Espitia C. & Beltrán A. 2009. La Hipótesis del ángulo obtuso en Saccheri. Revista Sigma, 9 (1). Pág. 1-6. http://coes.udenar.edu.co/revistasigma/articulos/articulosIX1/1.pdf

REVISTA SIGMA
Departamento de Matemáticas
Universidad de Nariño

Volumen IX (2009), páginas 1–6

La Hipótesis del ángulo obtuso en Saccheri

Cristian Camilo Espitia Morillo[1]
Andrés Chaves Beltrán[2]
Universidad de Nariño

Abstract. In this article is approached one apart from the text Euclides Vindicatus by Gerolamo Saccheri. In essence, is described the method that he used to refuse the hypothesis of obtuse angle in his book of 1733. Also is presented a historical introduction of the problem of parallels, which motivated the publication of the referenced text.
Keywords. Non Euclidean Geometries, fiveth Euclides postulate, hipothesis of obtuse angle.

Resumen. En este artículo se aborda un aparte del texto *Euclides Vindicatus* [7], de Gerolamo Saccheri. En esencia se describe el método que usó para rechazar la hipótesis del ángulo obtuso en su libro de 1733. También se presenta una introducción histórica del problema de las paralelas, lo cual motivó la publicación de la obra referenciada.
Keywords. Geometrías no Euclidianas, quinto postulado de Euclides, hipótesis del ángulo obtuso.

1. INTRODUCCIÓN HISTÓRICA

Al exponer un recorrido histórico concerniente al surgimiento de las Geometrías no Euclidianas, es imprescindible hablar del primer tratado sistemático de matemáticas conocido el cual data del año 300 antes de Cristo, este es *Los Elementos de Euclides.* En el se recogen los conocimientos fundamentales que los matemáticos habían acumulado hasta entonces y se exponen de una manera sistemática.

Proclo señala que Euclides recopiló teoremas de Eudoxo, perfeccionó los de Teateto y demostró algunos teoremas que sus predecesores habían probado con cierta imprecisión. Euclides reunió todos estos conocimientos en su obra, la cual consta de 13 libros. En su primer libro expone 5 postulados y 5 nociones comunes. En la traducción de los Elementos hecha por María Luisa Puertas Castaño [4] se menciona: «postulados son las verdades iniciales de todo sistema axiomático y se refieren siempre a la materia concreta en la que se trabaje, mientras que noción común son verdades comunes a todas las ciencias y tomadas como obvias ». Entre los postulados se encuentran:

[1]Estudiante de Licenciatura en matemáticas. Universidad de Nariño.
[2]Docente del Departamento de Matemáticas y Estadística. Universidad de Nariño.

1. *Postúlese el trazar una línea recta desde un punto cualquiera hasta un punto cualquiera.*

2. *Y prolongar continuamente una recta finita en línea recta.*

3. *Y el describir un círculo con cualquier centro y distancia.*

4. *Y el ser todos los ángulos rectos iguales entre sí.*

5. *Y que una recta al incidir sobre dos rectas hace los ángulos internos del mismo lado menores que dos rectos, las dos rectas prolongamos indefinidamente se encontrarán en el lado en el que están los ángulos menores que dos rectos.*

Euclides [4], pág 107.

Los 3 primeros apelan a un proceso de construcción con regla y compás, el cuarto postula una propiedad importante de los ángulos rectos y el quinto asegura el encuentro de dos rectas (coplanarias) cuando al ser cortadas por una transversal forman hacia un mismo lado ángulos cuya suma es menor a dos rectos.

Puede encontrarse una diferencia entre el quinto y los otros cuatro postulados; el quinto no es tan conciso y comprensible como los anteriores. Al respecto, los matemáticos de la antigüedad se plantearon la posibilidad de considerarlo como un teorema y por consiguiente hallar una posible demostración a partir del resto de los principios básicos de la Geometría, es decir, a partir de los primeros cuatro postulados.

Una razón para creer que el quinto no es un postulado sino un teorema; es la existencia en el primer libro de los elementos de una proposición considerada como la recíproca de este, esta es:

Proposición 17 *En todo triángulo dos ángulos tomados juntos de cualquier manera son menores que dos rectos.*

Entonces *¿Por qué ha de suponerse que el quinto es un postulado en vez de ser como la proposición 17, un teorema?* Al respecto reconocidos matemáticos de la antigüedad intentaron modificar la definición del postulado y deducirlo como teorema a partir de los cuatro postulados anteriores.

