Mosquera y Soto. 2020. El problema general de Nemore. Revista Sigma, 16 (2). Páginas 1–11.

REVISTA SIGMA
Departamento de Matemáticas
Universidad de Nariño

Volumen XVI №2 (2020), páginas 1–11

El problema general de Nemore

Saulo Mosquera López [1]

Oscar Fernando Soto Ágreda [2]

Abstract: Nemore's problem consists of dividing a triangle into two regions of the same area by means of a rectilinear cut. In the article, "Division of the area of a triangle into two equal parts, the paradigm of the center of gravity", we consider some particular cases of this problem and Professor Antonio Casas, from the Polytechnic University of Madrid, made some observations on it. In this article these observations are analyzed, some technical details are specified and a geometric construction is presented that allows, to solve in the most general way possible, the problem considered by Jordanus Nemore in his main work on geometry, Liber Philotegni.

Keywords. Triangle, equal area, Enveloping curve, Hyperbola.

Resumen: El problema de Nemore consiste en dividir un triángulo, en dos regiones de la misma área, mediante un corte rectilíneo. En el artículo, "División del área de un triángulo en dos partes iguales, el paradigma del baricentro", consideramos algunos casos particulares de este problema y el profesor Antonio Casas, de la Universidad Politécnica de Madrid, realizó algunas observaciones al mismo. En este artículo se analizan estas observaciones, se precisan algunos detalles técnicos y se presenta una construcción geométrica que permite, resolver de la manera más general posible, el problema considerado por Jordanus Nemore en su principal trabajo sobre geometría, *Liber Philotegni.*

Palabras Clave. Triángulo, igual área, Curva envolvente, Hipérbola.

[1]Universidad de Nariño, Departamento de Matemáticas y Estadística, e-mail: samolo@udenar.edu.co
[2]Universidad de Nariño, Departamento de Matemáticas y Estadística, e-mail: fsoto@udenar.edu.co

1. Introducción

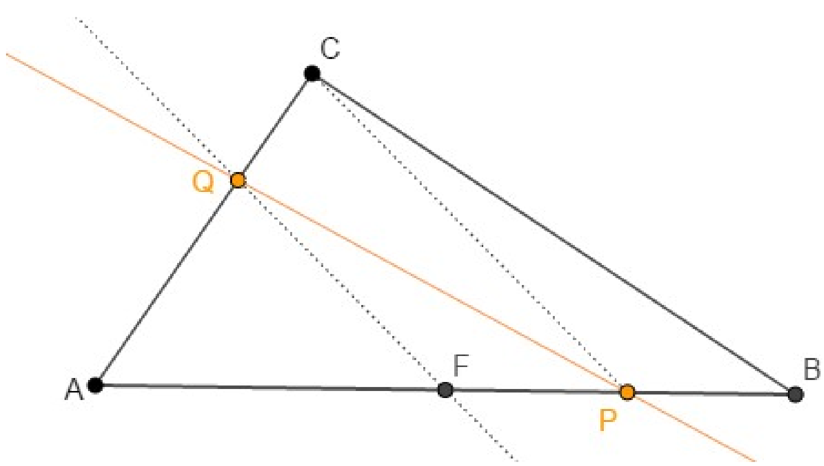
En el volumen XIII N° 1 (2017) de la revista Sigma, fue publicado el artículo "División del área de un triángulo en dos partes iguales, el paradigma del baricentro"[4] en el cual se revisa, entre otros, el siguiente caso particular: "Dado un triángulo ABC y un punto P en uno de sus lados, trazar por P una recta que lo divida en dos partes de igual área". En el artículo se describe una solución geométrica del problema y, utilizando métodos analíticos, se discute la ecuación vectorial de la familia de rectas bisectoras del triángulo, así como la ecuación vectorial de la curva envolvente de esta familia.
El profesor Antonio Casas Pérez de la Universidad Politécnica de Madrid, nos ha remitido algunas observaciones y comentarios al desarrollo del escrito y consecuentemente hemos considerado conveniente su análisis y reflexión. En este artículo se analizan estas observaciones, se precisan algunos detalles técnicos y se recrea el problema considerado por Jordanus Nemore en su principal trabajo sobre geometría, *Liber Philotegni*: "Dado un triángulo ABC y un punto P en el exterior del triángulo, trazar por P una recta que divida al triángulo en dos regiones igual área". Al final del artículo se presenta una construcción geométrica que permite, resolver de la manera más general posible, este problema en la cual se considera el punto P en cualquier posición del plano.

