Díaz e Insuasty 2021. Diseño de situaciones a-didácticas para superar un obstáculo epistemológico relativo a la noción de limite y aplicación del modelo de interacción lógico matemático. Revista Sigma, 17 (1). Páginas 8–31.

REVISTA SIGMA

Departamento de Matemáticas y Estadística

Universidad de Nariño

Volumen XVII N°1(2021), páginas 8–31

Diseño de situaciones a-didácticas para superar un obstáculo epistemológico relativo a la noción de límite y aplicación del modelo de interacción lógico matemático

Nancy Dayana Díaz Toro [1]

Edwin Insuaty Portilla [2]

Abstract: From the framework of the theory of didactic situations and a study of a cognitive type taking into account the genetic epistemology of Jean Piaget and the application of the mathematical logical interaction model, it is proposed to overcome epistemological obstacles related to the concept of limit, in particular some obstacles related to crossing the boundary identified by Sierpinska.

Keywords: limit, epistemological obstacle, theory of didactic situations.

Resumen: A partir del marco de la teoría de situaciones didácticas y de un estudio de tipo cognitivo, teniendo en cuenta la epistemología genética de Jean Piaget y la aplicación del modelo de interacción lógico matemático, se propone superar los obstáculos epistemológicos relativos al concepto de límite, en particular algunos obstáculos relacionados con el paso al límite identificados por Sierpinska.

Palabras Clave: límite, obstáculo epistemológico, teoría de situaciones didácticas.

[1]Profesora I.E.M Luis Delfín Insuaty Rodríguez (INEM - Pasto), email: nancy.d.12@hotmail.com.
[2]Universidad de Nariño, Departamento Matemáticas y Estadística, email: edwinsuasty@gmail.com.

1. Introducción

El concepto de límite es un concepto básico sobre el cual se fundamenta el cálculo diferencial e integral, también por su carácter instrumental, sirve como herramienta para la solución de problemas tanto al interior de las matemáticas como de las ciencias aplicadas. Como objeto matemático, este concepto se gesta en diferentes contextos: geométrico, aritmético, métrico, topológico y asociado a otros objetos matemáticos. Debido su complejidad, este concepto resulta ser fuente de dificultades tanto en la enseñanza como en el aprendizaje.

Uno de los problemas que acarrea, la mayoría de las veces la enseñanza tradicional de los conceptos básicos del cálculo, es el hecho de que, si bien el conocimiento adquirido por los estudiantes les puede ser útil para resolver ejercicios y problemas rutinarios (enmarcados en el dominio de la matemática misma), al momento en el que se les enfrenta a contextos y situaciones que requieren mayor conocimiento conceptual y operacional de los temas, la mayoría de los estudiantes fallan y no saben cómo abordar la situación [8].

En este sentido, se han diseñado una serie de situaciones a-didácticas que permitan descubrir los obstáculos epistemológicos ligados al concepto de límite, de tal manera que a través de estos medios didácticos se ayude a los estudiantes a superarlos. Cada una de estas situaciones presenta un estudio de tipo cognitivo teniendo en cuenta la epistemología genética de Jean Piaget, a partir del modelo de interacción lógico-matemático, con el cual se dará explicación a la forma en que los estudiantes activan sus esquemas cognitivos, en procura de lograr desarrollos exitosos que permitan la superación de los diferentes obstáculos epistemológicos del concepto de límite.

2. Referentes teóricos

En las investigaciones sobre la didáctica del cálculo, el concepto de límite tiene un lugar esencial, lo cual era de esperarse debido a la importancia del concepto en el campo de las matemáticas [1]

En [7] se menciona que existe una gran cantidad de dificultades de aprendizaje entorno al concepto de límite; por ejemplo: responder la pregunta ¿qué es el límite?, el significado de las diferentes notaciones, los significados del signo "=" en las diferentes representaciones, conflictos que causa la creencia de que los límites son una simple "sustitución", conflictos con las creencias de que las funciones no continuas no poseen límites, entre otras. Además, puesto que el cálculo tiene que ver directamente con los procesos infinitos, y es uno de los primeros conceptos en los que aparece, los conflictos de aprendizaje se hacen presentes de inmediato.

2.1. Estudios referentes a los Obstáculos Epistemológicos relativos al concepto de límite

El término obstáculo epistemológico fue utilizado por primera vez por el filósofo francés Gaston Bachelard (1884-1962) referido al dominio de las ciencias experimentales en general y de la física en particular, como residuos de conceptos anteriores que, especialmente si fueron importantes en el pasado, tienden a bloquear los cambios hacia los nuevos conceptos.

Guy Brousseau retoma la noción de obstáculo epistemológico, que Bachelard suponía confinada a las ciencias experimentales, y lo transpone dentro de la Didáctica de la Matemática en su Teoría de las Situaciones Didácticas, desarrollada a partir de 1970 [4].

Un obstáculo, señala [4], se manifiesta por errores, pero errores que no son debidos al azar, sino que son reproducibles y persistentes. Los obstáculos pueden ser de diverso origen, distinguiéndose principalmente los siguientes: ontogenético, didáctico y epistemológico. Los obstáculos de origen ontogenético se derivan de las limitaciones del alumno —neurofisiológicas, entre otras— asociadas con el momento de su desarrollo, en virtud de que cada uno genera conocimientos apropiados para sus habilidades y metas a una edad particular. Los obstáculos de origen didáctico son aquellos que se generan producto de una elección didáctica dentro de un proyecto o sistema educativo.

Por su parte, los obstáculos epistemológicos tienen su origen en los conceptos que se estudian y se encuentran presentes de forma generalizada en toda una comunidad. En este sentido, [10] explica que la oposición ejercida por los obstáculos al aprendizaje puede ocurrir a nivel de cada individuo, y dichos obstáculos o las dificultades que generan pueden en algunos casos ser muy particulares. No obstante, añade, la caracterización de un obstáculo como epistemológico está vinculada al significado de los conceptos mismos, no son simples resultados de formas particulares de su enseñanza, ni idiosincrásicos, ni algo que ocurre a una persona o dos; si el obstáculo no es sólo nuestro o tal vez de otras dos personas, sino que está más extendido, o se ha extendido alguna vez en alguna cultura, es entonces llamado obstáculo epistemológico.

Anna Sierpinska llega a la teoría de los obstáculos epistemológicos a través de la conceptualización que ella hace de “comprensión o entendimiento en matemáticas”. Acoplando el estudio histórico y la observación de dos parejas de alumnos en dos tareas: la primera preparando la identificación de la tangente como límite de una secante variable, la segunda consistente en encontrar la ecuación de la tangente de una curva representativa de la función seno en el origen, propone una lista de cinco grupos de obstáculos epistemológicos relativos a la noción de límite:

- Horror al infinito, el cual agrupa obstáculos ligados al rechazo al estatuto de operación matemática para el paso al límite, la transferencia automática de los métodos del álgebra propuesto para manipular magnitudes finitas a las magnitudes infinitas, la transferencia de las propiedades de los términos de una serie convergente a su límite, y finalmente el obstáculo que consiste en asociar el paso al límite a un movimiento físico, a una aproximación.

-Los obstáculos ligados al concepto de función: ocultación de la noción de función subyacente, restricción de una sucesión de valores, reducción monótona, no distinción de la noción de límite y de extremo inferior o inferior.

- Los obstáculos geométricos: la intuición geométrica hace “un obstáculo serio en la formulación de una definición rigurosa, tanto al impedir la determinación de aquello que comprenderse por la diferencia de dos magnitudes como por un apego de la noción de límite a la noción de extremo de un conjunto.”

