Alvarado y Chaves. 2020. Complementacion la demostración de la equipotencia entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$. Revista Sigma, 16 (2). Páginas 12–19.

REVISTA SIGMA
Departamento de Matemáticas
Universidad de Nariño

Volumen XVI № 2 (2020), páginas 12–19

Complementación de la demostración de la equipotencia entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$

Edisson Esteban Alvarado Prado [1]

Andrés Chaves Beltrán [2]

Abstract: George Cantor introduced the mathematically meaningful concept of transfinite numbers, and together with Richard Dedekind are considered the initiators of the theory of sets. Cantor's work in analysis allowed him to investigate the characterization of the continuum. Among its contributions is the equipotency of $\mathbb{R}$ and $\mathbb{R}^2$. One of the purposes of this article is to complement the outline of the demonstration that [6] presents on said equipotence.

Keywords. Equipotence, infinite sets, continuous fractions, dimension.

Resumen: George Cantor es conocido como el creador de los números transfinitos y junto a su colega Dedekind se les considera los iniciadores de la Teoría de conjuntos infinitos. Los trabajos de Cantor en análisis le permitieron investigar sobre la caracterización del continuo. Entre sus aportes se encuentra la demostración de la equipotencia entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$. Uno de los propósitos de este artículo es complementar el esbozo de la demostración que el profesor Luis Recalde en [6] presenta sobre dicha equipotencia.

Palabras Clave. Equipotencia, conjuntos infinitos, fracciones continuas, dimensión.

[1] Profesor del Colegio Comfamiliar de Nariño Siglo XXI, Licenciado en Matemáticas de la Universidad de Nariño, email: stebanalvarado2014@gmail.com

[2] Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad de Nariño, email: ancbel@udenar.edu.co

Introducción

En 1883, George Cantor publicó *Grundlagen einer Allgemeinen Mannighltigkeitslehre (Fundamentos de una teoría general de variedades)*, donde presenta algunos fundamentos básicos de lo que hoy se denomina teoría de conjuntos infinitos. En tal obra, Cantor comienza estudiando los conjuntos de puntos, el de los números racionales y el de los números reales, buscando diferencias relevantes entre estos dos conjuntos. Al demostrar la no-numerabilidad del conjunto de números reales, $\mathbb{R}$, evidenció que hay distintos tipos de infinitos, siendo unos más grandes que otros. Este resultado lo llevó a pensar en la posibilidad de poner el conjunto de puntos de un plano en correspondencia biunívoca con el conjuntos de los puntos de una recta que más tarde, en la carta del 25 de junio de 1877 a Dedekind, Cantor demuestra que si es posible hacerlo.
[6] en el apartado 10.9, denominado "Cantor y la potencia del plano", aborda algunos detalles técnicos de la demostración de la equipotencia entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$,[3] para ello plantea que Cantor divide su demostración en dos partes:

a. La demostración de la equipotencia entre $[\mathbb{I} \times \mathbb{I}] \cap [(0,1) \times (0,1)]$ e $\mathbb{I} \cap (0,1)$.

b. La demostración de de la equipotencia entre $\mathbb{I} \cap (0,1)$ y $(0,1)$.

A juicio de los autores de este artículo, falta complementar esta información, cuestión que se hace en la primera parte del artículo.
En el mismo apartado, Recalde, después de demostrar las dos partes nombradas en el párrafo anterior, plantea que la demostración de la equipotencia entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$, se completa teniendo en cuenta algunas equipotencias e igualdades, las cuales se resumen en los siguientes pasos:

1. $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ es equipotente con $\mathbb{Q}$
2. $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$ es equipotente con $\mathbb{I}$
3. $\mathbb{I} \times \mathbb{Q}$ es equipotente con $\mathbb{I}$
4. $\mathbb{Q} \times \mathbb{I}$ es equipotente con $\mathbb{I}$
5. $(\mathbb{I} \times \mathbb{Q}) \cup (\mathbb{Q} \times \mathbb{I}) \cup (\mathbb{I} \times \mathbb{I})$ es equipotente con $\mathbb{I}$
6. $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = (\mathbb{I} \times \mathbb{I}) \cup (\mathbb{I} \times \mathbb{Q}) \cup (\mathbb{Q} \times \mathbb{I}) \cup (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$