2. Observaciones del profesor Casas

Entre las diversas consideraciones del profesor Casas consideramos importantes las siguientes:

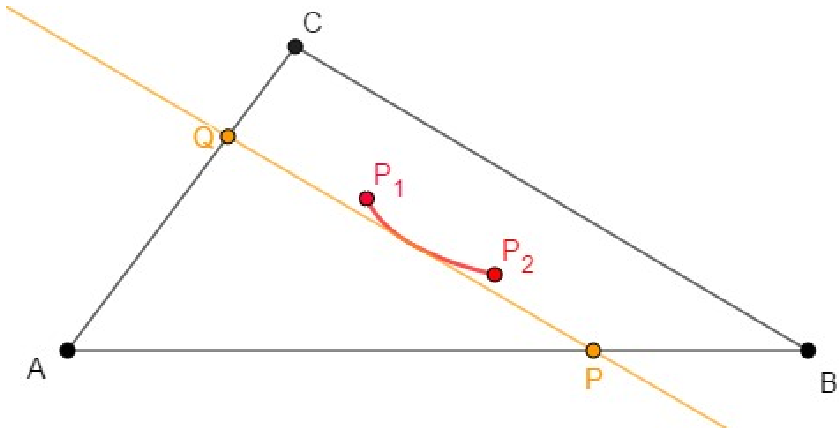
a) ¿La curva envolvente de la familia de rectas bisectoras corresponde a la rama de una hipérbola?

A partir del triángulo ABC y el punto P sobre el lado AB y en la configuración de la gráfica 1, en el artículo se demuestra que la familia de rectas PQ, que bisecan el triángulo tiene por ecuación vectorial $X(t,s) = A + s(B-A) + t\left(\frac{1}{2s}(C-A) + s(A-B)\right)$ y puesto que cuando P se acerca a B, el punto Q se acerca al punto medio de AC entonces debemos tener que $\frac{1}{2} \leq s \leq 1$ y $t \in \mathbb{R}$



Gráfica 1

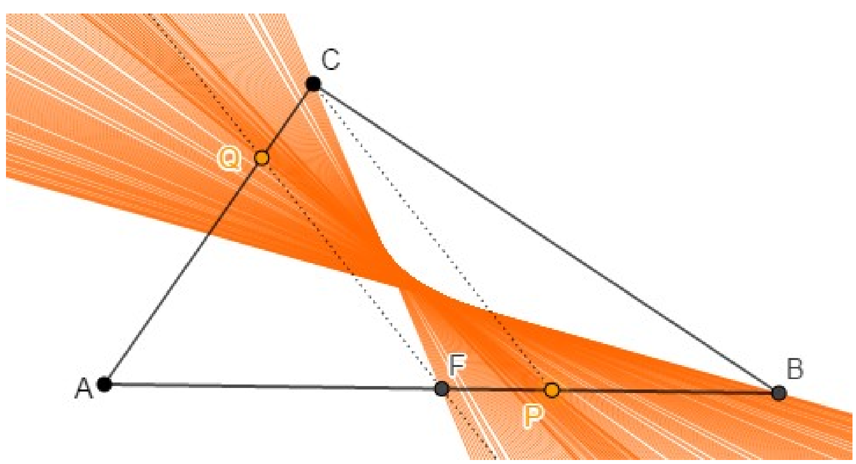
Así mismo, demostramos que la ecuación vectorial de la curva envolvente corresponde a la rama de una hipérbola dada por $Y(s) = \frac{1}{4s}(C-A) + \frac{1}{2}s(B-A) + A$, $\frac{1}{2} \leq s \leq 1$, sin embargo, la variación del parámetro s asegura que la curva no corresponde a toda la rama, si no únicamente a un arco de esta hipérbola. La gráfica 2 muestra este arco.



Gráfica 2

b) ¿La hipérbola pasa por los vértices B y C?

