Recalde L. & Valencia C. 2009. Los axiomas de la cantidad de Hölder y la fundamentación del continuo lineal. Revista Sigma, 9 (1). Pág. 7-19.
http://coes.udenar.edu.co/revistasigma/articulos/articulosIX1/2.pdf

REVISTA SIGMA
Departamento de Matemáticas
Universidad de Nariño

Volumen IX (2009), páginas 7–19

Los axiomas de la cantidad de Hölder y la fundamentación del continuo lineal

Luis Cornelio Recalde[1]
Claudia Valencia[2]
Universidad del Valle

Abstract. In this article we studied some aspects of the theory of the amount developed by the German mathematician Otto Hölder in 1901. In particular, the axioms of the amount of Hölder are described and it is related to the arithmetical construction of the real numbers based on the cuts of Dedekind.

Keywords. Numbers real, continuous aristotelian, continuous geometric, continuous arithmetic, cuts of Dedekind, axioms of the amount.

Resumen. En este artículo se estudian algunos aspectos derivados de la teoría de la cantidad desarrollada por el matemático alemán Otto Hölder en 1901. En particular, se describen los axiomas de la cantidad de Hölder y se analiza su relación con la construcción aritmética de los reales soportada sobre las cortaduras de Dedekind.

Palabras Clave. Números reales, continuo aristotélico, continuo geométrico, continuo aritmético, cortaduras de Dedekind, axiomas de la cantidad.

Introducción [3]

Históricamente, uno de los problemas centrales que movilizó a los matemáticos del siglo XIX fue la fundamentación del continuo matemático. Éste es un problema milenario que hunde sus raíces en la antigüedad griega. Los primeros desarrollos sistemáticos al respecto aparecen en la *Física*, la *Lógica* y la *Metafísica* de Aristóteles, quien considera la matemática como la ciencia de la cantidad; las cantidades pueden ser discretas ó continuas. Las cantidades discretas corresponden a los números y las cantidades continuas a las magnitudes.

Para Aristóteles la naturaleza íntima del continuo no la constituyen los indivisibles (puntos), pues no es posible obtener algo con longitud (los segmentos) a partir de la adición de

[1] Docente tiempo completo Universidad del Valle
[2] Matemática Egresada de la Universidad del Valle
[3] Artículo elaborado en el marco de la investigación "La construcción histórica de los números reales en la perspectiva de la formación de docentes", realizada con apoyo de COLCIENCIAS, proyecto 1106-11-17688.

elementos sin longitud (los puntos). Euclides no define de manera explícita la noción de continuo, ni los conceptos de cantidad y magnitud; tampoco define lo que significa la operación de medir. Sin embargo sigue los delineamientos aristotélicos respecto a la naturaleza de las cantidades.
Durante muchos siglos, la línea recta fue considerada como el prototipo de continuo; el problema de caracterizarlo analíticamente se transformó, en el siglo XIX, en el problema de construir un cuerpo numérico completo. En este sentido el continuo aritmético estaría determinado por el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$.
Cantor y Dedekind presentaron dos de las más relevantes construcciones de $\mathbb{R}$. Cantor lo hace mediante sucesiones de racionales y Dedekind a través de cortaduras en los racionales. Una vez establecidos los números reales, Cantor y Dedekind debieron incorporar dos axiomas básicos que relacionaran sus construcciones con el continuo geométrico.
En 1901, el matemático alemán Otto Hölder muestra que la relación entre lo geométrico y lo aritmético corresponde a la conexión entre los procesos de medir y contar. Para materializar esta conexión, Hölder establece una axiomática de las cantidades. Primero muestra la concordancia entre su axiomática de las cantidades y la construcción de $\mathbb{R}$; luego la relación directa entre esta axiomática y la recta geométrica a partir de la noción de longitud de segmentos.
Estos aspectos aparecen dilucidades en [10] y [11] de Joel Michell y Catherine Ernest de la Universidad de Sydney, en los cuales se hace un estudio preliminar y luego la traducción al inglés del documento: Hölder, O. (1901). Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Mass. *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sachsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig*, Mathematische-Physicke Klasse, 53, 1-64. En este artículo analizaremos únicamente [10], en el que Hölder interrelaciona su teoría de las cantidades con la construcción de $\mathbb{R}$ a partir de las cortaduras de Dedekind.