En [6] se demuestra la equipotencia del punto 2, sin demostrar las otras. En la segunda parte de este artículo se profundiza en los cinco puntos restantes, teniendo en cuenta que cada conjunto nombrado en estos puntos se intersecará con el intervalo $(0,1)$, si es subconjunto de $\mathbb{R}$, o con $(0,1) \times (0,1)$ si es subconjunto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

1. Primera parte

A través de cartas entre George Cantor (1845-1918) y Richard Dedekind (1831-1916) se estableció que $\mathbb{R}$ no es numerable[4], lo que llevó a Cantor a establecer distinciones entre conjuntos infinitos a través del concepto de *biyección*[5]. Lo anterior inquietó a Cantor en dos preguntas distintas, la primera, que ha trascendido más en las historiografías sobre la

[3] En algunos apartes $\mathbb{R}^2$ se denotará como $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

[4] Carta del 7 de diciembre de 1873, que se puede ver en [2].

[5] Una función es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva; es decir, si todos los elementos del conjunto de salida tienen una imagen distinta en el conjunto de llegada, y a cada elemento del conjunto de llegada le corresponde un elemento del conjunto de salida. Si una función es biyectiva se le conoce como *biyección*.

teoría de conjuntos trata sobre la búsqueda de subconjuntos de $\mathbb{R}$ que tuvieran un cardinal intermedio entre el del conjunto de los números naturales y el del conjunto de los números reales, derivando en la denominada hipótesis del continuo[6], cuestión que no se abordará en este artículo. La segunda, apunta a preguntarse por conjuntos que tuvieran un cardinal mayor al de $\mathbb{R}$, por lo que es natural pensar que $\mathbb{R}^2$ sería un candidato. Así, en medio de sus meditaciones sobre esta última inquietud, el propio Cantor se preguntó:
¿Puede una superficie (por ejemplo, un cuadrado comprendida su frontera) ponerse en biyección con una curva (por ejemplo, un segmento comprendidos sus extremos)?

En la carta del 25 de junio de 1877 Cantor envía a Dedekind una demostración completa planteando el anterior cuestionamiento como un teorema general.

Teorema 1.1. *Una multiplicidad de n dimensiones puede ser puesta en correspondencia biunívoca con una multiplicidad continua de una dimensión.*

La idea de la demostración puede verse en el caso de dos variables, y la extensión a n variables se sigue por analogía; así que aquí, se simplemente se demostrará que es posible determinar biunívocamente dos variables por medio de una sola.
En [6], se plantea que Cantor dividió la demostración en dos partes, que se describieron en la introducción, y que aquí se demuestran:

a. $(\mathbb{I} \times \mathbb{I}) \cap [(0,1) \times (0,1)] \approx \mathbb{I} \cap (0,1)$. [7]

   Para demostrar ésto, Cantor parte de un conocido resultado de fracciones continuas, según el cual todo número irracional entre 0 y 1 se puede representar de una manera completamente bien determinada por la fracción continúa:

$$e = \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{\alpha_3 + \cfrac{1}{\ddots \cfrac{}{\alpha_v + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}$$

   donde cada $\alpha_v \in \mathbb{N}$ y e se representa como $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ...)$. En *De Fractionbvs Continvs* de 1737 y en el último capítulo de *El análisis del infinito*, Euler demuestra que cada número racional se puede representar por medio de una fracción continua finita y cada número irracional por medio de una fracción continua infinita.

   Si $e_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, ..., \alpha_{1v}, ...)$ y $e_2 = (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}, ..., \alpha_{2v}, ...) \in \mathbb{I} \cap (0,1)$, se define la función $f_1 : (\mathbb{I} \times \mathbb{I}) \cap [(0,1) \times (0,1)] \to \mathbb{I} \cap (0,1)$, tal que:

   $f_1(e_1, e_2) = \delta$, donde

   $\delta = (\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{12}, \alpha_{22}, ...\alpha_{1v}, \alpha_{2v}, ...)$, esto es

$$\delta = \cfrac{1}{\alpha_{11} + \cfrac{1}{\alpha_{22} + \cfrac{1}{\alpha_{33} + ... \cfrac{1}{\alpha_{vv} + \cfrac{1}{\ddots}}}}}$$

[6] La hipótesis del continuo establece que para cada subconjunto infinito A de $\mathbb{R}$, o bien $|A| = N_0$ o bien $|A| = N_1$.