Al tomar el rastro de la recta PQ cuando se mueve el punto P sobre el segmento AB se genera la familia de rectas que bisecan el triángulo, cuya curva envolvente es la rama de la hipérbola. Al observar la gráfica 3, y el movimiento de la recta, se produce la sensación visual de que la curva envolvente pasa por los puntos B y C.



Gráfica 3

Para verificar este hecho, es necesario determinar valores únicos del parámetro s de manera que al reemplazar los puntos B y C en la ecuación vectorial de la curva envolvente esta se convierta en una identidad. A realizar esto para el punto B se obtiene la igualdad absurda $0 = 1$ y para el punto C, se hallan dos valores $s = \frac{1}{4}$ y $s = 0$. Por consiguiente, la imagen que produce la gráfica 3 no es adecuada, así la hipérbola no pasa por los puntos B y C y consecuentemente el gráfico 11 del artículo en mención no es correcto.

c) ¿Para el caso particular considerado del triángulo con vértices $A(0,0)$, $B(2,0)$ y $C(4,4)$ los resultados son correctos?

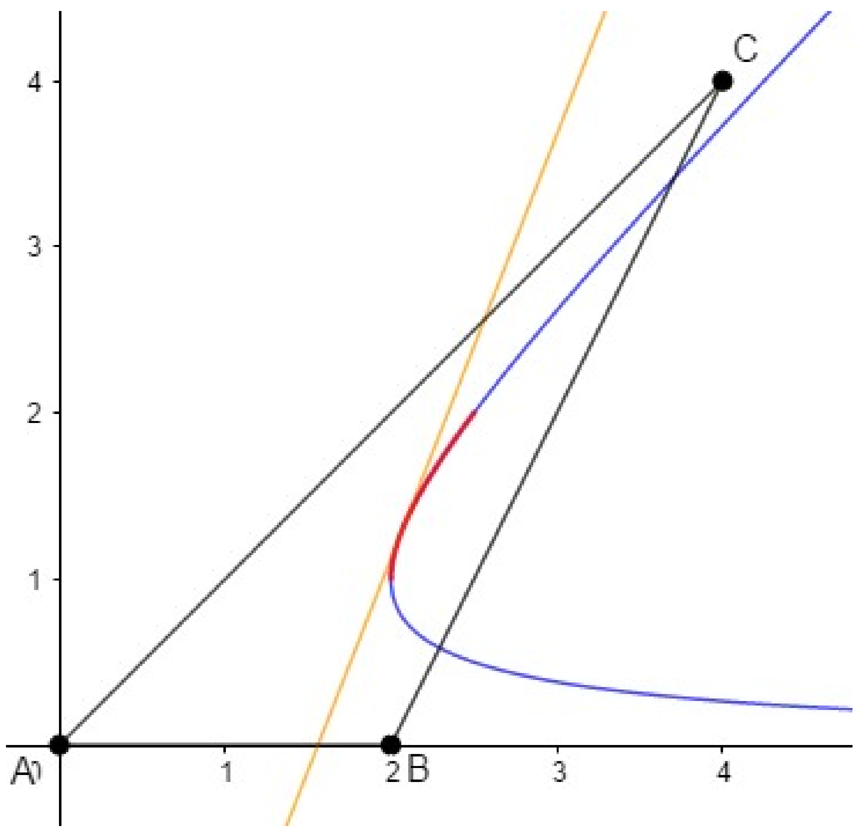
En el artículo considerado, tomamos como ilustración, el caso $A(0,0)$, $B(b,0)$ y $C(a,c)$, para el cual, a partir de las ecuaciones generales, concluimos que:

- La ecuación paramétrica de la familia de rectas que divide al triángulo en dos regiones de igual área está dada por $x = bs(1-t) + \frac{at}{2s}$, $y = \frac{ct}{2s}$ donde $t \in \mathbb{R}$, que en forma cartesiana se expresa como $cx + (2bs^2 - a)y = bcs$ con $\frac{1}{2} \leq s \leq 1$.

- La ecuación paramétrica de la envolvente es $x = \frac{a}{4s} + \frac{bs}{2}$ y $y = \frac{c}{4s}$ donde $\frac{1}{2} \leq s \leq 1$ que en coordenadas rectangulares corresponde, como se mencionó, a un arco de la hipérbola $8cxy - 8ay^2 = bc^2$.