1. La axiomática de Hölder

Para Hölder, la base formal de una teoría matemática reposa sobre el método axiomático. Eso significa que el tratamiento de las cantidades debe regirse por una serie de axiomas básicos denominados *axiomas de cantidad*.
Aunque Hölder no lo hace explícito, es claro que la selección de sus axiomas se corresponde con la evolución de la noción de cantidad desde los antiguos hasta la época moderna.
La teoría de cantidades de Hölder se inscribe en la corriente formalista, en la cual los objetos no se definen, sino que se caracterizan a través de un corpus axiomático. Se parte, entonces de unos objetos llamados magnitudes, en los cuales se ha definido la suma y una relación de orden. Si se designan por letras mayúsculas las magnitudes, Hölder plantea los siguientes axiomas:

Axioma 1: $\forall A, B(A = B \vee (A > B \wedge B < A) \vee (A < B \wedge B > A)$

Axioma 2: $\forall A \exists B(B < A)$

Axioma 3: Para cada par ordenado, no necesariamente diferente, de magnitudes A y B, la suma $A + B$ es bien definida.

Axioma 4: $\forall A, B(A < B \longrightarrow (A < A + B \wedge B < A + B)$

Axioma 5: $\forall A, B(A < B \longrightarrow (\exists X(A + X = B) \wedge \exists Y(Y + A = B))$

Axioma 6: $\forall A, B, C((A + B) + C = A + (A + C))$

Axioma 7: Todas las magnitudes son divididas en dos clases tales que cada magnitud pertenece a una y sólo una clase, ninguna clase es vacía y toda magnitud de la primera clase es menor que cada magnitud en la segunda clase, entonces existe una magnitud A tal que cada $B < A$ pertenece a la primera clase y cada $C > A$ pertenece a la segunda clase. La magnitud A puede pertenecer a cualquiera de las dos clases.

A partir de los primeros seis axiomas Hölder deduce cinco propiedades de las magnitudes con el fin de dotarlas de una estructura numérica.

P.1 Transitividad: Si $A < B$ y $B < C$, se tiene que $A < C$.

P.2 Sean $A < B$ y $C < D$, entonces $A + C < B + D$

P.3 Densidad: Si $A < B$, existe una magnitud una magnitud mayor que A y menor que B.

P.4 Infinitas en crecimiento: Dada una magnitud a existe una magnitud mayor que ella, en particular, $A + A > A$.

P.5 La magnitud X del axioma V es única es decir, sí $A + X = B$ y $A + Y = B$, entonces $X = Y$.

2. Múltiplos de magnitudes

A partir del axioma VI, Hölder considera los múltiplos de una magnitud de manera recursiva como sigue:

$$2A = A + A, 3A = (A + A) + A = 2A + A, \ldots, nA = (n - 1)A + A$$

Donde $nA, n \in \mathbb{Z}^+$ es una magnitud. Aplicando asociatividad se tiene la igualdad:

$$(m + n)A = mA + nA.$$

De lo cual se sigue que:

$$\underbrace{mA + mA + \ldots + mA}_{n \text{ veces}} = \underbrace{(m + m + \ldots + m)}_{n \text{ veces}} A.$$

Las anteriores consideraciones permiten establecer las siguientes propiedades,

I. $n(mA) = (nm)A$ para $m, n \in \mathbb{Z}^+$

II. $mA <=> nA$ si y sólo si $m <=> n$.

III. $mA <=> mBA$ si y sólo si $A <=> B$.

Proposición 1. *Dada una magnitud A y $n \in \mathbb{Z}^+$, existe una magnitud B tal que $nB < A$.*

Por Axioma 2, existe A' tal que $A' < A < \alpha$. Si $n = 1$, $B = A'$ cumple lo requerido. En oro caso, por Axioma 5, existe A'' tal que $A' + A'' = A$. Sea A_1 tal que $A_1 < A'$ y $A_1 < A''$, entonces por P.2 se tendrá que $A_1 + A_1 < A' + A''$, es decir $2A_1 < A$.
Siguiendo la misma argumentación, se forma la secuencia,

$2A_1 < A$
$2A_2 < A_1$
$2A_3 < A_2$

$$\vdots$$
$$2A_m < A_{m-1},$$

tal que $n \leq 2^m$. Si se toma $B = A_m$, se tendrá que $nB < A$.

Debido a que el objetivo central de Hölder es dotar a las magnitudes de estructura cuerpo numérico consistente como el de los reales, se hace necesario que satisfagan el siguiente teorema, que corresponde a *la propiedad arquimediana*.