[7] Se usará el símbolo $\approx$ para denotar equipotencia.

con $\delta \in \mathbb{I} \cap (0,1)$ puesto.

Para un δ determinado, fácilmente se puede hallar la preimagen (e_1, e_2).

b. $\mathbb{I} \cap (0,1) \approx (0,1)$.

Para demostrarlo, se toman los racionales del intervalo $(0,1)$ en una sucesión:$\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{r_1, r_2, r_3, ...\}$. Si $e \in (0,1) \cap \mathbb{I}$, entonces, e es diferente de r_k para todo $k = 1, 2, 3, ...$ Ahora, tomando una sucesión $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{c_1, c_2, c_3, ...\} \subset \mathbb{I} \cap (0,1)$, se tiene que:

Si $A = [(0,1) - (\{r_n\} \cup \{c_n\})]$, entonces:

$(0,1) = A \cup (\{r_n\} \cup \{c_n\})$

$(0,1) \cap \mathbb{I} = [(0,1) - (\{r_n\} \cup \{C_n\})] \cup \{c_n\} = A \cup \{c_n\}$

Así, si $t \in (0,1)$, entonces $t \in A$ ó $t \in (\{r_n\} \cup \{c_n\})$. Se define la función biyectiva f de la siguiente manera. Si $t \in A$, entonces $f(t) = t$; si $t \in \{r_n\}$, para algún n, entonces $f(t) = c_{2n-1}$; si $t \in \{c_n\}$, para algún n, entonces $f(t) = c_{2n}$, esto es:

$$f(t) = \begin{cases} t & , \text{si } t \in A \\ c_{2n-1} & , \text{si } t = r_n \\ c_{2n} & , \text{si } t = c_n \end{cases}$$

Por lo tanto, el conjunto $\mathbb{I} \cup \mathbb{Q}$ es equipotente con el conjunto $\mathbb{I}$, de lo cual se deduce que $\mathbb{R}$ es equipotente con $\mathbb{I}$.

La dos equipotencias anteriores hacen parte de la siguiente cadena:

$$\mathbb{R} \approx (0,1) \approx \mathbb{I} \cap (0,1) \approx (\mathbb{I} \times \mathbb{I}) \cap [(0,1) \times (0,1)] \approx \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

Hace falta justificar las siguientes equipotencias:

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \approx (\mathbb{I} \times \mathbb{I}) \cap [(0,1) \times (0,1)]$$

y

$$(0,1) \approx \mathbb{R}$$

Para la primera equipotencia: $\mathbb{R} \approx (0,1)$, una de tantas maneras de demostrarla, es presentando una función biyectiva $u : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ y luego otra función biyectiva $v : (0,\infty) \to (0,1)$. Ejemplos de tales funciones son las siguientes:

$$u(x) = \begin{cases} 2 - x & , \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x} & , \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$v(x) = \frac{1}{x+1}$$

Así, la composición $v \circ u : \mathbb{R} \to (0,1)$, es una biyección.
La segunda equipotencia: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \approx (\mathbb{I} \times \mathbb{I}) \cap [(0,1) \times (0,1)]$, se puede justificar partiendo de las ya demostradas $\mathbb{I} \cap (0,1) \approx (0,1)$ y $\mathbb{R} \approx (0,1)$.
Teniendo en cuenta que existe una función biyectiva f para demostrar que $\mathbb{I} \cap (0,1) \approx (0,1)$, se tiene que la función $k(x,x) = (f(x), f(x))$ también es biyectiva, por tanto, $[\mathbb{I} \times \mathbb{I}] \cap [(0,1) \times (0,1)] \approx [(0,1) \times (0,1)]$.
Ahora, teniendo en cuenta que $v \circ u$ es una función biyectiva que sirve para demostrar $\mathbb{R} \approx (0,1)$, se tiene que la función $j(x) = ((v \circ u)(x), (v \circ u)(x))$, por tanto $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \approx (0,1) \times (0,1)$.
Así, por transitividad, se tiene que $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \approx (\mathbb{I} \times \mathbb{I}) \cap [(0,1) \times (0,1)]$.