- En el caso particular en que $A(0,0)$, $B(2,0)$ y $C(4,4)$ se obtiene la familia de rectas $x + (s^2-1)y = 2s$, $\frac{1}{2} \leq s \leq 1$ y la hipérbola $xy - y^2 = 1$.

Los resultados anteriores son correctos, sin embargo, la gráfica 12, del artículo, no es adecuada; una percepción visual coherente con los resultados algebraicos se ilustra en la gráfica 4.



Gráfica 4

d) ¿Los extremos del arco de la hipérbola, son los puntos medios de las medianas?

Los puntos medios de las medianas por C y B son $P_1 = \frac{2C+B+A}{4}$ y $P_2 = \frac{2B+C+A}{4}$, que al ser reemplazados en la ecuación de la envolvente la convierten en una identidad cuando $s = \frac{1}{2}$ y $s = 1$ respectivamente, por tanto, la observación del profesor Casas, es correcta.

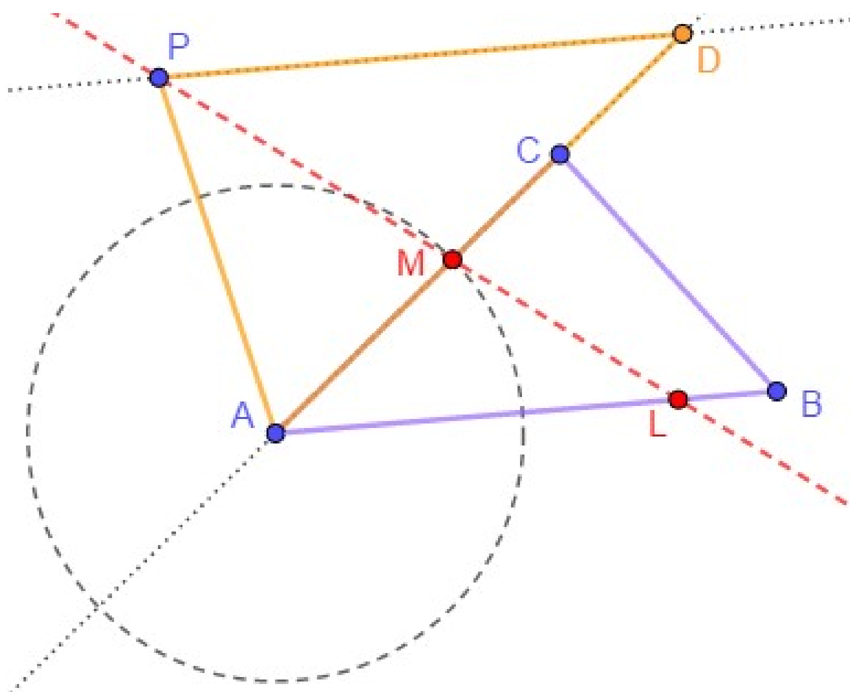
3. El problema general de Nemore

Jordanus de Nemore, fue un importante matemático de Europa Occidental en el siglo XIII y sus trabajos, en matemáticas, se relacionan con temas de aritmética, álgebra y geometría. En geometría, su principal obra es *Liber Philotegni*, en la cual, de acuerdo a [2] se estudian problemas relacionados con polígonos regulares e irregulares, así como algunas proposiciones sobre división de triángulos; en particular resuelve el problema de la división de un triángulo mediante un corte rectilineo. En lo que sigue se presenta la solución desarrollada por Nemore, cuando el punto P está en el exterior del triángulo y la solución elaborada, en colaboración con el profesor Casas, cuando el punto está en cualquier lugar del plano.

3.1. El punto P está en el exterior del triángulo

Siguiendo a [2], el problema considerado por Nemore es el siguiente: "Dado un triángulo ABC y un punto P en su exterior, trazar una recta que pase por P y divida el triángulo en dos regiones de igual área".
Los pasos fundamentales de la solución de Nemore a este problema son los siguientes:

- Trazar por P una paralela a AB.
- Sea D el punto en el cual esta paralela intersecta a la recta AC.
- Si a es el área del triángulo ABC, b el área del triángulo PAD y p la longitud del segmento AD, considerar el número $d = \frac{a \cdot p}{2b}$.