La tarea atrajo a muchos geómetras quienes han recibido el nombre de precursores de la Geometría no Euclidiana, entre ellos figuran: Proclo (siglo V a. C.), Tabit ibn Qurra (836– 901), Omar Jayyam (1045–1130), Nasir al Din al Tusi (1201–1274), John Wallis (1616–1703), Giordano Vitali (1633–1711), Gerolamo Saccheri (1667–1733), Johann Lambert (1728–1777), John Playfair (1748–1819), Adrien Marie Legendre (11752–1833).

Gran parte de los intentos de demostración del quinto postulado realizados fracasaron, porque en ellos se sustituía implícitamente la proposición que se pretendía probar por otra equivalente. A continuación se citan algunos de estos enunciados equivalentes junto con su portavoz característico: *Una paralela a una recta dista de ella una longitud constante* (Proclo), *Existen triángulos semejantes* (John Wallis), *Existe al menos un rectángulo, esto es, un cuadrilátero cuyos ángulos son rectos* (Gerolamo Saccheri), *Si en un cuadrilátero tres ángulos son rectos, el cuarto ángulo también es recto* (Johann Lambert), *La suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos rectos* (Adrien Marie Legendre), *Por un punto dado no situado sobre una recta sólo puede trazarse una paralela a ella* (John Playfair).

2. LA OBRA DE GEROLAMO SACCHERI

En 1733 el matemático italiano Gerolamo Saccheri publica una obra titulada *"Euclides ab omni naevo vindicatus: sive conatus geometricus quo stabilintur prima ipsa universae Geometriae Principia (Milan, 1733)"*. (Bonola, R. [1], p. 26). En la que se plantea la tarea de Reivindicar a Euclides probando la inconsistencia de un sistema geométrico basado en los cuatro primeros postulados y la negación del quinto. Para ello se permite hacer uso de las primeras 28 proposiciones del libro primero de Euclides[3].

Saccheri conocía los intentos llevados a cabo por Nassir al Din, y determinó aplicar al problema el método indirecto de demostración llamado *reducción al absurdo*. Tomó como punto de partida la aserción opuesta y desarrollando las consecuencias esperaba llegar a una contradicción. Comenzó su investigación considerando una figura fundamental a la que denominó *cuadrilátero birrectángulo isósceles*, el cual se muestra a continuación:

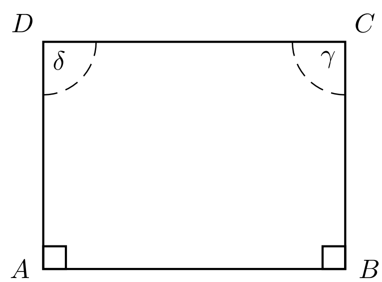

Fig.1

Mediante simples teoremas de congruencia que en nada requieren del quinto postulado demuestra que los ángulos superiores son iguales. Demostró además que si dichos ángulos son rectos, se cumple el quinto postulado de Euclides (a continuación se denotará como Vp).

Por consiguiente, negar el quinto postulado ($\sim Vp$) significa afirmar que los ángulos superiores son ambos obtusos o ambos agudos. A las alternativas de que estos ángulos sean rectos, obtusos o agudos la llamó *Hipótesis del ángulo recto* (HAR), *Hipótesis del ángulo obtuso* (HAO) e *Hipótesis del ángulo agudo* (HAA) respectivamente.

Para Reivindicar a Euclides, Saccheri intentó probar que HAO y HAA conducían a absurdos. Es decir, por reducción al absurdo se propuso demostrar HAR. De esta manera:

$$\sim Vp \;\Leftrightarrow \sim HAR \Leftrightarrow \; HAO \text{ ó } HAA$$

Todos sus intentos están consignados en su libro el cual consta de 39 proposiciones. De las cuales a nivel de la proposición 14, Saccheri descarta HAO y en la proposición 38 descarta a su modo HAA.

Se presenta a continuación las proposiciones IX y XII de Saccheri [7] fundamentales en el propósito de encontrar una contradicción que permita descartar HAO.

