización de los números reales y la evolución del concepto del número irracional en los estudiantes. Por tanto, se puede observar un paralelo entre las dificultades de la humanidad y las del individuo, cosa que permite mirar históricamente los problemas que ha tenido la humanidad para acceder a los conceptos y a su vez pueda identificar las dificultades de los individuos para poder aprender.

Así pues, el propósito de este artículo es presentar aspectos en el proceso histórico de la formalización o la filogénesis de los números reales, particularmente en los números irracionales, considerando la intuición, visualización y la formalización de estos números. La primera, puede verse como aquellas ideas que dan pie a considerar que las raíces de estos números están en la antigüedad griega; la segunda se aborda como la formación de imágenes de los números irracionales; y la tercera, en la que la formalización es cimentada desde la estructuración de un corpus teórico de los números reales, desde un conjunto de entes abstractos con operaciones definidas y relaciones mediante las que se comparan y organizan esos entes.

En este sentido, se pretende mostrar que los números irracionales funden sus raíces en la antigüedad griega y se formalizan con la estructuración de un nuevo sistema numérico en el siglo XIX ante la necesidad de una fundamentación del análisis matemático y sobre todo ante la necesidad de formalizar técnicas operativas. De ahí, que la formalización de los números reales se llevó a cabo en un proceso que involucra el paso de los números naturales a los enteros, de los enteros a los racionales, y de estos últimos a los números irracionales.

Las primeras intuiciones de la aparición de los números irracionales se pueden localizar en la escuela pitagórica[4] con las magnitudes conmensurables e inconmensurables y su proceso para medirlas; con la idea de cantidad de Aristóteles (384 a.C - 322 a.C.), un filósofo, lógico y científico de la Antigua Grecia, y con las nociones de razón y proporción desarrolladas por Euclides (330 a.C. - 275 a.C.), un matemático y geómetra griego, en *los Elementos* (300 a.C)[6].

[4]Escuela pitagórica: grupo fundado por Pitágoras en el siglo VI a.C. y conformado por astrólogos, músicos, matemáticos y filósofos.

Pasar desde una percepción intuitiva a la visualización de los números irracionales involucró cuatro movimientos epistemológicos importantes: la emergencia de las magnitudes inconmensurables, la solución de ecuaciones, el surgimiento de la representación decimal y la representación de fracciones continuas. En este sentido, el primer movimiento se vincula a una de las visualizaciones de los números irracionales; desde la solución de ecuaciones inicialmente estos números no eran concebidos como números, pero los hindúes consideraban a las raíces cuadradas inexactas como cantidades.

A partir de la representación decimal [5] , Stevin (1548-1620) empieza a desarrollar una teoría apropiada para operar resultados de cuantificación, lo cual ayudó a intuir que los números irracionales tenían las mismas propiedades operacionales que las fracciones y, por ende, era posible "considerarlos como números con una parte entera" (Dhombres, 1978; citado en Gómez, 1999, p. 02) [7]. Históricamente, Stevin (1548-1620) introdujo una manera de operar los irracionales a través de la representación decimal, a sabiendas que los resultados corresponden sólo a estimaciones.

Con la geometría analítica de Descartes (1596-1650) identificada en 1637 en su obra *La Geometría* compuesta de tres libros, asociados a figuras planas y sólidas, se da un doble movimiento en la visualización histórica de los números reales que culmina con la representación de éstos en la recta numérica. Aunque Descartes no determina, de manera explícita, la relación entre puntos de la recta y números, establece relaciones entre cantidades, segmentos y soluciones de ecuaciones que desembocarán en la recta numérica y por ende, en el plano cartesiano.

Posteriormente, matemáticos modernos como Pascal (1623-1662) y Barrow (1630-1677) no consideraban los irracionales como números en la solución de ecuaciones, sino más bien como magnitudes geométricas.

A comienzos del siglo XIX las matemáticas seguían relacionadas con las cantidades, por ende, la noción de número aún estaba ligada a la medida de magnitudes, lo que generaría la interpretación de las matemáticas como ciencia de las cantidades. Así pues, estudios históricos en el desarrollo de los números reales han evidenciado que ante el descubrimiento de los números irracionales se generaron ciertos límites en la aceptación de estos como números, pues en ese momento no se tenían sustentos formales que los respaldaran. Por tal razón, fue necesaria la formalización de los números reales para aportar a las bases del Análisis, lo que se convirtió en objeto de estudio durante el siglo XIX para Cantor (1845-1918) y Dedekind (1831-1916), quienes lograron reconocer a estos números en un sistema numérico a partir de un proceso riguroso, involucrando las sucesiones de Cantor y las cortaduras por parte de Dedekind en el siglo XIX.

[5] "Como la unidad se concebía como un objeto reducido imposible de fraccionarse indefinidamente, para estudiar a las fracciones, Stevin se vio en la necesidad de empezar por dotar al uno de los números con las propiedades que le permitieran considerarlo como un número; para esto empieza adoptando su divisibilidad infinita, propiedad que era atribuida a las magnitudes. La división del uno favoreció la aritmética de las fracciones y permitió la introducción de la notación decimal"[10].

2. Los números irracionales como una intuición en el proceso de formalización de los números reales

Históricamente se ha considerado que una de las nociones fundamentales de las matemáticas corresponde al conjunto de los números reales conformado por los números racionales e irracionales. Las ideas primigenias que dan lugar en el siglo XIX, a los números reales se pueden localizar en la antigüedad griega. Aunque no existía una conciencia de racionalidad o irracionalidad, si se puede hablar de la existencia de un conjunto de *intuiciones*, que posteriormente se empiezan a *visualizar* y luego exigen su *formalización*. Estas *intuiciones* primigenias corresponden a las magnitudes conmensurables e inconmensurables y a las nociones de razón y proporción, desarrolladas por Euclides en los *Elementos*.