Gráfica 5

- Construir sobre AD, a partir de A, un punto M tal que $\frac{MD}{AM} = \frac{AM}{d}$.

- La recta PM, ver gráfica 5, divide al triángulo ABC en dos regiones de igual área, el triángulo AML y el cuadrilátero $BCML$.

Una observación es necesaria. Si se llama $x = AM$ entonces determinar el punto M que satisfaga la condición anterior equivale, geométricamente, a encontrar una raíz positiva de la ecuación $x^2 + dx = pd$ y, aunque esto era conocido desde los griegos, no es evidente y puede consultarse por ejemplo en [3]. Dejamos a consideración del lector justificar la validez de esta construcción.

3.2. El punto está en cualquier parte del plano.

La construcción vectorial desarrollada en [4] puede ser complementada para resolver el problema de trazar, por un punto cualquiera P del plano, una recta, que divida al triángulo ABC en dos regiones de igual área, sin embargo estamos interesados en presentar colaborativamente, una solución estrictamente geométrica del problema. Para ello dividiremos la tarea en las tres siguientes etapas:

Construcción de la hipérbola de Nemore.
Construcción de la tricúspide de Nemore.
Construcción de la recta.

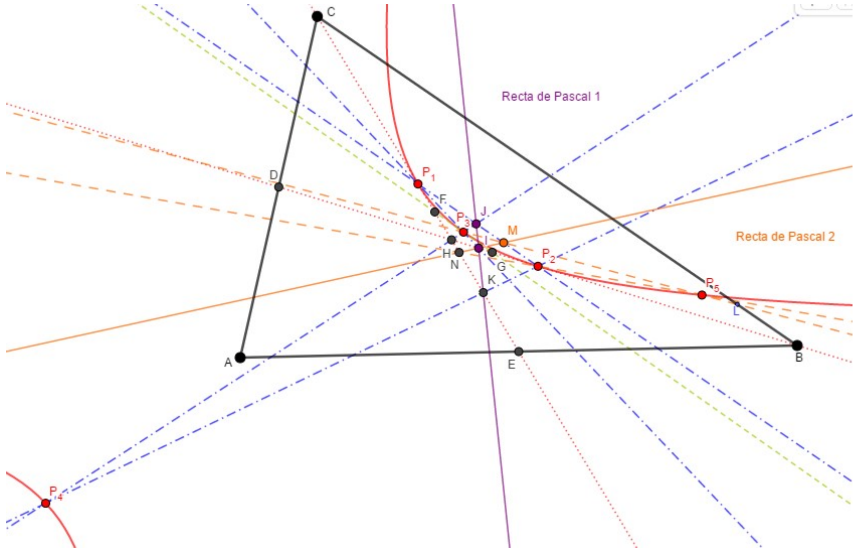
3.2.1. La hipérbola de Nemore

En el apartado 5 de nuestro artículo publicado en la revista SIGMA (Vol. XIII nº 1 - 2017) probamos analíticamente que la curva envolvente de familia de rectas que biseca el área de un triángulo dado ABC es una hipérbola, que llamaremos **Hipérbola de Nemore** y que puede construirse geométricamente, a partir del hecho de que conocemos tres tangentes a la cónica, a saber, la recta que divide al triángulo en dos regiones de igual área por medio de una paralela a uno de los lados, digamos BC [4] y las rectas medianas por B y C, y por consiguiente los dos puntos de tangencia de la cónica es decir, los puntos medios P_1 y P_2 de las medianas consideradas [1]. A partir de esta información se describirá cómo construir tres puntos adicionales sobre la curva y por tanto la hipérbola.

Los pasos generales son los siguientes:

- El tercer punto, P_3 es el punto medio del segmento FG, donde F y G son los puntos de intersección de las medianas con la recta paralela al lado BC que divide al triángulo en dos regiones de igual área.
- Trazar la recta P_3H, donde H es el baricentro del triángulo.
- Sea I el punto de corte de la recta P_1P_3 y la mediana por B y J la intersección de las rectas P_1P_2 y la recta P_3H.
- La recta IJ se llama Recta de Pascal. Sea K el punto de corte de la recta de Pascal y la mediana por C.
- El cuarto punto P_4, es el punto de intersección de las rectas KP_2 y HP_3.
- Al trazar la recta P_3L, donde L es el punto que divide al segmento BC en ocho partes de igual longitud, y repetir el proceso anterior, se obtiene el quinto punto P_5.
- La Hiperbola de Nemore, queda determinada por los puntos P_1, P_2, P_3, P_4 y P_5.