Teorema 2. *Si A y B son magnitudes tales que $A < B$, existe algún $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $nA > B$.*

Demostración: Procedamos por contradicción. Supongamos que para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, $nA \leq B$. Se define la siguiente partición:

$C_1 = \{x : x < nA$, para algún $n \in \mathbb{Z}^+\}$

$C_2 = \{x : x$ no pertenece a $C_1\}$

$C_1 \neq \emptyset$ y $C_2 \neq \emptyset$, puesto que $A \in C_1$ y $B \in C_2$.
Notemos que para c y d tales que,

Si $c \in C_2$, entonces para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, $nA \leq c$.

Si $d \in C_1$, entonces existe $n_1 \in \mathbb{Z}^+$, tal que $d < n_1 A$

se tiene que $d < n_1 A \leq c$, de lo cual se sigue que $d < c$.
Teniendo en cuenta que se cumplen las condiciones del Axioma 2, existe E, tal que,

Si $E' < E$, entonces para todo $E' \in C_1$

Si $E'' > E$, entonces existe $E'' \in C_2$.

No es difícil mostrar que para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, se tiene que $nA < E$.
Por el Axioma 2, existe A', tal que $A' < A$, y por el Axioma 5, existe E' tal que $E' + A' = E$; de lo que se sigue que $E' < E$. Es decir, $E' \in C_1$; lo cual significa que existe n‘ $\in \mathbb{Z}^+$, tal que $E' < n'A$.
Dado que $A' < A$, por P_2, se tiene que, $E' + A' < n'A + A = (n' + 1)A$. Como $E' + A' = E$, entonces $E < (n' + 1)A$, lo cual es una contradicción.
De lo anterior se concluye que existe un $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $nA > B$.

3. Propiedades de la suma

Para construir una relación directa entre número y magnitud se hace necesario que las magnitudes presenten un comportamiento aritmético similar al de los números naturales. En esta dirección, Hölder llama la atención en el hecho de que la suma de magnitudes debe satisfacer la ley conmutativa y la ley asociativa; además, se satisface la propiedad:

$$\underbrace{(A+B) + (A+B) + \ldots + (A+B)}_{m \text{ veces}} =$$

$$\underbrace{(A + A + \ldots + A)}_{m \text{ veces}} + \underbrace{(B + B + \ldots + B)}_{m \text{ veces}}.$$

en otros términos: para A, B magnitudes y $m \in \mathbb{Z}^+$,

$$m(A + B) = mA + mB$$

Hölder garantiza, a partir de la inecuación $nA < mB$ para A, B magnitudes y $n, m \in \mathbb{Z}^+$, la existencia de magnitudes A', B' y n, m enteros tales que:

I. $A' > A$ y $nA' < mB$.

II. $B' < B$ y $nA < mB'$.

III. $nm' < mn'$ y $n'A < m'B$.

De esta manera Hölder deduce que existen magnitudes mayores que A las cuales permiten acotar inferiormente a mB y de igual forma existen magnitudes menores que B las cuales permiten acotar superiormente a nA.
En términos modernos Hölder plantea que existen magnitudes A', B' tales que:

I. Si $A > A'$, entonces $\lim_{A \to A'} nA = mB$.

II. Si $B > B'$, entonces $\lim_{B \to B'} mB = nA$.

El conjunto axiomático presentado por Hölder hasta el momento ha permitido que la multiplicación entre enteros positivos y magnitudes genere nuevas magnitudes, las cuales, en particular, cumplen con el axioma I. A partir de los múltiplos de magnitudes Hölder muestra la existencia de una magnitud B que satisface la desigualdad $nB < A$ para cada magnitud A. Por medio del principio arquimediano garantiza la existencia de $n \in \mathbb{Z}^+$ para el cual $nB > A$ cuando $B < A$, (si $A < B$, la desigualdad se tiene para todo entero positivo); así que basta mostrar la igualdad.

Proposición 3. *Sean A una magnitud y $n \in \mathbb{Z}^+$, entonces existe una magnitud B tal que $nB = A$.*

Los múltiplos de magnitudes, el axioma VII y la propiedad arquimediana permiten mostrar aritméticamente la existencia de magnitudes conmensurables. Dado que Hölder conoce la existencia de magnitudes inconmensurables requiere establecer una relación cuantitativa entre magnitudes de tal suerte que estas den cuenta tanto de las magnitudes conmensurables como las inconmensurables. Hölder considera las cortaduras de Dedekind para establecer tal relación.