2.1. Magnitudes conmensurables e inconmensurables.

Para los pitagóricos las concepciones de número y magnitud, en la antigüedad griega tuvieron cambios fundamentales, tanto así que intuyeron la idea de que el número era la cosa y la cosa el número [6], relación que era indisoluble, y les llevó a establecer una correspondencia entre lo aritmético y lo geométrico. De esta manera, con la concepción de magnitud en la escuela pitagórica se empezaron a comparar magnitudes entre sí. La comparación de las magnitudes la concebían cuantitativamente finita, así que, todo par de magnitudes las consideraban conmensurables. No obstante, se cree que Hípaso de Metaponto (siglo VI a.C. – siglo V a.C.), miembro de la escuela pitagórica encontró la existencia de magnitudes no conmensurables, a las que se les denominan magnitudes inconmensurables.

Para los antiguos medir es comparar y el proceso mediante el cual se comparan dos magnitudes se denomina *antiphaisresis*, que consiste en hacer restas sucesivas hasta encontrar una magnitud que mida a las dos dadas. De ahí que, dadas dos magnitudes una magnitud mide a otra cuando la primera cabe un número natural de veces en la segunda. En términos modernos: *Un segmento (magnitud) A mide a otro segmento B, si se tiene que $B = nA$, para algún número $n \in \mathbb{N}$.*

Si para dos magnitudes A y B esto no ocurre, se busca una magnitud C que las mida a las dos; es decir que $A = nC$ y $B = mC$, donde $n, m \in \mathbb{N}$ y son el número de veces que C está en A y B respectivamente. En términos modernos: *Dos segmentos (magnitudes) A y B son conmensurables, si existen números n y m tales que $nA = mB$*

Esta última expresión también se puede ver como $A = \frac{m}{n}B$, sin embargo, en la antigüedad griega no tenía significado hablar de la expresión $\frac{m}{n}$, pero cobra sentido con la incorporación de los números racionales.

La inconmensurabilidad está asociada a la imposibilidad de medir con precisión numérica, es decir, se puede comprender como la imposibilidad de encontrar una magnitud que divida a otras dos dadas en partes exactas. Así pues, para determinar cuándo dos magnitudes son conmensurables, se tiene en cuenta que para dos magnitudes AB y CD (CD menor que AB) se pueden presentar dos casos: que CD cabe un número preciso de veces (k_1) en AB, lo cual indica que son magnitudes conmensurables, por ende, $AB = k_1CD$ donde $k_1 \in \mathbb{N}$ o

[6] La escuela pitagórica intuyó al número como el principio de todas las cosas.

que, CD cabe k_1 veces en AB y sobra $A_1B_1(A_1B_1 < CD)$ (figura 1) y que:

$$AB = k_1CD + A_1B_1(*)$$

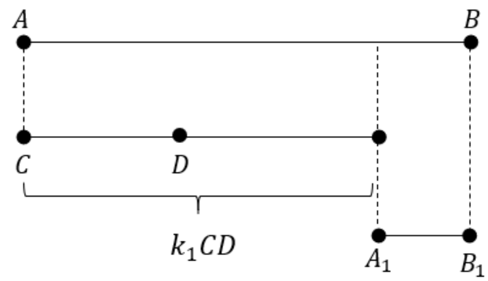

Figura 1: Comparación entre magnitudes

Comparando A_1B_1 con CD también se pueden obtener dos casos: que A_1B_1 cabe un número exacto de veces (k_2) en CD; es decir, $CD = k_2A_1B_1$. Por tanto, AB y CD son conmensurables y A_1B_1 es el mayor segmento que los mide. Así reemplazando en $(*)$ se obtiene que $AB = (k_1k_2 + 1)A_1B_1$ o A_1B_1 cabe k_2 veces en CD y sobra A_2B_2 con $(A_2B_2 < A_1B_1)$ (figura 2), por tanto,

$$CD = k_2A_1B_1 + A_2B_2.$$

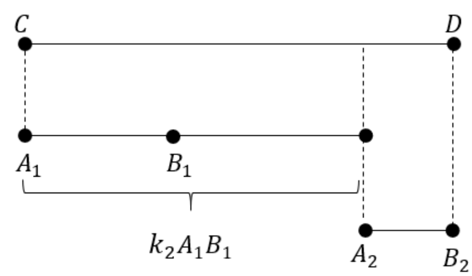

Figura 2: Comparación entre magnitudes

De manera sucesiva, en el proceso de comparación, se toma como referencia la magnitud sobrante $(A_{n-1}B_{n-1})$ y la menor de las magnitudes comparadas $(A_{n-2}B_{n-2})$. Así pues, de continuar el proceso, en el n-ésimo procedimiento se podrían tener dos casos: el primero, que las magnitudes sean conmensurables, es decir, $A_{n-2}B_{n-2} = k_nA_{n-1}B_{n-1}$, entonces $A_{n-1}B_{n-1}$ es el mayor segmento que mide a AB y CD; el segundo, donde el procedimiento de comparación se extiende infinitamente, es decir,$A_{n-2}B_{n-2} = k_nA_{n-1}B_{n-1} + A_nB_n$ y que no existe una magnitud que mida a AB y CD, y por tanto, las magnitudes sean inconmensurables.

2.2. Teoría de razones y proporciones.

Euclides no define ni la multiplicación ni la división entre magnitudes homogéneas, sin embargo, como su objetivo era establecer una teoría cuantitativa de estas magnitudes y dado que no todas eran conmensurables, introdujo los conceptos de razón y proporción en el libro

V de los *Elementos* [7], los cuales se detallan a continuación.

Definición V.3[8] **:** Una razón es determinada relación con respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas.

Definición V.4[9] **:** Se dice que guardan razón entre sí las magnitudes que, al multiplicarse, pueden exceder una a otra

Definición V.5 [10]**:** Se dice que una primera magnitud guarda la misma razón con la segunda que una tercera con una cuarta, cuando cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera excedan a la par, que cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, respectivamente y tomados en el orden correspondiente.