- Los obstáculos lógicos: entre estos los hay de dos clases: primero los ligados a la borradura de los cuantificadores: la pérdida de apreciación del papel de los cuantificadores cuando se quiere definir el concepto de límite en la lengua natural y no simbólica; segundo, la no distinción del orden de los cuantificadores: en el lenguaje común no se pone atención al orden de las palabras que tienen consecuencia.

- El obstáculo de símbolo: es el reflejo de la no interpretación del límite como una operación.

2.2. La Teoría de las Situaciones Didácticas

La Teoría de las Situaciones Didácticas, fue desarrollada por la escuela francesa de Didáctica de las Matemáticas y toma en cuenta los fenómenos didácticos asociados a la actividad matemática, así como en los dispositivos didácticos que tienen como finalidad que el alumno se apropie de cierto conocimiento matemático. La tesis fundamental de la Teoría de Situaciones se apoya en que el sujeto necesita construir por sí mismo sus conocimientos mediante un proceso adaptativo similar al que realizaron los productores originales de los conocimientos que se quiere enseñar.

En la concepción más general de la enseñanza, el saber es una asociación entre buenas preguntas y buenas respuestas. Pues como menciona [3]: "un medio sin intenciones didácticas es claramente insuficiente para inducir al alumno en todos los conocimientos culturales que se desea que él adquiera". Por lo anterior, la concepción de Brousseau sobre la enseñanza se basa en que ésta reclama al maestro que provoque en el alumno las adaptaciones deseadas, lo cual se llevará a cabo por medio de una adecuada elección de "problemas" en las diferentes situaciones a-didácticas que se plantearán. Estos problemas deben hacerle actuar, hablar, conjeturar, reflexionar, evolucionar por motivación propia. La idea básica de Brousseau es que el proceso para adquirir un conocimiento matemático consiste de diversas facetas y se basa en "juegos" específicos, donde el actor interactúa con un ambiente a distintos niveles, evolucionando sus nociones y su lenguaje.

Ahora bien, entre el momento en que el alumno acepta el problema como suyo y aquél en el que produce su respuesta, el maestro rehúsa intervenir proponiendo los conocimientos que quiere ver aparecer. El alumno habrá adquirido el conocimiento realmente cuando él mismo sea capaz de ponerlo en acción o en situaciones que encontrará fuera del contexto escolar y sin alguna intención. Tal situación es llamada **a-didáctica**. Durante la resolución del problema, el maestro busca devolver al alumno una situación a-didáctica que provoque en él una interacción lo más independiente y lo más fecunda posible. Para ello, comunica o se abstiene de comunicar, según el caso, informaciones, preguntas, métodos de aprendizaje, heurísticas, etc. Como resultado, el maestro está implicado en un juego con el sistema de interacciones del alumno con los problemas que él le ha planteado. Este juego o esta situación más amplia es la **situación Didáctica** [3].

Tendremos por tanto que una Situación Didáctica es un conjunto de relaciones establecidas explícita o implícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio y un sistema educativo con la finalidad de que estos alumnos se apropien de un saber constituido. El medio estaría comprendido eventualmente por instrumentos y objetos mientras que el sistema educativo se apoya en la figura del profesor [2].

Así pues, la situación didáctica está constituida por una situación-problema (que vincula al alumno con el saber en tanto sujeto epistémico) y un *contrato didáctico* (que lo vincula con la intención de enseñanza en tanto sujeto didáctico). El **contrato didáctico** se puede entender como las reglas del juego y la estrategia de la situación didáctica. Es el medio que tiene el maestro de ponerla en escena [3]. Por lo tanto el docente y el alumno se involucran en un juego en la relación didáctica según las reglas que funcionan como las cláusulas de un contrato. Sin embargo, dichas reglas no tienen nada de explícito, se revelan esencialmente en la transgresión de las mismas. Además el contrato didáctico tiene la función de hacer evolucionar la significación de los contenidos, puesto que registra el envejecimiento de los contenidos enseñados y de esta manera interviene en la progresión del saber. El contrato evoluciona por una serie de pequeñas rupturas.

2.3. La Epistemología Genética

El pensamiento matemático se elabora, mediante operaciones constructivas. En este sentido, la Teoría de Piaget ofrece en la actualidad la visión más completa del desarrollo cognitivo, tanto por la gran cantidad de aspectos que aborda, como por su coherencia interna y la utilización de una metodología que ha originado resultados muy productivos. Resulta imprescindible por lo tanto conocer cómo es y cómo evoluciona el razonamiento lógico de los estudiantes al iniciar los cursos de Matemática, teniendo en cuenta los contenidos de la cognición como “elementos” que organizados de acuerdo a ciertas relaciones, encarnan en la práctica, estructuras cognitivas de todo tipo (percepciones, recuerdo, conceptos, operaciones e incluso estructuras o un “objeto cualquiera” de matemática o lógica).

En la teoría de Piaget el objeto de estudio de la Epistemología Genética es entender cómo el individuo, en su desarrollo ontogénico, va pasando de un estadio de menor conocimiento a otro de mayor conocimiento válido, es decir que el objeto de estudio es el Sujeto Epistémico (capaz de conocer).

El punto de partida del conocimiento no es ni el objeto imponiéndose al sujeto ni el sujeto imponiéndose al objeto, sino la interacción entre estos dos factores. El sujeto interactúa con el medio a través de la **acción**; que aparece en Piaget como constitutiva de todo conocimiento.

La acción es el tercer término entre **sujeto y medio**, mediante la cual se construyen ambos. Lo que en una acción es transponible, generalizable o diferenciable de una situación a la siguiente, es lo que Piaget llamará **esquemas de acción**.

Estos esquemas se construyen en la interacción, parten de las propiedades biológicas innatas que tiene el sujeto, del núcleo funcional (sistema nervioso, reflejos y los 5 sentidos) con que cuenta desde su nacimiento. Estos formaron la materia prima para la construcción de los primeros esquemas de acción que heredarán sus propiedades (generalización, discriminación y reproducción funcional), y se integrarán en diferentes estructuras sucesivas que la razón elaborará en su contacto con lo real, de manera que siempre haya un equilibrio entre medio y sujeto; entre elementos variables e invariantes; entre estructuras y funcionamientos biológicos (organización y adaptación), lo que implica que el desarrollo del conocimiento sea concebido como una sucesión de estados de equilibración. Es claro que también entrarán en juego mecanismos de desequilibración (u obstáculos perturbadores) en cada nivel y reequilibración en los nuevos niveles.

El organismo humano para Piaget, comparte dos funciones invariantes: organización y adaptación, tanto a nivel físico como psíquico. Los procesos psicológicos están organizados en sistemas los cuales están preparados para la adaptación al mundo externo. **La adaptación cognitiva** se refiere al equilibrio que se logra entre dos procesos complementarios: **asimilación y acomodación**.

Para adaptarse al mundo es necesario conocerlo. Este conocimiento posee un cierto equilibrio; sin embargo, pasa por estados de desequilibración cuando un elemento nuevo es difícil de asimilar a las estructuras cognoscitivas. Finalmente cuando el sujeto logra acomodarse a él, el organismo se re-equilibra y alcanza un estado de mayor conocimiento con respecto al mundo.

ADAPTACIÓN es, por lo tanto, un producto del equilibrio, y es el ejemplo más claro de la inteligencia en el ser humano.

LA ASIMILACIÓN es el proceso que se lleva a cabo cuando el sujeto aprehende un objeto de la realidad, el cual se integra a las estructuras pre-establecidas enfrentándose al estímulo a partir de la organización actual.

En cambio, cuando a partir de la asimilación se produce una modificación en el esquema como producto del nuevo conocimiento integrado, éste lleva a cabo un proceso de **ACOMODACIÓN** en el que modifica las estructuras actuales en función de las demandas del medio.