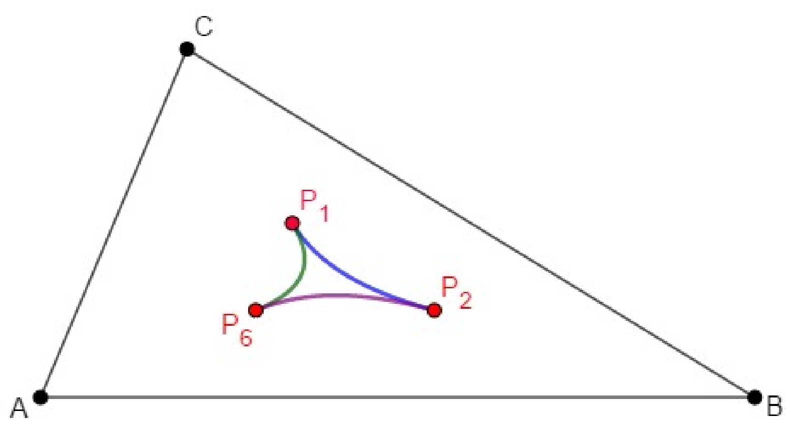
El siguiente gráfico ilustra esta construcción.



Gráfica 6

3.2.2. La Tricúspide de Nemore

Si el proceso descrito, se repite considerando las paralelas a los lados AB y AC que dividen al triángulo ABC en dos regiones de igual área, se obtienen dos nuevas hipérbolas de Nemore una de las cuales pasa por los puntos medios P_6 y P_2 de las medianas por A y B y la otra por los puntos medios P_6 y P_1 de las medianas por A y C, respectivamente. Estas tres hipérbolas determinan un triángulo Hiperbólico, cuyos vértices son los puntos medios de las medianas, que se muestran en la gráfica 7, y que denominaremos **Tricúspide de Nemore**.



Gráfica 7

3.2.3. La recta por el punto P que divide al triángulo en dos regiones de igual área

Consideremos el triángulo ABC, un punto P cualquiera del plano y supongamos que hemos construido las hipérbolas de Nemore del triángulo. Es claro que por el punto P es posible trazar dos tangentes a cada hipérbola, una a cada rama, y en estas circunstancias puede suceder que el punto de tangencia, entre una de estas rectas y la hipérbola correspondiente, esté en el arco de la tricúspide de Nemore, relativo a dicha hipérbola, o fuera de ella. Puesto que los arcos de la tricúspide de Nemore son el lugar geométrico de las rectas tangentes que dividen al triángulo en dos regiones de igual área, podemos considerar dos situaciones:

a. El punto P está en el exterior de la tricúspide de Nemore.

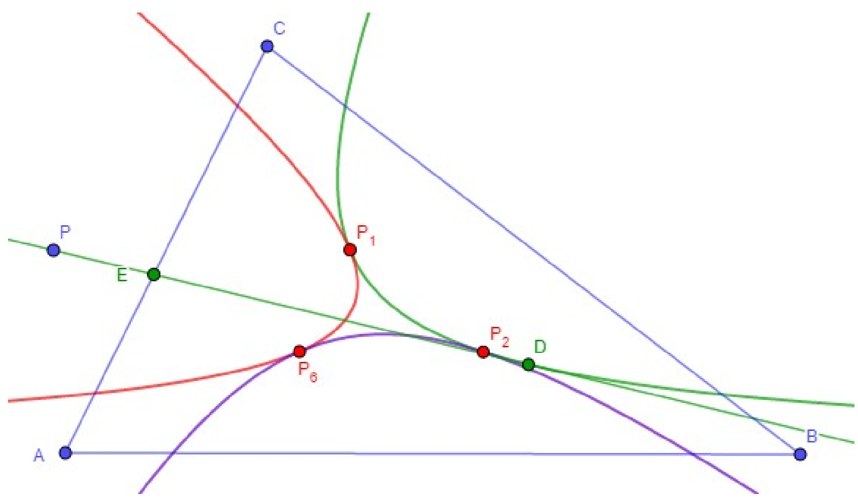
b. El punto P está en el interior de (o sobre) la tricúspide de Nemore.

a. En el caso en que el punto P esté en el exterior de la tricúspide, es necesario considerar dos alternativas para el punto de tangencia.

i. El punto de tangencia está fuera de los arcos de la tricúspide.