Actualmente, a la **definición V.4** se le conoce como la *propiedad arquimediana* y la **V.5** da cabida a la *propiedad de tricotomía* para magnitudes, tal que, dadas dos magnitudes A y B se tiene: $A = B$, $A < B$ o $A > B$.

Es conveniente señalar que las razones constituyen las primeras visualizaciones de los números reales. Por su parte, Euclides considera en el libro VII de los *Elementos*, que la unidad no puede ser tomada como un número, pues carece de pluralidad; ya que expone a la unidad como "aquello en virtud de lo cual cada una de las cosas que hay, es llamada una", y al número como "la pluralidad compuesta de unidades". Además, la unidad aparte de ser indivisible, es la generadora de los números, mientras que las magnitudes no poseen una magnitud generadora.

En *Elementos*, Euclides expone un algoritmo para encontrar el Máximo Común Divisor (MCD) entre dos números, lo que a su vez permitirá encontrar fracciones continuas para los racionales. Para la implementación del algoritmo, establece las siguientes proposiciones:

Proposición 1 [11] **:** Dados dos números desiguales y restándose sucesivamente el menor del mayor, si el que queda separado no mide nunca al anterior hasta que quede una unidad, los números iniciales serán primos entre sí.

[7] Las definiciones y proposiciones que se presentan en el artículo fueron tomadas de la Traducción realizada por M. Puertas (1991). Editorial Gredos. Madrid.

[8] Significa que dadas dos magnitudes A y B, respectivamente, la razón se representa como $A : B$, AB o $\frac{A}{B}$.

[9] Indica que dadas dos magnitudes A y B, estas tienen razón si existe un número entero n tal que: $A < nB$.

[10] Señala que dadas A, B, C y D magnitudes; se dice que la razón de A con B es igual a la razón de C con D, si al tomar cualquier múltiplo de A y C, y de B y D, el múltiplo de A es mayor, igual o menor que B, con el múltiplo de C mayor, igual o menor que D.

[11] Se refiere a la Proposición VII. 1 del libro de los *Elementos* interpretado como dos números a y b, con $a > b$, y sucesivamente se resta b de a, es decir el menor del mayor; si el número que se obtiene no mide nunca al anterior hasta obtener la unidad, entonces a y b serán primos entre sí.

Proposición 2 [12]**:** Dados dos números no primos entre sí, hallar su medida común máxima

3. Algunas visualizaciones de los números irracionales en el proceso de formalización de los números reales

Estudios histórico-epistemológicos de las matemáticas permiten identificar que los números irracionales fueron visualizados a través de las magnitudes inconmensurables. Posteriormente, con el desarrollo de la teoría de ecuaciones se puede visualizar algunos números irracionales como solución de ciertas ecuaciones. Más adelante, los estudios en fracciones continuas permiten ver que estas fracciones con la característica de ser infinitas también permiten visualizar a los números irracionales.

3.1. Números irracionales desde las magnitudes inconmensurables.

El estudio de las magnitudes en el contexto de las figuras geométricas en los pitagóricos generó una limitación; ya que al comparar magnitudes como la diagonal del cuadrado con su lado y el lado de un pentágono regular con su diagonal, encontraron que no eran conmensurables.
Por ejemplo, para probar la inconmensurabilidad de las diagonales del pentágono regular con sus lados, se opta por tomar un pentágono regular $ABCDE$ cuyas diagonales DB, DA, CA, CE y EB con puntos de intersección A_1, B_1, C_1, D_1 y E_1 como se muestra en la figura 3 [13]:

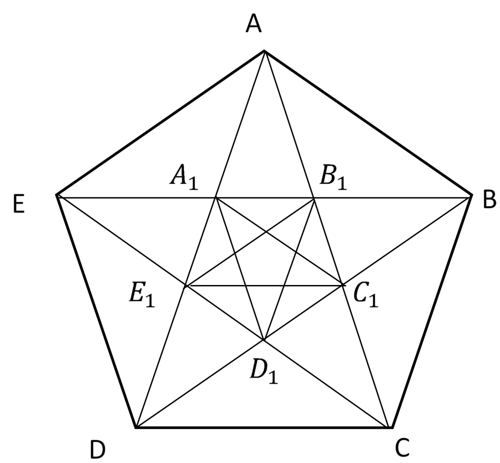

Figura 3: Pentágono regular

Dado que $DEAC_1$ es un paralelogramo, $EA = DC_1$; como $DB = DC_1 + C_1B$, entonces: $DB = EA + C_1B$ (EA Cabe una vez en DB y sobra C_1B).

Al comparar las magnitudes que componen a DB con el lado $DC_1 = EA$ y debido a que $DD_1 = C_1B$, se tiene: $DC_1 = C_1B + D_1C_1$ (C_1B Cabe una vez en DC_1 y sobra D_1C_1).

[12]Es la Proposición VII. 2 del libro de los *Elementos* que puede interpretarse como dos números a y b no primos entre sí, hallar el máximo número en común que divide a ambos.
[13]Figura realizada considerando la construcción del pentágono realizado en [13]

Siguiendo este proceso, se debe determinar el número de veces que: D_1C_1 está en DD_1. Como $DE_1B_1D_1$ forman un paralelogramo, entonces, lo anterior es equivalente a encontrar el número de veces que: D_1C_1 está en E_1B_1 y por tanto, $DD_1 = E_1B_1$.

Así pues, se debe medir la diagonal E_1B_1 del pentágono formado por $A_1B_1C_1D_1E_1$ con su lado D_1C_1; encaminando al problema inicial de medir la diagonal del pentágono con uno de sus lados. Esto se torna en un proceso infinito, lo que permitiría concluir que las diagonales del pentágono con su lado son inconmensurables.