2. Segunda parte

Para la demostración se consideran los puntos 1 a 6 presentados en la introducción.

1. $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \cap [(0,1) \times (0,1)] \approx \mathbb{Q} \cap (0,1)$

   Se demostrará que cualquier conjunto numerable A es equipotente con el producto cartesiano $A{\times}A$. Así, Sabiendo que $\mathbb{Q}$ es un conjunto numerable y que $\mathbb{Q} \cap (0,1)$ es numerable, se tiene que $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ es numerable y por lo tanto, $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \cap [(0,1) \times (0,1)] \approx \mathbb{Q} \cap (0,1)$.

   Veamos entonces que Si A es un conjunto numerable, entonces $A \approx A{\times}A$.
   Si A es numerable, puede representarse de la siguiente forma

   $$A = \{a_1, a_2, a_3, ...\}$$

   Luego, el producto cartesiano $A \times A$ puede representarse de la siguiente forma

   $$A \times A = \{(x,y)/x \text{ y } y \in A\}$$

   Nótese que A está representado por extensión, mientras que $A \times A$ está representado por una regla de comprensión. Este producto cartesiano es numerable, pero es complejo representarlo por extensión, para ello, la forma más conocida de representación por extensión de este conjunto, recurre a la siguiente matriz:

   $$\begin{tikzcd}
(a_1,a_1) \arrow[r] & (a_1,a_2) \arrow[dl] & (a_1,a_3) \arrow[r] & (a_1,a_4) \arrow[dl] & \cdots \\
(a_2,a_1) \arrow[d] & (a_2,a_2) \arrow[ur] & (a_2,a_3) \arrow[dl] & \cdots & \\
(a_3,a_1) \arrow[ur] & (a_3,a_2) \arrow[dl] & (a_3,a_3) \arrow[ur] & \cdots & \\
(a_4,a_1) \arrow[r] & (a_4,a_2) \arrow[ur] & \cdots & & \\
 & & \vdots & & \vdots
\end{tikzcd}$$

   La flechas indican el orden de los elementos del conjunto $A \times A$, es decir:

   $$\begin{array}{cccccc}
(a_1,a_1), & (a_1,a_2), & (a_2,a_1), & (a_3,a_1), & (a_2,a_2), & (a_1,a_3)... \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6...
\end{array}$$

   Luego, existe una función biyectiva $g : A \to A{\times}A$. Esto muestra la equipotencia de A con $A{\times}A$.

   En este punto, es interesante plantear que la demostración de la biyección entre estos conjuntos está motivada por la numerabilidad de $\mathbb{Q}$, la cual se puede demostrar adaptando la idea demostrativa aquí expuesta. Sin embargo una inquietud sobre la numerabilidad de $\mathbb{Q}$ es la dificultad de exhibir una función biyectiva entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Q}$, de manera analítica. No se profundizará aquí en discusiones de orden ontológico que derivan de esta pregunta, sin embargo, se consideran recomendables los artículos [7] y [8] para ver una aproximación a la generación de tal función.

2. $(\mathbb{I} \times \mathbb{I}) \cap [(0,1) \times (0,1)] \approx \mathbb{I} \cap (0,1)$.

   Se demostró en el numeral a, de la primera parte de este artículo.

3. $(\mathbb{I} \times \mathbb{Q}) \cap [(0,1) \times (0,1)] \approx (\mathbb{I} \cap (0,1)$

   El conjunto $\mathbb{I} \cap (0,1)$ se puede ver como la unión numerable y disjunta de subconjuntos de la forma $\left(\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n}\right) \cap \mathbb{I}$, con $n \in \mathbb{N}$.