La asimilación es externa, ya que los objetos se moldean a la estructura interna del sujeto; la acomodación por el contrario es interna, ya que es el sujeto ahora el que se acomoda al mundo exterior. Ambos procesos constituyen la **ADAPTACIÓN** del organismo.

Asimilación y acomodación se regulan en el organismo a través de la equilibración. Aunque son invariantes, es decir, que se mantienen a lo largo del proceso evolutivo, su relación es cambiante, de modo que el sujeto construye sus estructuras a partir de un intercambio entre ambos procesos, llegando así a un estado de equilibrio que permite al organismo adaptarse mejor a su medio.

2.3.1. Modelos de interacción y ciclo de interacción cognitivo

Piaget distingue dos modelos generales de interacción con el medio: el modelo causal y el modelo lógico-matemático.

- *El conocimiento causal* se deriva de inferencias causa-efecto, producto de una mezcla de abstracciones empíricas y reflexivas, que definen la forma y el contenido de las *estructuras causales* con las cuales el sujeto se relaciona con el mundo físico.
- *El conocimiento lógico-matemático o hipotético-deductivo* es relativo a inferencias que provienen de las *acciones* u operaciones del sujeto y no de los objetos mismos. En este modelo se incluye el caso en que las inferencias se obtienen de acciones que se apoyan en objetos materiales, producto de abstracciones seudoempíricas.

Teniendo en cuenta estos modelos de interacción, el funcionamiento de los procesos cognitivos se explica en términos de *Observables y Coordinaciones.*

Piaget anota que un **observable** siempre es lo que *el sujeto cree comprobar*, tanto de sus acciones como de las acciones de unos objetos sobre otros. Es lo que los sus instrumentos de registro comprueban y no lo que un observador externo compruebe sobre las acciones o los objetos. Entonces se distinguen dos clases de observables:

1. **Obs S(n)** $\equiv$ Observables del sujeto.
   - En el modelo causal corresponden a observables relativos a las acciones del sujeto en el nivel n: aquello que se registra de las acciones.
   - En el caso del modelo lógico matemático implica una toma de conciencia de las intenciones operatorias del sujeto o de sus acciones, en el nivel n.
2. **Obs O(n)** $\equiv$ Observables del sujeto.
   - En el caso del modelo causal corresponden los observables relativos a los objetos físicos en el nivel n: *aquello que se cree registrado en el objeto.*
   - En el caso del modelo lógico matemático, los observables del objeto son *comprobaciones efectuadas en los objetos* en la medida en que estos han sido modificados por las operaciones, en el nivel n.

En el registro de los observables, está implícita la toma de conocimiento de las acciones del sujeto. Se trata de un proceso que va del objeto al sujeto:

S $\rightarrow$ O $\equiv$ SO: El sujeto sólo comprende los objetos por las inferencias obtenidas de la coordinación de sus acciones.

Por otro lado, las **Coordinaciones** se refieren a la adaptación funcional de los medios internos en términos de un propósito. La coordinación de acciones es un proceso necesario para alcanzar un objetivo e implica relacionar esquemas de acción en términos de sus respectivas contribuciones potenciales a los propósitos u objetivos de la acción.

Sin embargo, la característica esencial de las coordinaciones es la construcción de relaciones nuevas que sobrepasan los observables. Se distinguen dos clases de coordinaciones:

1. **Coord S** $\equiv$ Coordinaciones del sujeto.
   - En el modelo del conocimiento causal, se refiere a las coordinaciones inferenciales de las acciones del sujeto.
   - En el modelo lógico-matemático: [...] las coordinaciones de la acción (Coord S) representan las composiciones preoperatorias u operatorias que el sujeto proyectaba y verifica, o que descubre a posteriori, pero en los dos casos después de la comparación de los Obs O y Obs S del sujeto.
2. **Coord O** $\equiv$ Coordinaciones del sujeto.
   - Coordinaciones inferenciales de las acciones (u operaciones o conceptos) que el sujeto introduce en las relaciones entre los objetos.
   - En el caso del modelo lógico-matemático se tiene que **Coord S = Coord O**

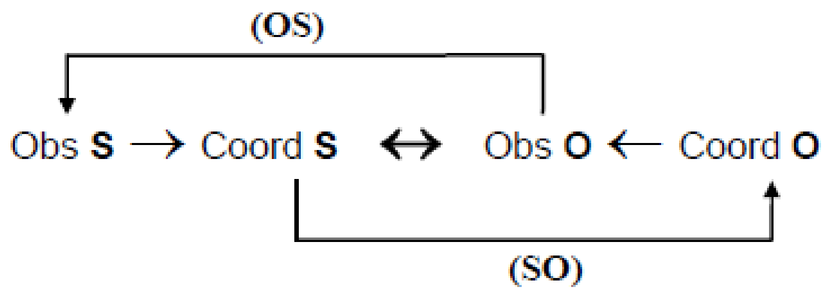
La toma de conocimiento del objeto depende de las inferencias obtenidas de las acciones del sujeto. Se trata de un proceso que va del sujeto al objeto.

S $\rightarrow$ O $\equiv$ SO: El sujeto sólo comprende los objetos por las inferencias obtenidas de la coordinación de sus acciones

Estas distinciones nos permiten llevar a cabo un **Ciclo de interacción** entre los observables del sujeto y los del objeto, así como de las coordinaciones a que dan lugar.

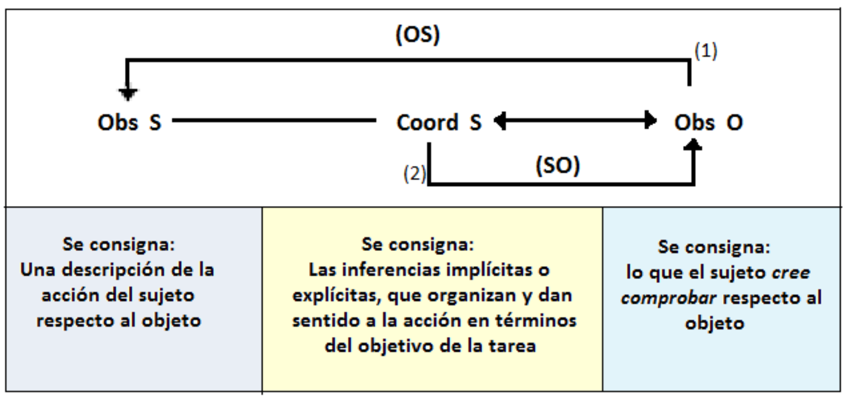
En este sentido un ciclo de interacción está representado por un Cuadro en el que se registra la información del análisis cognitivo. En este cuadro se reconstruye de manera esquemática un ciclo cognitivo que describe, la interacción en términos de los esquemas conceptuales necesarios y suficientes que el sujeto pone en juego para alcanzar el objetivo de la tarea. En cada casilla se consigna la información obtenida en términos de los observables y coordinaciones que el investigador atribuye al sujeto, a partir de sus realizaciones escritas respecto a una situación a-didáctica.

El modelo general de interacción entre los observables del sujeto y los del objeto, así, como de las coordinaciones (inferencias) a que dan lugar, es el que se presenta en la gráfica 1:



Gráfica 1: (OS) le permite al sujeto acceder al conocimiento de sus acciones por los resultados de éstas sobre los objetos. (SO) le permite comprender los objetos gracias a las inferencias que realiza de sus acciones o de las acciones entre los objetos.

En el caso del modelo lógico matemático no existen Coord O puesto que las acciones entre los objetos lógicos y matemáticos son las mismas coordinaciones de las acciones del sujeto. El modelo se reduciría a lo que se representa en la gráfica 2:



Gráfica 2: Donde (1) representa el proceso de asimilación, (2) el de acomodación y la doble flecha representa la equilibración de los dos procesos.