3.2. Números irracionales desde la teoría de ecuaciones.

La historia del álgebra, tal como lo menciona Puig (1998)[11], muestra que su desarrollo fue en un proceso lento a través del descubrimiento de técnicas, fórmulas para resolver ecuaciones y el hallazgo de un lenguaje que las involucra, ya que, para el análisis de las ecuaciones fue necesario la incorporación de notaciones, simbolizaciones, el estudio de operaciones abstractas y una teoría de números o cantidades.

Diofanto (200/214 d. C-284/298 d. C), un matemático griego cuyos aportes se visualizan especialmente en el álgebra sincopada, y en su obra *Aritmética*[14] , define un tratamiento simbólico a las cantidades numéricas, combinado con el lenguaje natural; realizó operaciones entre fracciones y entre fracciones y números, tratamiento que le permitió incorporar lo que se conoce actualmente como la ley de los signos. Además, estableció la propiedad de que al multiplicar un número por una fracción cuyo denominador sea ese mismo número se obtiene la unidad. Las soluciones de las ecuaciones corresponden, para Diofanto, a nuestros números racionales positivos. En consecuencia, al encontrar una ecuación cuya raíz era inexacta, la rechazaba.

Con los Hindúes, a partir del siglo III a. C., se empiezan a conocer símbolos numéricos para representar a los números, como es el caso de simbolizar a los números naturales del 1 al 9, sin una notación posicional y ningún signo para el cero. Sin embargo, el cero adquiere el carácter de número en siglos posteriores. Algunas de las contribuciones de los hindúes se recopilan en la obra *Brahmasphuta siddhanta*, publicada en 628 d. C., donde se visualiza la aceptación de raíces negativas y algunas raíces inexactas para la solución de ecuaciones, a las cuales se les asignaron propiedades algebraicas de números naturales. Permitiendo visualizar algunas operaciones entre ellas para casos particulares, como es el caso de la suma de dos raíces inexactas especiales que desde una visión moderna se representaban de la forma: $\sqrt{m} + \sqrt{n} = \sqrt{(m+n) + 2\sqrt{(mn)}}$. Con m y n números enteros positivos; tal que su producto tenga raíz cuadrada exacta. Un ejemplo de esto es la suma de dos raíces inexactas $\sqrt{2}$ y $\sqrt{72}$. Tal que, $\sqrt{2} + \sqrt{72} = \sqrt{98}$ [10].

Posteriormente, Al-Khowarizmi (780 d. C. - 850 d. C.) conocido como el verdadero padre del álgebra, estableció el sistema Indo-Arábigo[15] de numeración con el símbolo 0, la notación posicional y los numerales de base 10, importante en el sentido que permitió incorporar algoritmos para establecer representaciones decimales. Ahora bien, al visualizar los números a partir de estas cifras decimales aparece la visualización de las raíces exactas e inexactas, con

[14] Este libro fue publicado en 1575 y consta de 13 libros, de los cuales sólo se conocen los seis primeros.

[15] El sistema de representación indo-arábigo hace alusión al sistema de numeración en base 10. Para ampliar información diríjase a Puig (2011).

tantos decimales como se quiera. Por otro lado, incorporó algunos algoritmos de resolución de ecuaciones para el desarrollo del álgebra; aunque sólo admite soluciones positivas.

Dada la existencia del algoritmo por solucionar ecuaciones cuadráticas, Cardano (1501-1576), un médico, matemático, astrólogo, y estudioso del azar, se centró en la determinación del método de solución de ecuaciones de tercer grado[16] . En este sentido, rechaza las soluciones negativas de las ecuaciones y las raíces no exactas, razón por la cual considera a las soluciones negativas de las ecuaciones como ficticias, mientras que las positivas, raíces reales. No tenía problema en trabajar con ellas y racionalizar raíces cúbicas, pues algunos matemáticos de esa época sí aceptaban algunas raíces inexactas en las operaciones, tal como es el caso de Michel Stifel (1487-1567), un matemático alemán que visualizaba como números irracionales a las raíces de la forma: $\sqrt[m]{a+\sqrt[n]{b}}$.

Stifel intuyó en su obra *Arithmetica Integra* (1544) que algunos números irracionales eran soluciones de ecuaciones, y éstos eran obligados a ser considerados como *"verdaderos números"*, pues, cuando *"fallan los números racionales toman su lugar los irracionales"*. Sin embargo, tenía en cuenta que no eran números en absoluto, puesto que no podían someterse a numeración, del mismo modo que pertenecían a una *"nube de infinitud"*, tal como los números infinitos que no eran aceptados como números; pues concebía que *"nada de tal naturaleza carente de precisión puede llamarse número"*.

De ahí que, con Stevin (1548-1620)[15], se visualiza una noción de número que va más allá que la concepción euclidiana, pues adopta al número como un medio para explicar la cantidad. Como la unidad se concebía como un objeto reducido imposible de fraccionarse indefinidamente, para estudiar a las fracciones, Stevin se vió en la necesidad de empezar por dotar al *uno de los números* con las propiedades que le permitieran considerarlo como un número; para esto empieza adoptando su divisibilidad infinita, propiedad que era atribuida a las magnitudes.

En este sentido, la división del uno no sólo favoreció la aritmética de las fracciones, sino también, permitió la introducción de la notación decimal y concretar la aplicación de la siguiente proposición:

Proposición 3 [17]: Si cuatro números son proporcionales, el producto del primero y el cuarto será igual al del segundo y el tercero; y si el producto del primero y el cuarto es igual al producto del segundo y el tercero, los cuatro números serán proporcionales.