4. Continuo Aritmético: Cortaduras

En el siglo XIX el problema de la medida de magnitudes tenía como objetivo principal construir un dominio numérico de tal suerte que fuera posible considerarlo una reglilla referencial de medida. Según Dedekind, era necesario construir un sistema continuo, densamente ordenado y cerrado para las operaciones aritméticas.
El referente geométrico fue el punto de partida del trabajo de Dedekind. En contraposición de los delineamientos aristotélicos, Dedekind considera la recta como un agregado de puntos y distingue los dos sentidos opuestos existentes en ella por “derecha”e “izquierda”. Si p y q son dos puntos diferentes, entonces sólo puede suceder que p está situado a la derecha de q, y al mismo tiempo q a la izquierda de p, o bien, inversamente, q está situado a la derecha de p, y al mismo tiempo p a la izquierda de q. De acuerdo a esta diferencia de posición, se siguen las siguientes propiedades de la recta, las cuales permiten esclarecer una relación de orden para los puntos de la recta:

i. Si p está situado a la derecha de q, y q a su vez a la derecha de r, entonces p está situado también a la derecha de r. Se dice que q está situado entre los puntos p y r.

ii. Si p y r son dos puntos diferentes, entonces hay siempre infinitos puntos q que está situados entre p y r.

iii. Si p es un punto determinado de L, entonces todos los puntos en L se dividen en dos clases no vacías, P_1 y P_2, la primera clase P_1 comprende todos los puntos p_1 que están situados a la izquierda de p, y la segunda clase P_2 contiene todos los puntos p_2, que están situados a la derecha de p; el punto p puede pertenecer a la primera o a la segunda clase. En cualquier caso, la división de la recta L en dos clases P_1 y P_2 es tal que cada punto de la primera clase P_1 está situado a la izquierda de cada punto de la segunda clase P_2.

El interés principal de Dedekind era aritmetizar el continuo geométrico; para ello empleó el principio de continuidad que satisfacía la línea recta y que cualquier sistema numérico continuo debía cumplir:

> Si se reparten todos los puntos de la recta en dos clases, tales que cada punto de la primera clase está situado a la izquierda de cada punto de la segunda clase, entonces existe un único punto que determina esta partición de todos los puntos en dos clases, esta corte de la recta en dos partes. ([4], p. 85.)

Dedekind en su construcción de $\mathbb{R}$ parte del sistema de los números racionales $\mathbb{Q}$, el cual constituye un dominio bien ordenado, unidimensional, el cual se extiende al infinito en dos sentidos opuestos, en otras palabras:

1. $\mathbb{Q}$ consta de un orden usual.
2. Si $a, b, c \in \mathbb{Q}$ tal que $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$. Se dice que b está entre a y c.
3. Si $a, b \in \mathbb{Q}$ son dos números diferentes, entonces hay siempre infinitos números b que están situados entre a y c.
4. Si $a \in \mathbb{Q}$ es un número determinado, entonces todos los números del sistema $\mathbb{Q}$ se subdividen en dos clases, no vacías, A_1 y A_2; la primera clase A_1 comprende todos los números $a_1 < a$, la segunda clase A_2 comprende todos los números $a_2 > a$; el número a puede ser atribuido a la primera o a la segunda clase, y es entonces respectivamente el número máximo de la primera clase, o el mínimo de la segunda. En cualquier caso, la división del sistema $\mathbb{Q}$ en dos clases A_1 y A_2 es tal que todo número de A_1 es menor que todo número de A_2. A tal división la llamaremos cortadura y se denotará por (A_1, A_2).

A partir de la continuidad de la recta y las razones de magnitudes es posible establecer una relación entre los números racionales y los puntos de la recta. En efecto, según Dedekind si se elige en la recta un determinado punto de origen O , y una unidad de longitud para medir los segmentos, es posible construir para cada número racional a una longitud correspondiente; al número racional cero le corresponde el punto O. Dado un punto P, si OP es conmensurable con la unidad, entonces P corresponde a un número racional. Los griegos de la antigüedad demostraron que hay longitudes que son inconmensurables con una unidad de longitud dada. Por ejemplo, la diagonal del cuadrado, cuyo lado es la unidad de longitud. En este sentido, si se transporta una tal longitud sobre la recta desde el punto O, entonces el punto extremo que se obtiene no corresponde a ningún número racional. Puesto que es posible demostrar que existen infinitas longitudes que son inconmensurables con la unidad de longitud, Dedekind afirma que la recta L es infinitamente más rica en puntos que el dominio $\mathbb{Q}$ en números;

en otras palabras, en la línea L hay infinitos puntos que no corresponden a ningún número racional.

Finalmente considerando los racionales representados por puntos de la recta, los puntos guardan igual orden que los racionales, es decir, si a los dos números a y b les corresponden, respectivamente, los dos puntos P y Q, y si $a > b$ entonces P está situado a la derecha de Q.