3. Metodología

El diseño de las situaciones a-didácticas se basa en los elementos y etapas fundamentales que postula la teoría de las situaciones teniendo como objetivo principal que las actividades propuestas sean básicamente desarrolladas por parte de los estudiantes, logrando así que éste tome la responsabilidad de su aprendizaje; dejando de ser central la figura del profesor y sus intervenciones sean mínimas. En [5] se discute el desarrollo del pensamiento matemático y se propone para ello, diseñar situaciones adidácticas en las que:

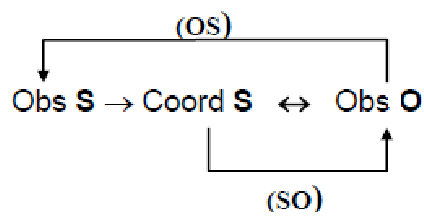
- Los alumnos se responsabilicen de la organización de su actividad al tratar de resolver el problema planteado; lo más importante es que formulen sus propios proyectos.
- La actividad de los alumnos esté orientada hacia la obtención de un resultado preciso, previamente hecho explícito por el profesor y que pueda ser identificado por los

alumnos. Los alumnos deben anticipar y luego verificar los resultados de su actividad.

- La resolución del problema planteado implica la toma de múltiples decisiones por parte de los alumnos, y la posibilidad de conocer directamente las consecuencias de sus decisiones a fin de modificarlas para adecuarlas al logro del objetivo perseguido. Lo anterior implica dejar a los alumnos trabajar a su ritmo y que intenten resolver el problema varias veces.

- Los alumnos pueden recurrir a diferentes estrategias para resolver el problema planteado, estrategias que corresponden a diversos puntos de vista sobre el problema. Es indispensable que, en el momento de plantear el problema, los alumnos dispongan de al menos de una estrategia (conocimientos previos necesarios) para que puedan comprender la consigna y comenzar su actividad de búsqueda de solución.

Para el análisis cognitivo de las situaciones a-didácticas se utiliza una adaptación del modelo de Piaget [6]. La información de la dimensión del análisis cognitivo se interpreta usando el concepto de ciclo de interacción, consignando en cada casilla la información obtenida en términos de los observables y coordinaciones que el investigador atribuye al sujeto a partir de las realizaciones respecto a una situación a-didáctica, ver gráfica 3:



Gráfica 3

4. Situaciones Fundamentales

El concepto de límite parte del concepto de función por lo tanto asumimos que los alumnos estudiaron este tema, las distintas formas de representación y las distintas propiedades.

Se introduce la noción de límite de forma numérica y gráfica, definiendo luego de manera formal el límite de una función en un punto. Se realiza un tratamiento fuertemente intuitivo recalcando su papel de herramienta para resolver problemas de variación de funciones.

Con el objetivo de resolver los obstáculos relacionados con el concepto de límite y sus diferentes representaciones y evaluar el grado de comprensión alcanzado por los alumnos se diseñó una secuencia de situaciones actividades con el fin de que el estudiante sea capaz de explicar la definición, proponer ejemplos, analizar situaciones que se le presentan y comprender algunas de las propiedades de los límites. Estas actividades diseñadas pretenden tener en cuenta esos aspectos, comenzando por las ideas más intuitivas, teniendo en cuenta los aspectos gráficos y algebraicos. En general los estudiantes deben comprender el sentido de la frase "suficientemente próximo" a un valor dado (darse cuenta que no tiene demasiado sentido analizar la situación en valores medianamente alejados del punto de análisis). Se debe tener en cuenta que el obstáculo a superar del listado de Sierpinska corresponde al paso al límite que está considerado en el grupo de obstáculos referentes al de "horror al infinito".[9] en [6].

4.1. Primera Situación Fundamental

Objetivo: Comprender la idea de límite en un punto y en infinito intuyendo el mismo dada una tabla de valores (puede ser también a partir del gráfico de una función).

Obstáculo presente:

El límite es el valor de la función en un punto "cercano".

- Esta actividad se caracteriza por descomponerse en situaciones de progresiva dificultad y secuenciadas. Para superar un obstáculo es necesario hacer el concepto o procedimiento significativo para el alumnado, es por eso, por lo que primero se pide realizar la tabla de la función, después se piden valores tan próximos a un punto como se quiera y sus respectivas imágenes para posteriormente deducir un posible candidato a límite, y controlar la distancia al mismo, por último se le demanda inducir un resultado de manera general para calcular límites de polinomios sin necesidad de depender de la tabla.

Las preguntas de estas primeras actividades involucran situaciones de acción. Por tanto, se infiere que el estudiante ha activado los esquemas de aproximación, interpretación de datos y reconocimiento de funciones.

Ejercicio 1. A partir de la tabla, responda:

x	f(x)
2,9	14,21
2,99	14,9201
2,999	14,992001
2,9999	14,99920001
....	....
3,0001	15,00080001
3,001	15,008001
3,01	15,0801
3,1	15,81

Gráfica 4

a. ¿A qué número a se aproxima x?

b. ¿A qué número L se aproxima $f(x)$?

c. Escriba una conclusión sobre el comportamiento de la función cuando x se aproxima a 3.

En esta situación si bien se busca que los alumnos logren una idea numérica del límite. No les resulta sencillo determinar a qué valor se aproxima una secuencia de números. Tienen dificultades para identificar, por ejemplo, que el número al que se aproxima x con la secuencia 2.9 , 2.99, 2.999, 2.999 o con la secuencia 3.1, 3.01, 3.001, 3.001 es 3. En general se observan dificultades para expresar verbalmente lo que está expresado en la tabla.

Este problema exige un nivel de conocimiento apropiado que les permita a los alumnos sin inconvenientes llevar a cabo la representación tabular (numérica.) La representación numérica del concepto de límite se manifiesta en el cálculo de tablas de valores de la función dada tomando valores tan próximos al punto cómo se quiera y estudiando la tendencia de las imágenes correspondientes. El sistema numérico sugiere una forma dinámica vinculada con la realidad.

Ejercicio 2. Si $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4}$ complete:

x tiende a .... →

x	1,9	1,99	1,999	1,9999
f(x)				

→ f(x) tiende a ....

← x tiende a ....

2,0001	2,001	2,01	2,1

← f(x) tiende a ....

Gráfica 5

Los alumnos deben calcular las imágenes para valores de x dados y determinar a qué valor se aproxima cada secuencia de números. Se debe tener en cuenta que los alumnos cometen más errores para encontrar a qué valor tiende la variable dependiente que para determinar a qué valores se aproxima la abscisa. Consideramos que esto se debe a la expresión de los números. Esta es una limitación del sistema numérico, además tal vez el hecho de que una tabla no proporciona suficientes valores para determinar a qué número tienden las variables o qué número es el límite. Es por ello que esta situación se puede abordar más satisfactoriamente si se complementa la actividad con la representación gráfica.

Se espera una dificultad para percibir que 1,9999... representa 2 y desligarlo de un proceso que no se detiene. Diversas investigaciones en pensamiento matemático avanzado muestran cómo muchas de las dificultades en el aprendizaje del cálculo están relacionadas con la comprensión de un concepto como proceso o como objeto. En general, los alumnos comienzan manipulando objetos físicos o mentales construidos previamente para llegar a comprender el concepto como un proceso. Llega un momento en que esta concepción es insuficiente y es necesario considerar los conceptos como objetos.

4.2. Segunda Situación Fundamental

Esta actividad plantea diferentes interrogantes buscando preparar al alumno para llegar a la definición formal de límite.

Objetivo:

- Distinguir los dos tipos de límites laterales e intuirlos dada una tabla de valores o una gráfica.
- Argumentar la existencia o no del límite de una función y determinarlo cuando sea posible a partir de sus límites laterales o por sustitución directa.