Con la posibilidad de resolver algunos problemas geométricos con los métodos y resultados del álgebra, se establece un puente entre la geometría y la aritmética gracias a René Descartes, quien considera que la medida de todos los segmentos respecto a un segmento

[16]Siguiendo los trabajos de los árabes, Leonardo de Pisa o Fibonacci (1170 - 1240) y Luca Pacioli (1445 - 1517); con la ayuda de Luis Ferrari (1522-1565), su discípulo, y Nicolás Tartaglia completa el método de solución y lo publica en el libro *Ars Magna* (publicado en 1545 con importantes aportes a las matemáticas que consta de veinte capítulos).

[17]Asociada a la Proposición VII. 19 del libro de los Elementos esquematizada en que el producto de medios es igual al producto de extremos [13]

de referencia que se tomará como la unidad y extiende las operaciones aritméticas a los segmentos recurriendo al teorema de Tales[18] .

El tratamiento de problemas geométricos a través de ecuaciones le permite resolver a Descartes el problema de la representación de la raíz cúbica ($\sqrt[3]{a}$, $a \in \mathbb{N}$) y resolver el problema de la trisección del ángulo[19] . De ahí que, algunas raíces empiezan a tener un estatus numérico.

Por otra parte, Newton (1642 - 1727) fundamentado en la noción de número de Stevin vio necesaria la aceptación de dos cantidades, unas positivas y otras negativas. Las primeras fueron "acogidas" por la comunidad matemática sin complicaciones, caso contrario a las segundas, ya que no se podían asociar con la experiencia de medir o contar.

Con Recalde y Vargas (2013)[14] se puede identificar que Newton designa algunas propiedades aritméticas como medio de combinación entre los números, dado que eran como símbolos que designaban razones entre magnitudes, y con ellos pudo intuir al número como la razón entre cantidades, lo que permitió visualizar a los números irracionales de ésta misma manera, puesto que en esa época ya se aceptaba la existencia de esos números. Esto le facilitó definir la multiplicación para números enteros, fraccionarios o irracionales en sentido de proporcionalidad, y a su vez, esto posibilitó la primera aproximación a tratar de establecer un cuerpo de los números reales; cabe resaltar que Newton no concebía una estructura algebraica para estos números.

Más adelante, según [2], Wallis (1616-1703), un matemático inglés, acepta a los irracionales como números de manera estricta; mientras que Weierstrass (1815-1897), un matemático alemán, obtiene un modelo de números racionales positivos y de enteros negativos con pares ordenados de los números naturales [13], lo que le permite intuir que los números reales se debían definir necesariamente con los números racionales a partir de las intuiciones geométricas.

3.3. Números irracionales desde las fracciones continuas.

Con Euclides se pueden visualizar los primeros antecedentes de las fracciones continuas. Desde la teoría de números expuesta en los libros VII, VIII y XIX de su obra *Elementos* [6] se visualiza una fracción continua de la siguiente manera:

Dados a y b dos números enteros positivos con $a > b$, existe un número entero positivo k_0 y $r_0 < b$ tal que,

$$a = k_0 b + r_0 \tag{1}$$

De la misma manera, existe un número entero positivo k_1 y $r_1 < r_0$ que cumple:

$$b = k_1 r_0 + r_1 \tag{2}$$

Igualmente, existe un número entero positivo k_2 y $r_2 < r_1$ tal que:

[18] Demostrado por Euclides en el libro VI de *los Elementos*[6]

[19] Trisección del ángulo: Uno de los problemas clásicos de la geometría griega que consiste en construir un ángulo que mida un tercio de la medida de otro ángulo dado, que no se puede realizar con regla y compás.

$$r_0 = k_2 r_1 + r_2 \tag{3}$$

Extendiendo el proceso, se puede notar:

$$r_n = k_{n+2} r_{n+1} + r_{n+2}; \qquad n = 0, 1, 2, ... \tag{4}$$

Cuando $r_i = 0$, de (1) se obtiene,

$$\frac{a}{b} = k_0 + \frac{1}{\frac{b}{r_0}} \tag{5}$$

y reemplazando (2) en (5):

$$\frac{a}{b} = k_0 + \frac{1}{k_1 + \frac{1}{\frac{r_0}{r_1}}} \tag{6}$$

Sustituyendo (3) en (6)

$$\frac{a}{b} = k_0 + \frac{1}{k_1 + \frac{1}{k_2 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}}} \tag{7}$$

En el proceso con $r_i = 0$

$$\frac{a}{b} = k_0 + \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \cfrac{1}{\ddots \cfrac{}{k_{n-1} + \cfrac{1}{k_n}}}}}$$

Esto último sustenta la visualización de los racionales como fracciones continuas finitas.

Desde una perspectiva algebraica se evidencia cómo Diofanto empleaba a las fracciones en diversos problemas, por ejemplo en el planteamiento de dividir un número que fuese la suma de dos cuadrados, en otros dos cuadrados; desde luego, en la búsqueda de la solución de estas ecuaciones Diofánticas se generó el uso de métodos similares al de las fracciones continuas, ya que, dada la ecuación $ax + by = c$, donde a y b son enteros primos relativos y adicional $a < b$. Su solución radica en el empleo de fracciones continuas, de la manera:

$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{1}{q_1 l} + \frac{1}{q_2 l} + \cdots + \frac{1}{q_n} \qquad y \qquad \frac{p}{q} = q_0 + \frac{1}{q_1 l} + \frac{1}{q_2 l} + \cdots + \frac{1}{q_{n-1}}$$

Por otro lado, Tartaglia (1499-1557), Cardano y Bombelli (1526-1572) en el siglo XVI realizaron estudios exploratorios o formulativos en las fracciones, lo que lleva a desprenderse de la concepción del número como la colección de unidades. Con el tratamiento de los algoritmos establecidos para las fracciones y los radicales se establece un aspecto fundamental, en el sentido de que existe una diferencia entre expresiones decimales infinitas para los radicales y expresiones decimales finitas o periódicas para las fracciones.