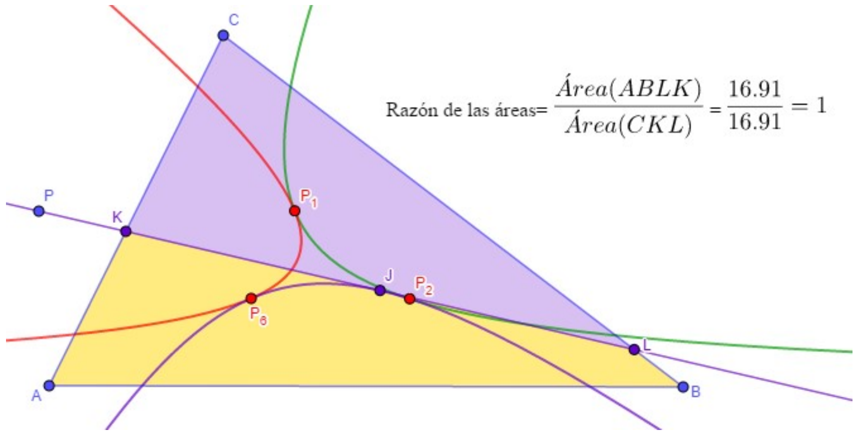
ii. El punto de tangencia está en uno de los arcos de la tricúspide.

i. Si el punto de tangencia está fuera de uno de los arcos de la tricúspide de Nemore, la recta tangente no divide al triángulo en dos regiones de igual área. Esto se ilustra en la siguiente gráfica, en la cual el punto de tangencia D está fuera del arco de la hipérbola de Nemore, entre P_1 y P_2.



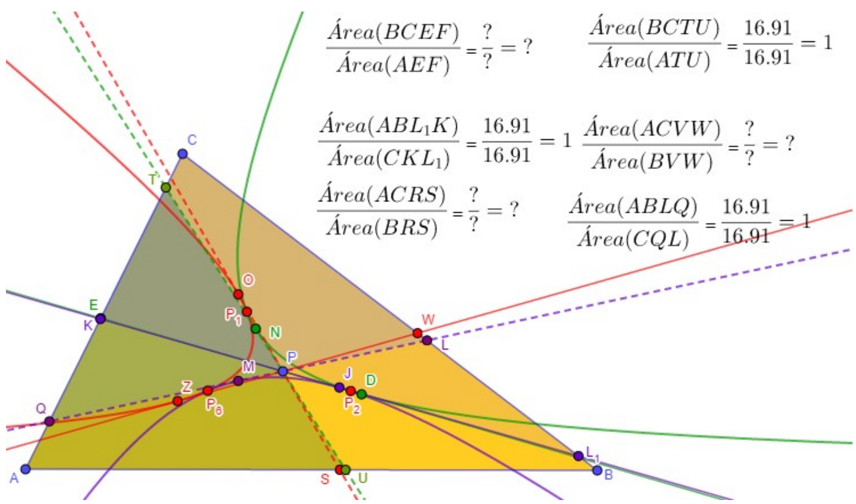
Gráfica 8

ii. Si el punto de tangencia está en uno de los arcos de la tricúspide de Nemore la recta tangente divide al triángulo en dos regiones de la misma área. Esto se ilustra en la siguiente gráfica, para la misma posición del punto P, en la cual el punto de tangencia J está sobre el arco de la hipérbola de Nemore, entre P_6 y P_2.