Obstáculos presentes:

Considerar a^+ y a^- puntos diferentes.

Se trata de una situación donde el estudiante podrá alternar entre la interpretación visual y la interpretación analítica; por ello, y para tener éxito en la elaboración de la estrategia ganadora, el estudiante necesitará conocer los conceptos de variable (independientes y dependientes), función, operaciones con números reales y gráfica de funciones.

Se trata de una situación adidáctica de acción que pretende que el estudiante supere el obstáculo referente al concepto de proximidad, con el fin de que note que su concepto de proximidad no es suficiente para encontrar el límite de una función. Por tanto, el objetivo de esta segunda situación es que el estudiante construya el concepto de límite activando esquemas de entorno de un punto.

Ejercicio 2. Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$

a. Determine su dominio.

b. Complete:

x	2,9	2,99	2,999	2,9999
f(x)				

3,0001	3,001	3,01	3,1

c. Represente gráficamente la función.

d. Considere el intervalo $(6 - \frac{1}{2}, 6 + \frac{1}{2})$ alrededor de $y = 6$. Encuentre un intervalo abierto sobre el eje x alrededor de $x = 3$ que verifique que para cualquier x de ese intervalo, salvo quizás para 3, sus imágenes se encuentran en el intervalo dado. Interprete gráficamente.

e. Realice el mismo procedimiento que en el inciso c) con el intervalo $(6 - \frac{1}{4}, 6 + \frac{1}{4})$. ¿El intervalo encontrado es mayor o menor que el anterior? Interprete gráficamente.

f. Considere ahora el intervalo $(6 - \frac{1}{10}, 6 + \frac{1}{10})$. ¿Qué puede observar?

g. ¿Podría repetir el procedimiento con cualquier intervalo que incluya a 6?

Para continuar realizando las actividades, se presenta la siguiente definición en conclusión al trabajo realizado en las situaciones anteriores:

Definición: El límite de la función $f(x)$ cuando x tiende al número real a es igual al número real L si al aproximarse x a a por la izquierda y por la derecha, siendo $x \neq a$, resulta que $f(x)$ se aproxima o incluso es igual a L. Se escribe: $\lim_{x \to a} f(x) = L$

Ejercicio 4: Sea $g(x) = \dfrac{6x - 6}{x^3 - 1}$

Nos aproximamos a 1 con valores de x menores que 1 $(x \to 1^-)$

x	0.2	0.5	0.9	0.99	0.995
g (x)					

Nos aproximamos a 1 con valores de x mayores que 1 $(x \to 1^+)$

x	1.8	1.5	1.1	1.01	1.005
g (x)					

a. Complete las tablas (utilice seis cifras decimales)

b. Emplee los resultados de la tabla para sacar conclusiones respecto a los valores de la función en las proximidades de 1.

c. Exprese en palabras el resultado del trabajo efectuado en los puntos anteriores y formalice esas palabras mediante la operación límite.

d. ¿Qué puede decir del valor de g en $x_0 = 1$?

La notación $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$ se utiliza para indicar el límite lateral por derecha y expresa el valor al que se aproxima $f(x)$ cuando x tiende a a tomando valores mayores que a, es decir valores que se encuentran a su derecha. La $\lim_{x\to a} f(x) = L$ se utiliza para indicar el límite lateral por izquierda y expresa el valor al que se aproxima $f(x)$ cuando x tiende a a tomando valores menores que a, es decir valores que se encuentran a su izquierda. Para que exista el límite de una función, deben existir los límites laterales y ser iguales.

Ejercicio 5: Grafique en cada caso una función que cumpla las condiciones siguientes:

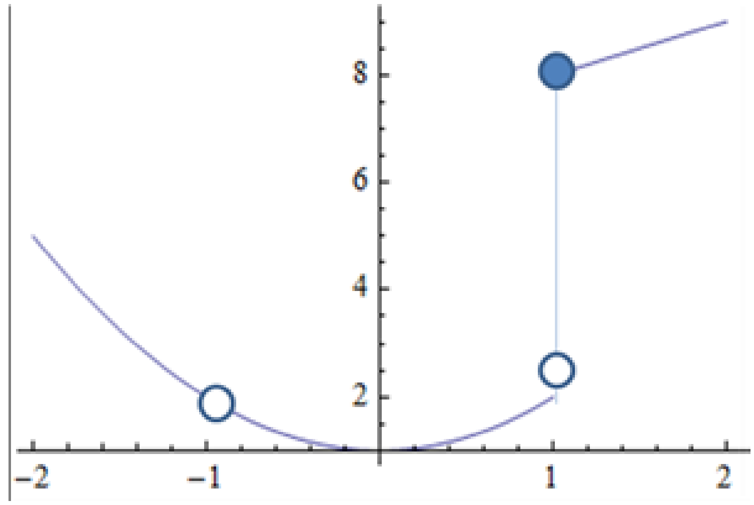
a. Dominio el conjunto de los números reales y que no tenga límite en $x = -2$.

b. Dominio el conjunto de los números reales excepto $x = 3$ que tenga límite en ese punto.

c. Dominio el conjunto de los números reales excepto $x = 2$ que tenga límite en $x = 1$ y no en $x = 2$.

En estas actividades se relacionan los sistemas de representación verbal, simbólico y gráfico. Se busca que los alumnos se familiaricen con la idea de límite, sean capaces de representar funciones con o sin límite y de distinguir entre el límite y el valor de una función en un punto.

Ejercicio 6: Teniendo en cuenta la siguiente gráfica responde a las siguientes cuestiones:



a. Calcula $f(-1)$, $f(1)$ y $f(0)$.

b. Calcula si existe $\lim_{x\to -1} f(x)$, $\lim_{x\to 1} f(x)$ y $\lim_{x\to 0} f(x)$

c. Calcula $\lim_{x\to 1^+} f(x)$, $\lim_{x\to 1^+} f(x)$.

4.3. Tercera Situación Fundamental

Reforzar el conocimiento adquirido en la situación fundamental anterior e introducirlo en la nueva noción de entorno. Se aclara que el alumno ya conoce la definición de distancia entre dos puntos.

La definición delta-épsilon de límite de una función en general no es comprendida cabalmente por los estudiantes, quienes frecuentemente separan lo conceptual de lo algorítmico. Las actividades a desarrollar por los alumnos permitirán descubrir las exigencias o condiciones para la existencia del límite en términos de ε.

Esta situación, es quizás la más importante de las aquí presentadas, pues trata de mostrar al estudiante que lo encontrado en las dos situaciones anteriores, conlleva a la formalización del concepto de límite de una función, partiendo de la noción de entorno. Entonces esta situación tiene carácter de formulación y validación, donde el estudiante de manera independiente deberá alcanzar los logros necesarios al responder a las preguntas planteadas en las situaciones anteriores de forma acertada.

En este caso, deberá comprobar que sus definiciones son coherentes y acertadas respecto al esquema conceptual de límite, es decir, confirmar que efectivamente ha encontrado la estrategia ganadora y que puede ser generalizada al pasar del concepto puntual al concepto global; es decir, que al encontrar esta estrategia ganadora el estudiante fue consciente de que se desarrollaron actividades que le permitieron llegar a una formalización del concepto de límite. En el momento de formalizar la definición les resultará más simple expresar la proximidad mediante notación de entorno o bien empleando desigualdades sin valor absoluto.

Definición: Se llama entorno con centro en x y radio δ a cualquier intervalo abierto de la forma $(x-\delta,\, x+\delta)$ y se simboliza: $N\delta(x)$.