En este sentido, Bombelli proporciona un algoritmo para extraer raíces cuadradas mediante fracciones continuas, particularmente lo realiza con la raíz cuadrada de trece. Tal que,

$$\sqrt{13} = 3 + \frac{4l}{l6} + \frac{4l}{l6} + \cdots$$

Desde una visión moderna, con $\sqrt{A}$, siendo a la raíz exacta del número menor a A y r su diferencia, entonces:

$$\sqrt{A} = a + \cfrac{r}{2a + \frac{r}{\sqrt{A}+a}} \quad \sqrt{A} \quad \textit{exacta} \qquad y \qquad \sqrt{A} = a + \cfrac{r}{2a + \cfrac{r}{2a+\cfrac{r}{2a+\ddots}}} \quad \sqrt{A} \quad \textit{inexacta}$$

Con Pietro Cataldi (1548-1626), un matemático italiano, se da un descubrimiento real de la teoría de fracciones continuas, dando su notación y algunas de sus propiedades, obteniendo una aproximación de la raíz cuadrada de 18 de la siguiente manera:

$$\sqrt{18} = 4 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{8+\cfrac{2}{8+\ddots}}}$$

Modernamente, en términos generales con $\sqrt{A} = \sqrt{a^2 + r}$ y por aproximaciones por exceso y por defecto:

$$\sqrt{A} = a + \cfrac{r}{2a + \cfrac{r}{2a+\cfrac{r}{2a+\ddots}}}$$

Wallis visualizó el producto infinito de $4/\pi$ para establecer una teoría general para algunas familias de cuadraturas, pues resolvió el problema de la cuadratura del círculo en su obra *La Aritmética de los Infinitesimales* publicada en 1656. Sin embargo, Lor William Brouncker (1620-1684), un matemático y lingüista, interviene en esta representación para reducirla e instaurar una visualización de la misma a través de la siguiente fracción continua sin exponer una explicación.

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3*3*5*5*7*7*9...}{2*4*4*6*6*8**8...} \quad (Wallis) \qquad y \qquad \frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\ddots}}} \quad (Brouncker)$$

Por otra parte, en el siglo XVIII, Euler (1707-1783), uno de los principales matemáticos y físicos suizos, realizó importantes estudios de las fracciones continuas. Esto le permitió intuir los siguientes tres aspectos fundamentales y, posteriormente, producir una teoría sistemática de estas fracciones:

1. Los números racionales pueden ser aproximados mediante fracciones continuas finitas.

2. Los números irracionales se pueden aproximar a través de fracciones continuas infinitas.

3. Una fracción continua periódica es el cero de una ecuación cuadrática.

Euler demostró el primero y, a su vez, que las fracciones continuas finitas pueden representar números racionales; además demostró que un número irracional puede ser expresado mediante una fracción continua infinita, pero no pudo demostrar viceversa, es decir, que cualquier fracción continua infinita representaba a un número irracional. En este sentido, diferencia las fracciones continuas finitas (∗) de las infinitas (∗∗), pues las representó de la siguiente manera:

$$(*) \quad a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots \cfrac{}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}} \qquad (**) \quad a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots \cfrac{}{a_{i-1} + \cfrac{1}{a_i + \ddots}}}}}}$$

4. Formalización de los números reales con la incorporación de los números irracionales

La formalización de los números reales se dio a partir del estudio de las propiedades aritméticas y de orden, que Dedekind emplea para las cortaduras o subconjuntos de los números racionales, y las que Cantor establece para las sucesiones fundamentales.

Por un lado, Dedekind visualizaba la aritmética como una consecuencia del acto de contar, este es el acto aritmético más sencillo que consiste en la creación sucesiva de la serie infinita de números enteros positivos, donde cada número generado genera a su sucesor. Así pues, la cadena de estos números permite establecer las leyes de la aritmética con la fundamentación de las cuatro operaciones básicas (adición, multiplicación, sustracción y división).

Dedekind intuye que los números racionales son la materia prima de los números reales, pues pueden aproximarse de forma rigurosa a través de los números naturales. Esto lo lleva más adelante a plasmar en su libro *¿Qué son y para qué sirven los números?*[20] en 1988[4], la diferencia entre las magnitudes geométricas continuas y los números racionales. Esto es, a su vez, la fuente para introducir la noción de cortadura.

En el proceso de formalizar los números reales, Dedekind se preocupó por establecer una herramienta conceptual que diera pautas para definir los números irracionales. Partió de las propiedades de los números racionales, tales que para a, b y c números racionales ($\mathbb{Q}$) distintos, por lo tanto se cumple: **(i)** si $a > b$ y $b > c$; entonces $a > c$; **(ii)** existen infinitos números entre a y c; y, **(iii)** si a genera una división de $\mathbb{Q}$ en dos clases A_1 y A_2; donde A_1 contiene todos los números racionales a_1 menores que a, mientras que A_2 está dada por los números racionales a_2 mayores que a.

Se puede notar a partir de la propiedad i, que las clases generadas por a, contiene infinitos números; de igual manera, la propiedad iii, puede ser representada como:

$$A_1 = \{a_1 \in \mathbb{Q} | a_1 < a\} \quad y \quad A_2 = \{a_2 \in \mathbb{Q} | a < a_2\}$$

Dedekind después de analizar las propiedades de los números racionales intuyó que se pueden cumplir las siguientes propiedades, teniendo en cuenta la ubicación de los puntos sobre la recta (L), ya sea que estén a la izquierda o la derecha de un punto referencial (dados dos puntos diferentes p y q sobre una recta con $p > q$, se dice que p está a la derecha de q).

[20]Primera edición publicada en 1888.

Dados p, q y r puntos diferentes sobre la recta, entonces: **(I)** p está a la derecha de q y q a la derecha de r, entonces p está a la derecha de r. En este caso, se puede interpretar que q está entre r y p; **(II)** existen infinitos puntos entre p y q; y, **(III)** p divide a la recta en dos clases P_1 y P_2; donde todos los puntos de P_1 están a la izquierda de cada punto de P_2.