De lo anterior, tanto la recta como el sistema de números racionales son dominios ordenados y unidimensionales, por lo cual es posible hablar de cortaduras en ambos dominios; sin embargo, los racionales no satisfacen el principio de continuidad, es decir, existen cortaduras de racionales que no están determinadas por números racionales, como por ejemplo la cortadura (A_1, A_2) formada por $(A_1 = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2 \vee x < 0\}$ y $A_2 = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 > 2\}\})$. En este sentido, si se desea deducir aritméticamente todas las propiedades de la recta, los números racionales no bastan para ello, por lo tanto es inevitable crear nuevos números tales que el dominio formado por ellos junto con los racionales, sea continuo. En este sentido, dada una cortadura de racionales (A_1, A_2) se presentan dos casos:

1. Si A_1 tiene un máximo o A_2 un mínimo, la cortadura es producida por un número racional.

2. Si A_1 no tiene un máximo ni A_2 un mínimo, la cortadura no es producida por un número racional. En este caso, a esta cortadura se le asigna un nuevo número denominado irracional.

El sistema de números reales $\mathbb{R}$, construido por Dedekind, es un dominio numérico denso, unidimensional y continuo, formado por los racionales e irracionales; en otras palabras, $\mathbb{R}$ está formado por todas las cortaduras del dominio de los racionales cuyo orden y aritmética estarán dados por:

1. Si las cortaduras son producidas por números racionales p y q, entonces $(A_1, A_2) < (B_1, B_2)$ si y solo si $p < q$.

2. Si al menos una de las dos cortaduras es producida por un número irracional, entonces $(A_1, A_2) < (B_1, B_2)$ si y solo si $A_1 \subset A_2$.

Si (A_1, A_2) y (B_1, B_2) son las cortaduras producidas por números racionales p y q, la cortadura $(C_1, C_2) = (A_1, A_2) + (B_1, B_2)$ está determinada por el racional $r = p + q$. De esta manera, si c es un número racional cualquiera, $c \in C_1$ sí $c \leq p + q$; en caso contrario $c \in C_2$. Esta partición de todos los números racionales en las dos clases C_1 y C_2 constituye evidentemente una cortadura, ya que cada número $c_1 \in C_1$ es menor que cada número $c_2 \in C_2$.

Del mismo modo que la adición, pueden definirse también las restantes operaciones de la llamada aritmética elemental: diferencias, productos, cocientes, potencias, raíces.

Hölder toma como referencia la noción de cortadura como uno de los axiomas básicos de su teoría de cantidades.

Como sabemos, a partir de la teoría de razones y proporciones euclidiana, se logra una relación cuantitativa entre magnitudes. Algunas razones entre magnitudes prefigura los números racionales y ottas razones entre las magnitudes prefiguran los irracionales. Para que se establezca la transformación es necesario que las razones se comporten como cantidades, de tal forma que se pueda definir operaciones y una relación de orden. Ese aspecto lo desarrolla Hölder a través de la noción de *Número Medida*.

5. El Número Medida de Hölder: Puente entre lo Aritmético y lo Geométrico

A partir de las cortaduras construidas por Dedekind, Hölder plantea relaciones entre múltiplos de magnitudes con el fin de darles un comportamiento análogo al de los racionales positivos y así establecer una representación de las razones de magnitudes.
La noción de razón entre magnitudes que emplea Hölder es la misma que Euclides expone en el libro V de los *Elementos*, por lo cual Hölder compara razones entre magnitudes a partir de la definición 5 del mismo libro:

Definición 1. *Se dice que la razón de una primera magnitud con una segunda es la misma que la de una tercera con una cuarta cuando, tomando cualquier múltiplo de la primera y de la tercera y de la segunda y cuarta, el múltiplo de la primera es mayor, igual o menor que el de la segunda, según que el de la tercera sea mayor, igual o menor que el de la cuarta.* [4]

Hölder define fracción inferior y superior con el fin de establecer la cortadura en los racionales positivos que determina cada razón de magnitudes.