Ejercicio 7: Complete la siguiente tabla de manera que cada fila contenga expresiones equivalentes:

Como intervalo	Como entorno	Como notación de valor absoluto
	$x \in N(-5\,,3)$	
$x \in (-6\,,4)$		
		$0 < \mid x\ -\ 3 \mid < 1$
	$x \in N(3{,}0.02)$	
$x \in (a-\delta, a+\delta) - \{a\}$		
		$\lvert f(x) - L\rvert < \varepsilon$

Ejercicio 8: Dada la función $f(x) = \dfrac{x}{2} + 1$

a. Obtener analíticamente el radio δ del entorno de x de modo que los valores de $f(x)$ pertenezcan al entorno $N(3, \frac{1}{2})$

b. Obtener analíticamente el radio δ del entorno de x si se quiere que $f(x)$ pertenezca al entorno $N(3, 0.2)$

c. Obtener analíticamente el radio δ del entorno de x si se quiere que $f(x)$ pertenezca al entorno $N(3, \varepsilon)$

d. Indique con una implicación la relación que se cumple entre el entorno de x obtenido y el entorno de $f(x)$ dado.

Ejercicio 9: Para el gráfico de la función:

a. Obtener gráficamente el radio δ del entorno de x de modo que los valores de $f(x)$ correspondientes pertenezcan $N(L, \frac{1}{2})$

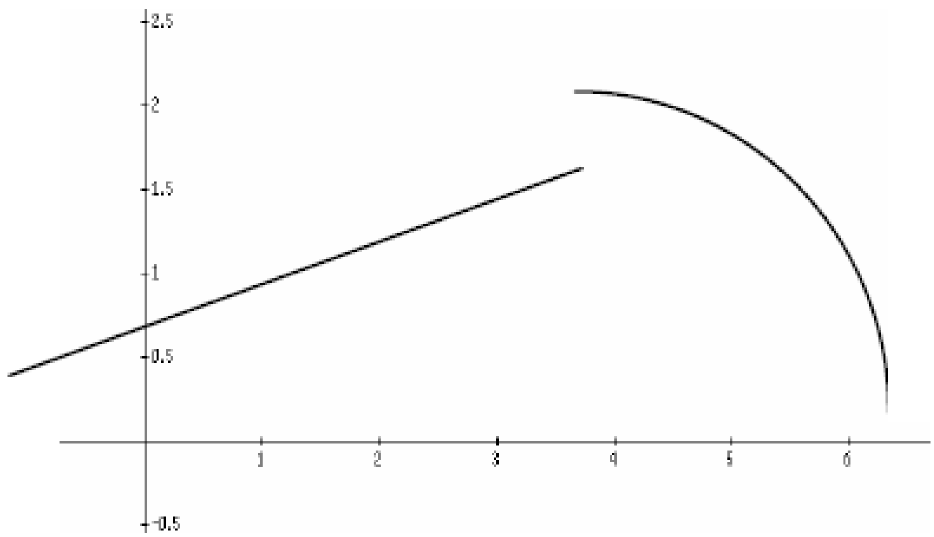
b. Obtener gráficamente δ de modo que se cumpla la implicación:
I) $\forall\ x$ tal que $x \in N(4, \delta) \to f(x) \in N(L, 0.2)$
II) $\forall\ x$ tal que $0 < |x - 4| < \delta \to |f(x) - L| < 0.1$

Se trabaja en estas situaciones con la transición de la notación de entorno a la de intervalo, se analiza el trabajo de los problemas, que agregan las notaciones de desigualdad y valor absoluto. Las últimas actividades son las que dejan preparado el camino para formalizar una aproximación en forma simbólica.

El estudiante utilizará la definición de entorno para definir el concepto de proximidad. La posesión de estos elementos que se han desarrollado en estas situaciones didácticas y su organización exitosa debe conducir a la reformulación de la frase en términos de:

(a) entornos:
$(\forall N_\varepsilon(L))(\exists N_\delta(p)(\forall x \in D_f(x \neq p, x \in N_\delta(p) \to f(x) \in N_e(L))))$

(b) distancia:
$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0(\forall x \in D_f(0 < |x - p| < \delta \to |f(x) - L| < \varepsilon)))$



5. Ciclos De Interacción Cognitiva

A continuación, se presentan los ciclos de interacción cognitiva, correspondientes a cada uno de los literales de cada situación, teniendo en cuenta los aspectos propuestos en la metodología. Es decir, en estos ciclos se consignarán las informaciones obtenidas en términos de los observables y coordinaciones que atribuimos al sujeto a partir de sus realizaciones escritas en las diferentes situaciones.

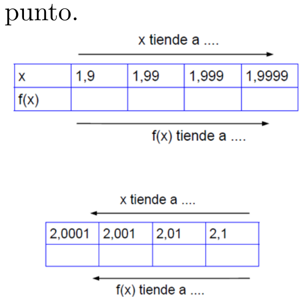
PRIMERA SITUACIÓN

Ejercicio 1:

<table>
<tr><th>Obs. S</th><th>Coord. S</th><th>Obs. O</th></tr>
<tr>
<td>La acción de identificar que el valor que se aproxima a la secuencia de números de x es 3.</td>
<td>Los esquemas de acción del estudiante, utilizados en situaciones previas (relacionadas u alcanzadas por la experiencia), determinan el marco de la formulación aproximarse a. El estudiante reflexiona sobre sus acciones y toma conciencia de los elementos que las intervienen y determinan su ejecución.</td>
<td>La acción de identificar que el valor que se aproxima a la secuencia de números de x es 3.
<table>
<tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr>
<tr><td>2,9</td><td>14,21</td></tr>
<tr><td>2,99</td><td>14,9201</td></tr>
<tr><td>2,999</td><td>14,992001</td></tr>
<tr><td>2,9999</td><td>14,99920001</td></tr>
<tr><td>.............</td><td>............</td></tr>
<tr><td>3,0001</td><td>15,00080001</td></tr>
<tr><td>3,001</td><td>15,008001</td></tr>
<tr><td>3,01</td><td>15,0801</td></tr>
<tr><td>3,1</td><td>15,81</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>La acción de tomar el punto $L = 15$ como valor próximo de los valores de $f(x)$.</td>
<td>Verifica a través del cálculo de tabla de valores a que valor se aproxima la función para estudiar de manera intuitiva el concepto de límite</td>
<td>Visualización de una tabla en la que se pide identificar que la función $f(x)$ se aproxima a 15
<table>
<tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr>
<tr><td>2,9</td><td>14,21</td></tr>
<tr><td>2,99</td><td>14,9201</td></tr>
<tr><td>2,999</td><td>14,992001</td></tr>
<tr><td>2,9999</td><td>14,99920001</td></tr>
<tr><td>.............</td><td>...........</td></tr>
<tr><td>3,0001</td><td>15,00080001</td></tr>
<tr><td>3,001</td><td>15,008001</td></tr>
<tr><td>3,01</td><td>15,0801</td></tr>
<tr><td>3,1</td><td>15,81</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Establecer que 3 es el número al cual se cual se acercan la secuencias 2.9, 2.99, 2.999, 2.999 y 3.1, 3.01, 3.001, 3.0001.</td>
<td>Establece un criterio que permita decidir el comportamiento de la función: En la tabla conforme x se aproxima cada vez más a 3, más cerca estará $f(x)$ a 15</td>
<td>Se presenta una tabla en la que se pide identificar que la función $f(x)$ se aproxima a 15 cuando x se aproxima a 3. Se pide de justificar la respuesta
<table>
<tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr>
<tr><td>2,9</td><td>14,21</td></tr>
<tr><td>2,99</td><td>14,9201</td></tr>
<tr><td>2,999</td><td>14,992001</td></tr>
<tr><td>2,9999</td><td>14,99920001</td></tr>
<tr><td>.............</td><td>...........</td></tr>
<tr><td>3,0001</td><td>15,00080001</td></tr>
<tr><td>3,001</td><td>15,008001</td></tr>
<tr><td>3,01</td><td>15,0801</td></tr>
<tr><td>3,1</td><td>15,81</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>

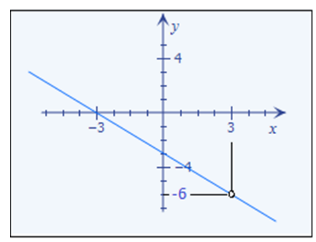
Ejercicio 2:

<table>
<tr><th>Obs. S</th><th>Coord. S</th><th>Obs. O</th></tr>
<tr>
<td>La acción de calcular las imágenes para valores de x dados y determinar a qué valor se aproxima cada secuencia de números</td>
<td>Se activa el esquema de “estar próximo a” un punto como se quiera y sus respectivas imágenes para posteriormente deducir un posible candidato a límite (2), y controlar la distancia al mismo</td>
<td>Visualización de las tablas para comprender que el límite es lo que ocurre cerca del punto y no en el punto.