Comparando entonces, el dominio de los números racionales con el dominio de los puntos sobre la recta, Dedekind intuyó que en los primeros existen saltos de un número racional a otro mientras que la recta goza de completitud. Así pues, la recta es un ejemplo de lo que se puede determinar como el continuo, ya que ésta es un conglomerado de puntos bien distribuidos infinitamente. Por ende, se ve en la necesidad de visualizar en qué se fundamenta la continuidad.

Así, su idea radica en la noción de cortadura en la recta y la establece como: Si todos los puntos de la recta se descomponen en dos clases tales que todo punto de la primera clase está a la izquierda de cada punto de la segunda clase, entonces existe un y solo un punto que produce esta partición de todos los puntos en dos clases, este corta a la recta en dos partes [4].

De ahí, Dedekind intuyó que dado que la recta está conformada por infinitos puntos, algunos correspondían a los números racionales y los sobrantes a los números irracionales, y que al unirlos formarían un nuevo conjunto aritmético denominado los números reales ($\mathbb{R}$). Esto le permitió intuir que, para poder alcanzar una definición de los números irracionales, su aritmética debía estar alejada de rudimentos geométricos, y que su misma definición debía posibilitar cálculos entre ellos mismos y los racionales.

Todo esto fue lo que impulsó a Dedekind a construir una teoría formal de cortaduras que diera cuenta de la existencia de los números irracionales, y a través de las propiedades de los números racionales ($\mathbb{Q}$), un par de subconjuntos (A_1, A_2) que satisfaciera las siguientes propiedades:

$$\textbf{I.}\quad A_1 \cup A_2 = Q \qquad\quad \textbf{II.}\quad a_1 < a_2; \quad \forall \quad a_1 \in A_1 \quad y \quad a_2 \in A_1$$

Así pues, para ello Dedekind pudo demostrar que existían cortaduras producidas por números no racionales y contempló la existencia del número $\sqrt{D}$ como un nuevo número cuya propiedad es ser tanto el máximo como el mínimo de un par (A_1, A_2) respectivamente. Por lo tanto, afirma formalmente que **"el conjunto de todas las cortaduras $\mathbb{Q}$ generadas equivale al conjunto de los números reales"**.

Por su parte, Cantor intuyó que los números racionales contribuirían a la definición de los números irracionales, además, consideró que, evitando el error lógico de presuponer la existencia de los números irracionales, se podrían establecer a estos, con *"la misma precisión, distinción y claridad que los números racionales"*. Así, pudo intuir que se debía tener bien definido el conjunto de los números racionales y el concepto de infinito. Cabe resaltar que visualizó la correspondencia entre las sucesiones fundamentales, de modo que si una sucesión $\{a_n\}$ está relacionada con un límite b, y otra sucesión $\{b_n\}$ es igual a la sucesión $\{a_n\}$, entonces, b es también el límite de $\{b_n\}$[13].

Cantor visualizó a este nuevo conjunto como un "sistema B", que podría lograr la categoría de un sistema numérico si éste adquiría una estructura de cuerpo ordenado. Al considerar esto, formalizó que este sistema componía el conjunto de los números reales, puesto que visualizaba que cada uno de los elementos de B estaban en correspondencia con cada punto de la recta.

En este sentido, los números racionales se relacionan a uno y solo un punto de la recta numérica, sin embargo, inicialmente los números irracionales no tienen relación con los puntos de la recta, pero son aproximados lo que más se pueda mediante una sucesión de puntos racionales. De esta manera, Cantor manifestó que, dada una sucesión fundamental que se aproximaba a un punto, entonces "la distancia del punto al ser determinado al origen, es igual a b, donde b es el número correspondiente a la sucesión $\{a_n\}$". Por tanto, visualizó que a cada punto de la recta le corresponde un único punto en B, es decir, que la unicidad de los puntos en B se satisfacía, sin embargo, no podía garantizar la unicidad a la inversa (cada elemento de B le correspondiera un único punto de la recta). Como resultado, vio la necesidad de introducir el siguiente axioma: *"A cada número le corresponde un punto en la recta, con coordenada igual al número*[21]*"* .

Así pues, para construir la definición de números irracionales, primero debía determinar lo que era una sucesión fundamental e igualdad entre sucesiones. Por consiguiente, una sucesión infinita $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ de número racionales, es *fundamental* si se cumple que: para cualquier número racional arbitrario ($\varepsilon \in \mathbb{Q}$), existe un número entero ($N \in \mathbb{Z}$) de tal manera que para todo m y n se cumple: $|a_{n+m} - a_n| < \varepsilon$ con $n > N$[22] .

Y dos sucesiones fundamentales $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ a cuyos límites se les asocia a_1 y a_2 respectivamente, se establece que $a_1 = a_2$ sí para todo $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$), existe un número natural N , que permite: $|a_n - b_n| < \varepsilon$ para todo $n > N$.

5. Comentarios Finales

Existen numerosos estudios en los desarrollos históricos de los números reales, sin embargo, el interés de esta investigación se centró en establecer una relación entre historia y educación matemática para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje, pues si se habla de la relación existente entre el desarrollo de los conceptos matemáticos y su evolución, se hace referencia a la observación de las dificultades y obstáculos que aparecieron en la historia. Por ende, se plantea la idea de que este artículo sea una herramienta teórica para los educadores, en la manera que les brinde elementos para establecer situaciones didácticas y adidácticas en el aula, ya que el profesor de matemáticas puede, a través de la historia poder llevar al aula problemas históricos y actividades para fomentar discusiones, o bien, que integre la historia en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

[21] En vista de que se considera que la distancia del punto (el que se quiere aproximar mediante sucesiones) al origen es igual a el número correspondiente al límite de dicha sucesión.

[22] Corresponde a la misma noción de sucesión de Cauchy. Profundizar Sucesiones de Cauchy en Burton y Coleman (2010).