[3]Bonola, R. [1] asegura que Saccheri hace uso de las 26 primeras proposiciones, del libro I de Euclides, las cuales hacen parte de una geometría absoluta (independiente del quinto postulado). Sin embargo autores como J Gray [6] afirman que además de estas, Saccheri utiliza las proposiciones 27 y 28, las cuales a pesar de usar rectas paralelas, en su demostración no interviene el quinto postulado de Euclides.

Proposición IX *En todo triángulo si se cumple* HAR*,* HAO *o* HAA*, la suma de los ángulos interiores es igual, mayor o menor que dos ángulos rectos respectivamente.*
Proposición XII *En un triángulo rectángulo en* B*, si* M *es el punto medio de* $\overline{AC}$ *y* $\overline{MN} \perp \overline{AC}$ *(Fig. 2), entonces* $AN < NB$*.*

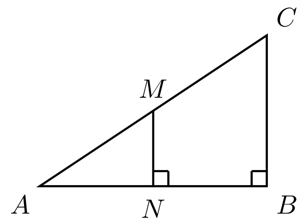

Fig. 2

A partir de ellas Saccheri prueba en su proposición XIV que *si dos rectas forman con una tercera hacia un mismo lado, ángulos internos cuya suma es menor a dos rectos, entonces las dos rectas al prolongarse deben cortarse de ese mismo lado.* Es decir Saccheri se dispone a probar el quinto postulado en base a HAO.

Dadas las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ (Fig. 3), las cuales forman con la transversal $\overline{CA}$ ángulos menores a dos rectos $\alpha + \rho < \pi$, debe probarse que $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ se cortan.

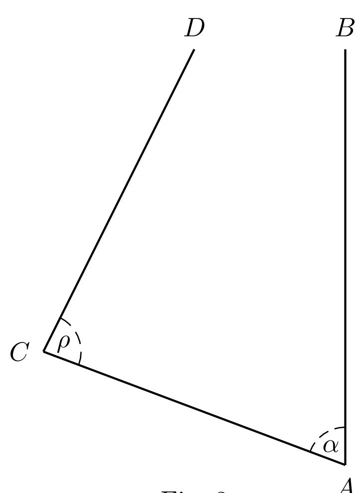

Fig. 3

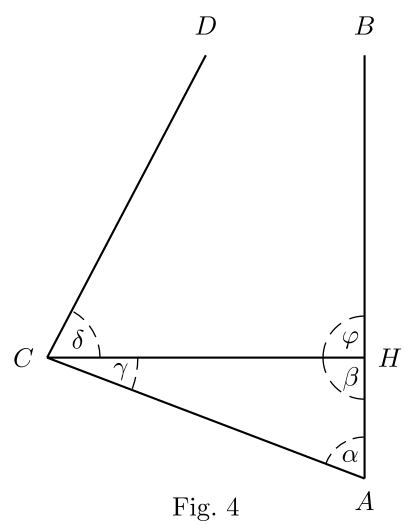

Fig. 4

Trácese $\overline{CH}$ perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ (Fig. 4) así $\rho = \delta + \gamma$, sustituyendo en la anterior desigualdad se tiene $\alpha + \delta + \gamma < \pi$, de la proposición IX de Saccheri se sigue que en $\triangle ACH$, $\alpha + \beta + \gamma > \pi$ por lo tanto:

$$\alpha + \gamma + \delta < \pi < \alpha + \beta + \gamma$$
$$\alpha + \gamma + \delta < \alpha + \beta + \gamma$$
$$\delta < \beta$$
$$\delta < \frac{\pi}{2}$$

Así δ es agudo, por consiguiente se cumple la condición del postulado de Euclides, considerando las rectas $\overleftrightarrow{CD}$ y $\overleftrightarrow{HB}$ cortadas por la transversal $\overline{CH}$ (ya que $\delta + \varphi < \pi$).