</td>
</tr>
</table>

SEGUNDA SITUACIÓN: Esta actividad es muy importante y en ella se plantean diferentes interrogantes buscando preparar al alumno para llegar a la definición formal de límite.

Ejercicio 3:

<table>
<tr><th>Obs. S</th><th>Coord. S</th><th>Obs. O</th></tr>
<tr><td>La acción de identificar el conjunto de los números reales que determinan el dominio de la función dada.</td><td>Considera su esquema de acción sobre la noción de dominio de una función, como de x (números reales) para los que se puede calcular la imagen $f(x)$.</td><td>El conjunto de todos los números reales excepto $x = 3$ es el dominio de la función:
$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$</td></tr>
<tr><td>La acción de calcular las imágenes para valores de x dados y determinar qué valor se aproxima cada secuencia de números.</td><td>Se activa el esquema de interpretación de datos y de “estar próximo a” un punto como se quiera y sus respectivas imágenes para posteriormente deducir un posible candidato a límite $(-6) >$, y controlar la distancia al mismo</td><td>Visualización de las tablas de valores a modo de orientación sobre cuál es el candidato a límite (-6).
<table><tr><td>x</td><td>2,9</td><td>2,99</td><td>2,999</td><td>2,9999</td></tr><tr><td>f(x)</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>
<table><tr><td>3,0001</td><td>3,001</td><td>3,01</td><td>3,1</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Identificar que se pide bosquejar la gráfica de la función en el conjunto de todos los números reales excepto $x = 3$</td><td>Al utilizar el registro gráfico el estudiante podrá observar claramente que las funciones dadas cumplen que el valor del límite cuando x tiende a 3 es igual a -6, independientemente que la función esté o no definida en ese punto.</td><td>Se pide visualizar el gráfico de la función
$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

</td></tr>
<tr><td>La acción de intuir dada una tabla de valores o una gráfica los dos tipos de límites laterales, construyendo el concepto de límite a través de intervalos.</td><td>Se activa el esquema de entorno de un punto, para reconocer la arbitrariedad de la cercanía de las imágenes de la función respecto del límite restringiendo los valores de x a un intervalo de punto de estudio del límite.</td><td>Visualización de la construcción de intervalos cada vez más pequeños y así poder observar lo que sucede con su imagen.</td></tr>
</table>

Ejercicio 4:

Obs. S	Coord. S	Obs. O

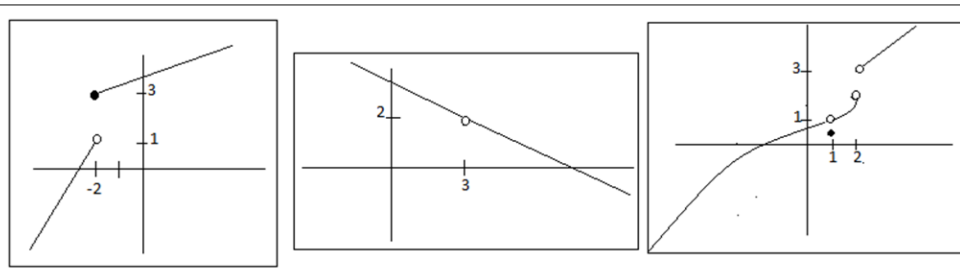
<table>
<tr>
<td>La acción de evaluar los valores de x en la función para tomar el punto $L = 2$ como valor próximo de los valores de $g(x)$.</td>
<td>Se activa el esquema de interpretación de datos y de aproximación a 1, por derecha y por izquierda con seis cifras decimales, y sus respectivas imágenes para deducir que el candidato a límite es 2.</td>
<td>Visualización de las tablas de valores a modo de orientación para determinar que el candidato a límite 2.
Nos aproximamos a 1 con valores de x menore que 1 $(x \to 1^-)$
<table>
<tr><td>x</td><td>0.2</td><td>0.5</td><td>0.9</td><td>0.99</td><td>0.995</td></tr>
<tr><td>g (x)</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
Nos aproximamos a 1 con valores de x mayores que 1 $(x \to 1^+)$
<table>
<tr><td>x</td><td>1.8</td><td>1.5</td><td>1.1</td><td>1.01</td><td>1.005</td></tr>
<tr><td>g (x)</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Encontrar el punto L como valor próximo de los valores de $f(x)$</td>
<td>Pone énfasis en el análisis efectuado sobre algunos elementos del entorno reducido del punto que se deducen de la tabla de valores para luego emitir una respuesta sobre el valor del límite analizando únicamente las imágenes de dichos puntos, teniendo en cuenta que el limite a derecha de 1 y el limite a izquierda de 1 es 2.</td>
<td>Encuentra que en la función g, al hacer la aproximación a 1, con valores de x menores que 1 en una tabla, y con valores de x mayores que 1 en la otra con seis cifras decimales, obtiene que las respectivas imágenes de g, deducen que el candidato a límite es 2.</td>
</tr>
</table>

La acción de deducir que para que el límite de una función exista, deben existir los límites laterales y ser iguales.	Formula el concepto de límites laterales de la función g(x), donde $$\lim_{x\to 1^+} \frac{6x-6}{x^3-1} = 2$$ expresa el valor al que se aproxima $g(x)$ cuando x tiende a 1 tomando valores mayores que 1, es decir valores que se encuentran a su derecha y $$\lim_{x\to 1^-} \frac{6x-6}{x^3-1} = 2$$ Se utiliza para indicar el límite lateral por izquierda y expresa el valor al que se aproxima $g(x)$ cuando x tiende a 1 tomando valores menores que 1, es decir valores que se encuentran a su izquierda. para que exista el límite de una función, deben existir los límites laterales y ser iguales, por tanto, el límite de $g(x)$ cuando x tiende al número real 1 deduciéndolo como el número real $L = 2$ si al aproximarse x a 1 por la izquierda y por la derecha, siendo $x \neq 1$, resulta que $g(x)$ es igual a $L = 2$. Se escribe: $$\lim_{x\to 1} \frac{6x-6}{x^3-1} = 2$$	Se presentan los límites laterales de la función: La notación $\lim_{x\to 1^+} \frac{6x-6}{x^3-1} = 2$ se utiliza para indicar el límite lateral por derecha y el $\lim_{x\to 1^-} \frac{6x-6}{x^3-1} = 2$ se utiliza para indicar el límite lateral por izquierda. Y observa que para que exista el límite de una función, deben existir los límites laterales y ser iguales.