Definición 2. *Si para dos magnitudes A, B y enteros positivos m, n se obtiene la inecuación $nA > mB$, el cociente m/n se denomina* ***fracción inferior*** *relacionada con la razón $A : B$. Lo anterior lo representamos por $\dfrac{m}{n} \prec A : B$.*

Definición 3. *Si para dos magnitudes A, B y enteros positivos m, n se obtiene la inecuación $nA \leq mB$, el cociente m/n se denomina* ***fracción superior*** *relacionada con la razón $A : B$. Lo anterior lo representamos por $A : B \preceq \dfrac{m}{n}$.*

Proposición 4. *Si $\dfrac{m'}{n'} \prec A : B \preceq \dfrac{m}{n}$, entonces $\dfrac{m'}{n'} < \dfrac{m}{n}$.*

Demostración: por hipótesis $m'/n' \prec A : B \preceq \frac{m}{n}$, por lo tanto $m'B < n'A$ y $nA \leq mB$, multiplicando las desigualdades por m y m' respectivamente, tenemos $mm'B < mn'A$ y $m'nA \leq m'mB$. De donde se concluye que $m'nA < mn'A$; por orden entre múltiplos de magnitudes $m'n < mn'$, es decir $\dfrac{m'}{n'} < \dfrac{m}{n}$.

Las consideraciones hechas hasta el momento permiten afirmar que existe al menos una fracción inferior y una superior relacionada con la razón $A : B$.
Para cada fracción $m/n \prec A : B$, existe $m/n < m'/n'$ tal que $m'/n' \prec A : B$, es decir, no existe un máximo número inferior. De esta manera, la razón $A : B$ está asociada con una clase de división de los racionales establecida por Dedekind y denominada cortadura. Lo anterior significa que:

Proposición 5. *Para cada razón de magnitudes $A : B$, existe una cortadura (A_1, A_2) bien definida [de racionales], es decir un número que la representa. Este número se denotará por $[A : B]$.*

El número $[A : B]$ se llamará el número-medida, obtenido cuando la magnitud A es medida por la magnitud B, en este caso B es llamada la unidad. En particular $[A : A] = 1$.
Hasta el momento Hölder no establece a qué clase de número hace referencia. Las propiedades que satisfacen las magnitudes conmensurables y las inconmensurables determinaran si el *número-medida* de una razón determinada es racional o irracional respectivamente.

[4] [6], pp. 787.

5.1. Magnitudes conmensurables

Si las magnitudes A y B son conmensurables tenemos que B mide exactamente a A (o un múltiplo de A). Hölder observa en esta propiedad un teorema fundamental para esclarecer la relación entre el número y la magnitud:

Teorema 6. *Dos magnitudes A y B son conmensurables y $nA = mB$, si y sólo si, la cortadura (A_1, A_2) correspondiente a la razón $A : B$, es tal que A_2 tiene como ínfimo al número racional $\frac{m}{n}$. En este caso se tendrá que $[A : B] = \frac{m}{n}$.*

Demostración: (condición suficiente) Sean A y B tales que $nA = mB$, entonces $A : B \preceq m/n$. Ahora, si m' y n' son enteros tales que $A : B \preceq m'/n'$, es decir $n'A \leq m'B$ tenemos que $(nn')A \leq (nm')B$. Por otro lado, $(n'n)A = (n'm)B$ por lo tanto $n'm \leq nm'$; es decir m/n es la menor fracción superior relativa a la razón $A : B$. Por lo tanto, m/n corresponde al ínfimo de A_2.
(condición necesaria) Sea cortadura (A_1, A_2) correspondiente a la razón $A : B$. Si A_2 tiene como ínfimo al número racional m/n, entonces m/n es la menor fracción de las fracciones superiores de $A : B$. Ello significa que $nA \leq mB$. Supongamos que $nA < mB$, entonces existen enteros m' y n' tales que $A : B \preceq m'/n'$. Por lo tanto m'/n' es una fracción superior menor que la mínima fracción superior. Lo cual contradice la hipótesis; por lo tanto $nA = mB$.

5.2. Magnitudes inconmensurables

Sea (A_1, A_2) la cortadura correspondiente a la razón $A : B$. Si no existen enteros m y n tales que $nA = mB$, las clases A_1 y A_2 no poseen ni una fracción máxima ni una mínima, respectivamente, por lo cual no existe un número racional que se le asigne adecuadamente a la razón $A : B$. En este caso el numero medida $[A : B]$ corresponde a un número irracional. Para ello es necesario la incorporación de un axioma extra: el axioma del extremo superior.

Axioma de completitud: Todo conjunto no vacío S de números reales que esté acotado superiormente admite un supremo; es decir, existe un número real b tal que $b = \sup S$.

6. Operaciones en las cortaduras

Algo que les confiere característica numérica a las cortaduras es la definición en ellas de las operaciones aritméticas.