Gráfica 9

b. Si el punto P está en el interior de (o sobre) la tricúspide de Nemore entonces desde este punto, tres de las tangentes a las hipérbolas tienen su punto de tangencia sobre los arcos de la tricúspide y por tanto estas tangentes dividen al triángulo en regiones de igual área. Esto se ilustra en la siguiente gráfica en la cual los puntos de tangencia J, M y N están sobre los correspondientes arcos de la tricúspide.



Gráfica 10

En resumen :

- Desde cualquier punto P del plano existe por lo menos una tangente a la hipérbola de Nemore cuyo punto de tangencia está sobre el arco de Nemore corespondiente; esta recta, por pertenecer a la familia de rectas bisectoras, biseca el área del triángulo ABC y por tanto el área del corespondiente triángulo CKL (gráfica 9), es la mitad del área del triángulo ABC.

- Si el punto P es uno de los vértices de la tricúspide de Nemore, existe una única recta que divide al triángulo en dos regiones de igual área y esta recta coincide con la mediana correspondiente.

4. Consideraciones finales

Los sentidos engañan; en la matemática, el conocimiento que parte de la percepción sensorial adquiere certeza solo después de pasar por el nivel mental de la argumentación formal; es la razón la que da fe de su veracidad. Sin ella, sin la razón, se cae en las ligerezas de las que da cuenta el artículo [4] y por fortuna y restitución de sus autores, un acucioso lector de la revista Sigma, órgano de difusión del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Nariño, en el recóndito sur de Colombia, y del otro lado del mundo, encontró desde la inquietud que suele remorder los problemas.

Las advertencias que hace el profesor Casas, han conseguido dos cosas: la primera parte desde la inquietud del error y deriva en estudiar de nuevo el problema y a pesar del paso de los años, volver a sentir la inquietud académica y la pasión desbordada frente a los hallazgos que surgen en la situación. Se ha avivado de nuevo la inquietud del espíritu bajo el entendido que permanece joven y que los años se han convertido en la experiencia propicia para interrelacionar los conocimientos. Y segunda, se ha ahondado en la solución del problema y, para despertar, aún más, su interés, les comentamos que este problema sigue abierto pues el profesor Casas ha conjeturado que:

"Las hipérbolas que configuran la curva tricúspide que resuelve el problema de, bisecar el área de un triángulo mediante una recta que pasa por un punto de la cónica, tienen sus focos de tal manera que las rectas que los unen con los vértices del mismo son concurrentes en el incentro del triángulo. Los vértices son los centros de tales hipérbolas y las rectas, que definen sus lados, sus asíntotas".

Esperamos tener el espacio para seguir trabajando en esta conjetura e invitamos a que Ud. lo haga.

Así entonces, aparece una suma de hechos, la existencia de la internet, la inquietud de un profesor allende la frontera, la tarea epistolar establecida con quien se ha convertido en amigo, el profesor Casas, tarea que suscita volver a estudiar un problema añejo y simple que nos asombró en su momento, encontrar el vínculo soslayado con una de las cónicas y que ahora nos brinda la posibilidad, algo usual entre los académicos, de corregir nuestras equivocaciones.

Se espera, que este artículo restituya el valor del primero. Los dos arman un buen compendio del adagio que grita al oído "de los errores, se aprende".

Referencias

[1] Almeida, R., Espinoza, E., Guzmán, E., MontesdeOca, A. y Noda, J. A. (2015). *Construcciones geométricas.* Recuperado de: https://amontes.webs.ull.es/geogebra/master/conicas.html. 6

[2] Katz, V. J. (2016). *SourceBook in the Mathematics of Medieval Europe and North Africa.* Pricenton University Press. Recuperado de: http://www.mifami.org/eLibrary/Katz.ed-MagicSquares-Kishnawi-Moschopoulos.pdf. 5

[3] Mosquera, S. (2021) *Construcciones geométricas con GeoGebra.* Grupo de investigación GESCAS. Dpto de Matemáticas y Estadística. Universidad de Nariño. (Documento en proceso de publicación). 6

[4] Soto, O. F. y Mosquera, S. (2017). "División del área de un triángulo en dos partes iguales, el paradigma del baricentro." *Revista Sigma*, Volumen XIII N° 1, Universidad de Nariño. Recuperado de: https://revistas.udenar.edu.co/index.php/rsigma/article/download/3725/PDF. 2, 6, 10