   De otro lado, sea $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de los elementos de $\mathbb{Q} \cap (0,1)$. Ahora, existe una biyección t_n que va del conjunto $\{(a_0, r_n)/a_0 \in \mathbb{I} \cap (0,1)\}$ al conjunto $\left(\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n}\right) \cap \mathbb{I}$. Así, la función $f_2 : (\mathbb{I} \times \mathbb{Q}) \cap [(0,1) \times (0,1)] \to \mathbb{I} \cap (0,1)$ definida de la siguiente manera

   $$f_2(a, r_n) = t_n(a, r_n)$$

   es una biyección entre $(\mathbb{I} \times \mathbb{Q}) \cap [(0,1) \times (0,1)]$ e $\mathbb{I} \cap [0,1]$, por lo tanto

   $$\mathbb{I} \times \mathbb{Q} \approx \mathbb{I}$$

4. $(\mathbb{Q} \times \mathbb{I}) \cap [(0,1) \times (0,1)] \approx (\mathbb{I} \cap (0,1)$

   Esta demostración puede realizarse de manera análoga a la anterior demostración.

5. $[(\mathbb{I} \times \mathbb{Q}) \cup (\mathbb{Q} \times \mathbb{I}) \cup (\mathbb{I} \times \mathbb{I})] \cap [(0,1) \times (0,1)] \approx \mathbb{I} \cap (0,1)$.

   De $(\mathbb{I} \times \mathbb{Q}) \cap [(0,1) \times (0,1)] \approx \mathbb{I} \cap (0,1)$, se tiene que existe una función biyectiva

   $$f_1 : (\mathbb{I} \times \mathbb{Q}) \cap [(0,1) \times (0,1)] \to \mathbb{I} \cap (0,1)$$

   Luego, se define $g_1 : \mathbb{I} \cap (0,1) \to \mathbb{I} \cap \left(0, \dfrac{1}{3}\right)$, tal que, $g_1(x) = \frac{1}{3}x$.

   De $(\mathbb{Q} \times \mathbb{I}) \cap [(0,1) \times (0,1)] \approx \mathbb{I} \cap (0,1)$, se tiene que existe una función biyectiva

   $$f_2 : (\mathbb{Q} \times \mathbb{I}) \cap [(0,1) \times (0,1)] \to \mathbb{I} \cap (0,1)$$

   Luego, se define $g_2 : \mathbb{I} \cap (0,1) \to \mathbb{I} \cap \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$, tal que, $g_2(x) = \dfrac{1}{3}(x+1)$.

   De $(\mathbb{I} \times \mathbb{I}) \cap [(0,1) \times (0,1)] \approx \mathbb{I} \cap (0,1)$ se tiene que existe una función biyectiva

   $$f_3 : (\mathbb{I} \times \mathbb{I}) \cap [(0,1) \times (0,1)] \to \mathbb{I} \cap (0,1)$$

   Luego, se define $g_3 : \mathbb{I} \cap (0,1) \to \mathbb{I} \cap \left(\dfrac{2}{3}, 1\right)$, tal que, $g_3(x) = \dfrac{1}{3}(x+2)$.

   Luego, se tiene la función biyectiva $h : [(\mathbb{I} \times \mathbb{Q}) \cup (\mathbb{Q} \times \mathbb{I}) \cup (\mathbb{I} \times \mathbb{I})] \cap (0,1) \to \mathbb{I} \cap (0,1)$, tal que

   $$h(x) = \begin{cases} g_1(f_1(x)), & si \quad x \in \mathbb{I} \times \mathbb{I} \\ g_2(f_2(x)), & si \quad x \in \mathbb{I} \times \mathbb{Q} \\ g_3(f_3(x)), & si \quad x \in \mathbb{Q} \times \mathbb{I} \end{cases}$$

   Con esto se ha demostrado que $[(\mathbb{I} \times \mathbb{I}) \cup (\mathbb{I} \times \mathbb{Q}) \cup (\mathbb{Q} \times \mathbb{I})] \cap [(0,1) \times (0,1)] \approx \mathbb{I} \cap (0,1)$

6. $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = (\mathbb{I} \times \mathbb{I}) \cup (\mathbb{I} \times \mathbb{Q}) \cup (\mathbb{Q} \times \mathbb{I}) \cup (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$

   Este punto no requiere demostración, y a diferencia de los anteriores, se denota en términos de igualdad de conjuntos y no de equipotencia.