6.1. Suma de cortaduras

Sean A, A' y B magnitudes, la razón $A : B$ define una primera cortadura, la razón $A' : B$ una segunda y estas dos determinan una tercera, la cual es la suma de ellas. Así, cada número inferior de la tercera cortadura puede ser representado por

$$\frac{m}{n} + \frac{m'}{n'} = \frac{n'm + nm'}{nn'}$$

donde $\frac{m}{n} \prec A : B$ y $\frac{m'}{n'} \prec A' : B$.

De acuerdo a la definición de fracciones inferiores $nA > mB$ y $n'A' > m'B$, y a partir de los múltiplos de magnitudes $(n'nA) > (n'm)B$ y $(nn')A' < (nm')B$. De las propiedades deducidas de los siete axiomas se sigue

$$(nn')(A + A') > (n'm + nm')B$$

de esta manera

$$\frac{n'm + nm'}{nn'} \prec (A + A') : B$$

Por otro lado cada número superior propio de la tercera cortadura puede ser expresado en la forma

$$\frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} \frac{q'p + qp'}{qq'}$$

donde $A : B \preceq \dfrac{p}{q}$ y $A' : B \preceq \dfrac{p'}{q'}$.
Por definición se tiene que $qA < pB$ y $q'A' < p'B$ y se deduce de esto que $(q'q)A < (q'p)B$ y $(qq')A' < (qp')B$, por lo cual se tiene que

$$qq'(A + A') < (q'p + qp')B.$$

Esta inecuación implica que

$$(A + A') : B \preceq \frac{q'p + qp'}{qq'}$$

6.2. Producto de cortaduras

Sean A, B y C magnitudes, la razón $A : B$ la primera cortadura y $B : C$ la segunda. Consideremos la tercera cortadura formada por el producto de las dos primeras. Ahora cada número inferior de la tercera cortadura es de la forma,

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{k}{z} = \frac{mk}{nz}$$

donde $\dfrac{m}{n} \prec A : B$ y $\dfrac{k}{z} \prec B : C$.
Puesto que $\dfrac{mz}{nz} \prec A : B$ y $\dfrac{mz}{mk} \prec B : C$ por transitividad $\dfrac{mk}{nz} \prec A : C$.
Análogamente es posible mostrar que cada número superior propio de la tercera cortadura es simultáneamente un número superior propio de la cortadura correspondiente a la razón $A : C$; también es posible mostrar que la tercera cortadura es idéntica a cualquier cortadura correspondiente a la razón $A : C$. Este resultado se expresa mediante la fórmula

$$[A : B] \cdot [B : C] = [A : C],$$

de donde

$$[A : B] = \frac{[A : C]}{[B : C]}.$$

Más aún, si $C = A$, entonces $[A : B]$ y $[B : A]$ son valores numéricos recíprocos.
En general, Hölder establece un orden en las cortaduras como sigue:

$$[A_1 : B] >=< [A_2 : B],$$

dependiendo de si $A_1 >=< A_2$. En particular si $[A_1 : B] = [A_2 : B]$, se puede concluir siempre que $A_1 = A_2$. Además, dado que $[B : B] = 1$, entonces $[A : B] >=< 1$ dependiendo de si $A >=< B$.
Hölder afirma que los resultados anteriores permiten reducir la teoría de proporciones euclidiana a conocidas leyes de la aritmética con lo cual se va desvaneciendo el referente geométrico implementado en la antigüedad. Como ejemplo Hölder expone el teorema XII del libro 5 de los *Elementos*, el cual implica que si una magnitud A está relacionada con B a la misma razón que C con D y éstas a su vez, como E lo está a F, entonces $A + C + D$ están relacionadas con $B + D + F$ a la misma razón que A lo está con B.

7. Hölder y el problema del continuo

Como se planteó al inicio de este documento, la búsqueda principal de los analistas del siglo XIX era reemplazar la noción de número real ligada a la idea de magnitud geométrica por una presentación puramente aritmética. En esta dirección era necesario que las construcciones establecidas por Cantor y Dedekind de los números reales cumplieran el principio de continuidad. La versión más común que captura la esencia de la continuidad fue enunciado por el mismo Dedekind.
Principio de Dedekind: Si todos los puntos de una línea recta son de dos clases, de manera que cada punto de la primera clase está a la izquierda de cada punto de la segunda clase, entonces existe un punto y únicamente uno que ocasiona la partición de todos los puntos en dos clases, separando la recta en dos porciones.
Como podemos observar este principio de continuidad tiene un fundamento geométrico, el cual hunde sus raíces en la antigüedad griega a partir de la teoría e razones y proporciones. Según Hölder, la teoría de magnitudes ha sido tratada de dos maneras: La euclidiana y la moderna.
La teoría de magnitudes euclidiana se encuentra desarrollada en el libro V de los *Elementos* de Euclides. Para Euclides, una “razón”es una una relación entre cantidades homogéneas. El problema histórico que se plantea es concebir las razones de cantidades como una cantidad. Esto es, buscar un formalismo conveniente que permita interpretar como números las fracciones y las raíces inexactas.
Las primeras ideas de la teoría moderna de proporciones se encuentra esbozadas en la *Aritmética Universal* de Newton, quien establece una noción de número que se aleja de la tradición euclidiana.