Pasa Saccheri a probar que $\overleftrightarrow{CD}$ y $\overleftrightarrow{HB}$ se cortan. Para esto toma sobre $\overleftrightarrow{CD}$ un punto M_1 y traza $\overline{M_1N_1}$ perpendicular a $\overline{CH}$ (Fig. 5), análogamente toma sobre $\overleftrightarrow{CD}$ un punto M_2 y traza $\overline{M_2N_2}$ perpendicular a $\overline{CH}$, tal que $CM_1 = M_1M_2$. En el $\triangle CN_2M_2$ se tiene que $CN_1 < N_1N_2$. Sobre $\overleftrightarrow{CD}$ toma un punto M_3 y traza $\overline{M_3N_3}$ perpendicular a $\overline{CH}$, tal que $CM_2 = M_2M_3$. De forma similar en el $\triangle CN_3M_3$ se tiene $CN_2 < N_2N_3$.

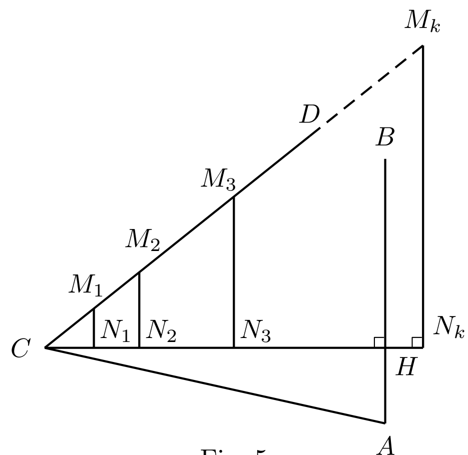

Fig. 5

Así sucesivamente, se obtiene sobre $\overleftrightarrow{CH}$ una sucesión de intervalos creciente, donde el menor de ellos es $\overline{CN_1}$. De este modo los puntos N_n se separan cada vez más de C y como $\overline{CH}$ es una distancia fija, se puede elegir N_k tal que $CN_k > CH$.

N_k es el pie de una perpendicular bajada desde un punto M_k, de este modo se forma $\triangle CN_kM_k$. Como H está en $\overline{CN_k}$, $\overleftrightarrow{HB}$ debe cortar a $\overleftrightarrow{CM_k}$ o $\overleftrightarrow{CD}$. Así se ha demostrado que $\overleftrightarrow{HB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ se cortan. Es decir se ha establecido el quinto postulado en HAO.

Es importante aclarar que la contradicción consiste en el hecho de haber deducido HAR teniendo como premisa HAO. Esto es una contradicción debido a que en las proposiciones V, VI y VII de su libro, Saccheri prueba que cada hipótesis excluye a las otras dos, es decir si en un cuadrilátero birrectángulo isósceles se satisface HAO ó HAR ó HAA entonces en todo cuadrilátero birrectángulo isósceles se tendrá HAO ó HAR ó HAA respectivamente.

Desde un punto de vista mas ligado a Euclides, se puede determinar que HAO contradice el segundo de sus postulados, pues no permite que todas las rectas tengan longitud infinita, o mas rigurosamente, que la semirrecta, que tiene origen en C y que pasa por M_1 pueda prolongarse continuamente tanto como se necesite. Sin embargo, esto último no era impedimento para que posteriormente, el matemático alemán Bernard Riemann (1826-1866) probó que existía una geometría consistente y que se acogía a HAO, con la salvedad de que las rectas debían tener longitud constante y finita.

Referencias

[1] Bonola, Roberto. *Geometrías no Euclidianas, exposición histórico-critica de su desarrollo, traducida del italiano por Arroyo*, *L.G. Madrid* **Calpe** (1923).

[2] Chaves, Andrés. *Versión crítica y comentada de la teoría de paralelas de Lobachevski en español*, Tesis de pregrado. Universidad del Valle. 2001.

[3] Espitia, Cristian Camilo. *La obra saccheriana en el surgimiento de las geometrías no euclidianas*, Trabajo de grado en proceso de sustentación. Universidad de Nariño.

[4] Euclides. *Elementos, traducción y notas de María Luisa Puertas Castaño, Madrid*, **Planeta De Agostini** (1999).

[5] Eves, Howard. *Estudio de las geometrías. México*, **Uteha** (1969).

[6] Gray, Jeremy. *Ideas de espacio*, *Madrid*, **Mondadori** (1992).

[7] Saccheri, G.(1733). *Euclides vindicatus, Editado y traducido al inglés por G.B. Halsted*, *New York* **Chelsea Publishing Company**, Primera edición (1920).

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad de Nariño

e-mail: espitiacristian@gmail.com
e-mail: ancbel@yahoo.es