Así, teniendo en cuenta los puntos del 1 al 6, se ha demostrado que $[\mathbb{R} \times \mathbb{R}] \cap [(0,1) \times (0,1)] \approx (0,1)$, es decir, un cuadrado cuayo lado mide una unidad, es equipotente con uno de sus lados. Para llegar a que $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \approx \mathbb{R}$, solo basta tener en cuanta la parte final de la primera parte de este artículo, en la que se muestra:

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \approx (\mathbb{I} \times \mathbb{I}) \cap [(0,1) \times (0,1)]$$

y

$$(0,1) \approx \mathbb{R}.$$

3. Comentarios

1. Este artículo es una complementación del trabajo de grado [1] del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Nariño, el cual tuvo origen en un tema desarrollado en la asignatura Época Contemporánea del mismo programa. En concreto, el paso 5 se supone inmediato, sin embargo construir la función que implique biyección no lo es. Esa fue la motivación inicial para la escritura de este artículo.

2. Sería deseable describir las funciones biyectivas presentadas en la equipotencia de ($\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$) con $\mathbb{Q}$, y de ($\mathbb{I} \times \mathbb{Q}$) con $\mathbb{I}$, pero debido a la necesidad de usar el axioma de elección, esto impide describir explicitamente dichas funciones.

3. La demostración de la equipotencia de $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ con $\mathbb{Q}$ es bastante más accesible y conocida que las otras equipotencias. La de $\mathbb{I} \times \mathbb{I}$ con $\mathbb{I}$ es bastante trabajable en cursos de análisis o teoría de conjuntos, sin embargo no se tenía referenciada la demostración de las equipotencias ($\mathbb{I} \times \mathbb{Q}$) con $\mathbb{I}$ y ($\mathbb{Q} \times \mathbb{I}$) con $\mathbb{I}$.

4. La manera como se abordaron las equipotencias de la parte final de la primera parte: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \approx (\mathbb{I} \times \mathbb{I}) \cap [(0,1) \times (0,1)]$ y $(0,1) \approx \mathbb{R}$, no es la más usual. De hecho, se pudo hacer a través de funciones continuas, sin embargo, teniendo en cuenta que este artículo fue motivado en una asignatura universitaria, en la que se abordaba aspectos históricos epistemológicos de la teoría de conjuntos y la teoría de funciones, se decidió proponer como ejercicio construir funciones biyectivas no necesariamente continuas entre los conjuntos correspondientes. Cabe decir que entre las soluciones habían funciones más elaboradas que la que aquí se presentó.

Referencias

[1] Alvarado, E. y Iguad, L. (2018). *Estudio histórico-epistemológico de los inicios de la teoría de conuuntos de George Cantor*. Tesis de pregrado. Universidad de Nariño. 18

[2] Cantor, G. (1883). *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre.* Universitât Halle-Wittenberg. 13

[3] Ferreiros, J. (1991). *El nacimiento de la teoría de Conjuntos, 1854-1908.* En: Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid.

[4] Ferreiros, J. (2006). *Fundamentos para una teoría general de conjuntos. Escritos y correspondencia selecta.* Traducción comentada e introducción de José Ferreirós. En: Editorial Crítica, Barcelona.

[5] Grattan-Guinness, I (1984). *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica.* Universidad de Madrid, Madrid, España. Alianza Editorial. Cap. 5, p. 235-237

[6] Recalde, L (2018). *Lecturas de historia de las matemáticas.* Universidad del Valle, Cali, Colombia. 12, 13, 14

[7] Soto, O. F., Osejo, E., y Caballero, R. (1996). Acerca de una enumeración peirceana de los racionales. *Boletín de Matemáticas.* 3 (2), 83-96. 16

[8] Soto, O. F., y Osejo, E. (1991). La propuesta Peirce. *Revista Sigma.* 6, 19-32. 16