Identifica que hay 4 afirmaciones relacionadas con el valor de g en $x_0 = 1$	Asocia el análisis anterior con el cálculo del límite de la función g en el punto $x_0 = 1$ para caracterizar esta situación.	Se presentan las siguientes afirmaciones: 1) la función $g(x)$ está definida para todo x, excepto para $x = 1$. 2) El dominio de $g(x)$ es el conjunto de números reales excepto 1. 3) Cuando $x = 1$ tanto el numerador como el denominador son 0 y $\frac{0}{0}$ no está definido. 4) El contradominio de g es el conjunto de todos los números reales excepto 2.

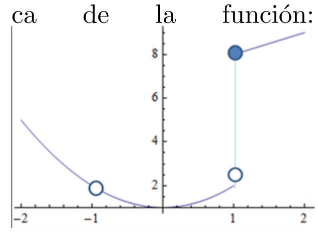
Ejercicio 5:

Obs. S	**Coord. S**	**Obs. O**
La acción de calcular en cada situación, la gráfica de la función que cumpla las siguientes condiciones: a) Dominio el conjunto de los números reales y que no tenga límite en $x = -2$. b) Dominio el conjunto de los números reales excepto $x = 3$ que tenga límite en ese punto. c) Dominio el conjunto de los números reales excepto $x = 2$ que tenga límite en $x = 1$ y no en $x = 2$.	Asocia el ejercicio anterior con la representación de funciones con o sin límite y distinguir entre el límite y el valor de la función en un punto. Es posible que use diferentes criterios para la realización de la gráfica. Podría por ejemplo, definir para las gráfica elegida, una función a trozos, con el fin de establecer la existencia o no del límite, que cumpla las condiciones pedidas.	Se pide que represente gráficamente tres funciones Y que identifique en ellas la existencia de límite de acuerdo a las condiciones establecidas.



Son algunos ejemplos propuestos.

Ejercicio 6:

Obs. S	**Coord. S**	**Obs. O**
La acción de identificar el valor de la función en los puntos establecidos o establecer que no existen: $$f(-1), f(1), f(0)$$.	Los esquemas de acción del estudiante, utilizados en los ejercicios anteriores determinan la toma conciencia de los conceptos adquiridos y su aplicación correcta en las situaciones de calcular la existencia o no del límite indicado y/o el valor de la función en los puntos establecidos.	Se visualiza la gráfica de la función:  donde el valor de la función en los puntos establecidos es: $f(-1) =$ No $f(1) = 8$ $f(0) = 0$
La acción de calcular el límite indicado o establecer que no existe para la gráfica de la función f: $$\lim_{x\to 1} f(x), \lim_{x\to -1} f(x), \lim_{x\to 0} f(x)$$		$\lim_{x\to 1} f(x) =$ no existe $\lim_{x\to -1} f(x) = 2$ $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$
La acción de calcular los límites laterales: $$\lim_{x\to 1^-} f(x), \lim_{x\to 1^+} f(x)$$		$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2,5$ $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 8$

TERCERA SITUACIÓN

DEFINICIÓN: Se llama entorno con centro en x y radio δ a cualquier intervalo abierto de la forma $x - \delta$, $x + \delta$ y se simboliza: $N\delta(x)$.

Ejercicio 7,8,9:

Obs. S	**Coord. S**	**Obs. O**
La acción utilizar las definiciones de entorno y distancia para definir el concepto de limite.	Los esquemas de acción del estudiante adquiridos a lo largo de este proceso, se refuerza con la introducción de la noción de entorno.	Se pide analizar los problemas que presentan las notaciones de desigualdad, y valor absoluto. Se visualizan las condiciones para la existencia de límite en términos de épsilon ε, para formalizar el concepto de límite de una función partiendo de la noción de entorno.

Identifica que debe definir el concepto de límite de una función en término de entornos y distancia	Debe escribir las definiciones del concepto de límite de función: (a)entornos: $(\forall N_{\varepsilon}(L))(\exists N_{\delta}(p)(\forall x \in D_f(x \neq p, x \in N_{\delta}(p) \to f(x) \in N_e(L))))$ (b)distancia: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0(\forall x \in D_f(0 < \|x-p\| < \delta \to \|f(x)-L\| < \varepsilon)))$	Se pide dar la definición del concepto de límite de una función.

6. Comentarios

- Los obstáculos epistemológicos no son obstáculos para una correcta o incorrecta comprensión: permiten un cambio en la estructura de la mente. Así que podemos introducir a los estudiantes en una nueva situación o problema y esperar que emerjan toda clase de dificultades, malas comprensiones y obstáculos y precisamente esta es una de nuestras principales tareas como profesores, ayudar a los estudiantes a superarlos, a ser conscientes de las diferencias, entonces los estudiantes quizá puedan hacer sus propias reorganizaciones.
- Avanzar en la identificación de los factores y fenómenos didácticos que influyen en la comprensión, por parte de los estudiantes, del concepto de límite, dentro del marco de la teoría de las situaciones didácticas, permite superar algunos obstáculos epistemológicos relativos al concepto de límite. Superar obstáculos no significa cambiarse a otro sistema de creencias o a otro esquema de pensamiento más persistente y más creíble, sino más bien en cambiar su estatus a una forma posible de ver las cosas, una actitud posible, un método localmente válido para aproximarse a los problemas.
- En lo referente al modelo lógico matemático, la teoría de Piaget da a conocer los ciclos de interacción cognitivo los cuales nos orientan en conocer como es la forma en que los estudiantes activan sus esquemas cognitivos, en procura de lograr desarrollos exitosos en su proceso de aprendizaje. En particular, permiten observar los esquemas que dirigen las acciones de los estudiantes en las distintas situaciones y el estado de comprensión del concepto de límite de función, con el fin de superar los obstáculos epistemológicos que conlleva este concepto, teniendo en cuentas las situaciones didácticas planteadas.

Referencias

[1] Artigue, M. (1995). Ingenieria didactica. En Gomez P. (ed). *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* Mexico: Grupo editorial Iberoamericano. 9

[2] Brousseau, G. (1982). À *propos dingénierie didactique.* Univ. de Bordeaux. 11

[3] Brousseau, G. (1986). *Fundamentos y métodos en Didáctica de las matemáticas.* Traduccion Julia Centeno. Documento bajado de Internet. 11

[4] Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics.* En Balacheff, N. y col. (Eds) Kluwer Academic Publishers. 10

[5] Cantoral, R. (2000). *El futuro del cálculo infinitesimal.* Mexico, D.F., Mexico: Editorial Iberoamerica. 15

[6] Delgado, C. (1998). *Estudio microgenético de esquemas Conceptuales asociados a definiciones de Límite y continuidad en universitarios de Primer curso*. Tesis de Doctorado. Universidad Autónoma de Barcelona. Bellaterra. 16, 31

[7] Hitt, F.; Paéz, R. (2004). *On the limit concept in a cooperative learning environment: A case study. Proceedings PME-NA XXVI,* Toronto, Canadá, 2004, Vol. 1. 9

[8] Selden, J.; Mason, A. y Selden, A. (1994). *Even good calculus students cant solve non-routine problems.* En Moreno, M. (2005). *El papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo: evolución, estado actual y retos futuros,* Departament de Matemática (UdL). 9

[9] Sierpinska, A. (1985). Obstacles Épistémologiques Relatifs à la Notion de Limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol 6, Nº 1. En [6]. *Estudio microgenético de esquemas Conceptuales asociados a definiciones de Límite y continuidad en universitarios de Primer curso.* Tesis de Doctorado. Universidad Autónoma de Barcelona. Bellaterra. 16

[10] Sierpinska, A. (1992). *On Understanding the Notion of Function.* En: Harel G. y Dubinsky E. (Eds.), MAA Notes, vol. 25, *The Concept of Function, Aspects of Epistemology and Pedagogy,* pp. 25-58. E.U.A.: Mathematical Association of America. 10