> Por número entendemos, no tanto el conjunto de unidades como la relación abstracta de cualquier magnitud hacia otra magnitud del mismo género, tomada como unidad. Los números los hay de tres tipos: entero, fraccionario e irracional. El número entero es aquel que se mide con unidades; el número fraccionario con partes múltiples de la unidad; los números irracionales no son conmensurables con la unidad.

La teoría moderna de razones y proporciones se basa en el proceso de medición.

1. **Razón:** La razón de una magnitud a en otra magnitud b, de la misma naturaleza, corresponde a un número real positivo determinado, el cual Hölder designa como $a : b$, es decir dos magnitudes tomadas en un orden específico.

2. **Proporción:** Dadas cuatro magnitudes a, b, c y d, se dice que $a : b = c : d$ cuando a medido por b da el mismo número que c medido por d.

Para Hölder la relación entre el continuo aritmético y el continuo geométrico reposa en la fundamentación de las ideas de Newton. Tanto Dedekind como Cantor, dieron un paso adelante, pero sin ningún argumento riguroso. A través de su teoría de cantidades, Hölder ha dado una respuesta satisfactoria.

> La aplicación de números a magnitudes puede ser establecida solamente por medio de pruebas mencionadas si se asume que las magnitudes satisfacen los axiomas 1 a 7; y al mismo tiempo, la teoría de proporciones euclidiana es considerada en conexión cercana con el concepto de medición y la moderna teoría aritmética de números irracionales. ([10], p. 241)

Precisamente, a lo largo del texto se ha mostrado la manera en que Hölder relaciona el continuo aritmético con su teoría de las cantidades. En [11] establece una axiomática para el continuo geométrico y muestra que las distancias de primera dirección, son magnitudes en sentido de los axiomas de cantidad, estableciendo un puente de contacto entre el continuo geométrico y el continuo aritmético vía los axiomas de a cantidad. La relación entre los axiomas de la cantidad y el continuo geométrico no se ha desarrollado en este artículo por problemas de extensión.

Referencias

[1] Aristóteles, *Obras Completas*, Madrid, Aguilar S. A. Ediciones, segunda edición, 1977.

[2] Cauchy, A. (1821) *Curso de Análisis*. Colección Mathema, UNAM. México.

[3] Caveing, M .L. (1998). *irrationalité dans les mathématiques grecques jusqu'à euclide*, Presses Universitaires du septentrion, Paris.

[4] Dedekind, R., *¿Qué son y para qué sirven los números?* Alianza editorial, Madrid.

[5] Dhombres, J.(1980). *Nombre, mesure et continu épistémologie et histoire*. CEDIC/Fernand Nathan, Paris.

[6] Euclides. *Elementos*. En: Científicos griegos. Recopilación de Francisco Vera. Madrid, Aguilar, 1970, pp. 689-980.

[7] Euclides, *Elementos*, Madrid, Editorial Planeta-DeAgostini, S. A. (De la Biblioteca clásica Gredos), 1999.

[8] Ferreirós, J. (1991). *El nacimiento de la teoría de conjuntos, 1854-1908*, Madrid, Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid.

[9] Lebsgue, H. (1902). *Intégrale, Longueur, Aire*. Tesis doctoral. Ann Mat, (3), Pp.231-359, 1902.

[10] Michell, J and Ernest, C. (1996) The axioms of Quantity and the Theory of Measurement: Traslate from part I of Otto Hölder's German Text "Die Axioma der Quantität und die Lehre vom Mass". *Journal of mathematical psychology*, **40**, 235-252.

[11] Michell, J and Ernest, C. (1997) The axioms of Quantity and the Theory of Measurement: Traslate from part II of Otto Hölder's German Text "Die Axioma der Quantität und die Lehre vom Mass". *Journal of mathematical psychology*, **41**, 345-356.

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad del Valle

e-mail: `lurecal@yahoo.com`
e-mail: `clauducha_6@hotmail.com`