En este sentido, es importante conocer cómo ha sido el desarrollo de la formalización de los números reales (filogénesis), y cómo ha ido cambiando la perspectiva del manejo de su concepto que se va convirtiendo en objeto matemático (ontogénesis).

Como historiadores se puede contemplar que los números irracionales, como la fuente que complementa a los números racionales para formar el conjunto de los números reales, se visualizan con las demostraciones de existencia de las magnitudes inconmensurables, siendo las diagonales de un pentágono regular y un cuadrado de unidad, inconmensurables con sus respectivos lados. Se puede apreciar que luego de estas magnitudes, a los números irracionales desde una teoría de ecuaciones se los visualiza como soluciones de ecuaciones.

Es importante señalar que, gracias al desarrollo histórico de la construcción de los números reales vista a través de los tres aspectos fundamentales, es posible analizar las exigencias de la aceptación de este objeto matemático como números, pues en un inicio se aprecian algunas ideas intuitivas de estos números y cómo son visualizados después por algunos matemáticos, que aceptados o no como números fueron la fuente para brindar herramientas de una posible estructuración numérica. Esto muestra la gran importancia de estudiar los aspectos epistemológicos de los números reales, ya que es un concepto abordado continuamente en los diferentes niveles de escolaridad, incluso el universitario. Así pues, desde la formación en matemáticas se puede decir que los conjuntos numéricos se han sintetizado en sistemas formales escondiendo problemas epistemológicos, de ahí que los números reales son tomados y trabajados como una estructura de entes abstractos con operatividad y lenguaje propios; siendo necesario establecer una estructura formal.

Por otra parte, el estudio del desarrollo histórico-epistemológico de los números reales, particularmente de los números irracionales, desde la intuición, visualización y formalización, permiten tener un campo más amplio de las representaciones de estos objetos matemáticos, cuestión que quizás pueda facilitar la aprehensión de ellos y superar dificultades en su proceso de enseñanza y aprendizaje; ya que, conocer la estructuración de este objeto matemático posibilita a que los estudiantes puedan "actuar sobre ellos y, transformarlos", como lo menciona Piaget (citado en Delval, 1979, p. 167)[5] o bien darles un tratamiento.

Finalmente, es importante que tanto el docente como el estudiante aprecien las etapas de intuición, visualización y formalización de los números reales que se fundamentan en un contexto histórico, donde los números irracionales son los que complementan este conjunto. Esto con el fin de superar dificultades que se han observado en la enseñanza y el aprendizaje de estos números, y permitir comprender teorías dentro de la rama del análisis matemático.

Referencias

[1] David Burton & John Coleman (2010) Quasi-Cauchy Sequences, *The American Mathematical Monthly*, 117:4, 328-333, DOI: 10.4169/000298910X480793.

[2] Calderón, N. O. (2014). Diferentes construcciones del número real. *Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales*. 91. Bogotá, Colombia: Universidad de Bogotá. Obtenido de https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/52142 42

[3] Cantor, G. (2006). *Fundamentos para una teoría general de conjuntos. Escritos y correspondencia selecta* (Primera edición 1883 ed.). (J. Ferreiros, & E. GómezCaminero, Trads.) Barcelona: Editorial Crítica, S.L.

[4] Dedekind, R. (1988). *¿Qué son y para qué sirven los números?* (Primera edición 1888 ed.). Alianza Editorial: Madrid. Traducción de José Ferreirós. 45, 46

[5] Delval, J. (1979). *Lecturas de psicología del niño: las teorías, los métodos y el desarrollo temprano* (1 ed.). Madrid España: S. A. Madrid 1978. 1979. 48

[6] Euclides, (1991). *Los Elementos.* (Trad. M. Puertas). Editorial Gredos. Madrid. 34, 42

[7] Gómez, B. (1999). Cambios en las nociones de número, unidad, cantidad y magnitud. En Departamento de Didáctica de la matemática. Universidad de Valencia. Obtenido de `https://www.uv.es/~gomezb/19Cambios.pdf` 35

[8] Gómez, I. (2000). La intuición en matemáticas. EDUCAR, 3(3), 29-33. Obtenido de `http://eprints.ucm.es/23318/1/IGomez26.pdf`

[9] Lizarralde, N., & Ramirez, J. (2016). Aproximación a la relación entre la filogénesis y ontogénesis de la idea de límite. (Universidad Pedagógica Nacional, Ed.). Bogotá, Colombia.

[10] Ñañez, Y., & Pineda, D. (2018). *Intuiciones, visualizaciones y formalizaciones en el desarrollo histórico-epistemológico de los números irracionales.* Tesis de pregrado. Universidad del Valle. Cali, Colombia. 33, 35, 40

[11] Puig, L. (1998). Componentes de una historia del álgebra. El texto de Al-Khawarizmi restaurado. *Investigaciones en Matemática Eductiva II*, 109-131. 40

[12] Puig, L. (2011). Historias de al-Khwarizmi (6ª entrega). El cálculo con la cosa. *Suma*. 101-110.

[13] Recalde, L. (2018). *Lecturas de Historia de las Matemáticas.* Universidad del Valle. Cali, Colombia. 39, 41, 42, 46

[14] Recalde, L., & Vargas, V. (2013). Las Fracciones Continuas en el Desarrollo histórico de los Números Reales. *Lecturas Matemáticas. 34*(1), 131-148. 42

[15] Stevin, S. (1585). *Libro de Aritmética* (Primera ed.). (G. Leyden, Ed.) 41

[16] Vargas, V. (2011) *Las fracciones continuas en el desarrollo histórico de los números reales. Tesis de pregrado.* Universidad del Valle. Cali, Colombia.

[17] Zimmermann, W., & Cunningham, S. (1991). (Eds). What is mathematical visualization?. In *Visualization in teaching and learning mathematics.* 1-8. Mathematical Association of America.