Benavides F.& Mutis W. 2009. Hipergrafos Cohen-Macaulay. Revista Sigma, 9 (1). Pág. 91-98 http://coes.udenar.edu.co/revistasigma/articulos/articulosIX1/6.pdf

REVISTA SIGMA
Departamento de Matemáticas
Universidad de Nariño

Volumen IX (2009), páginas 91–98

Hipergrafos Cohen-Macaulay

Fernando Andrés Benavides[1]
Wilson Fernando Mutis[2]
Universidad de Nariño

Abstract. In this article Cohen-Macaulay appears a generalization of the second construction of graphs, to hypergraphs, realized for Rafael Villarreal in his article Çohen-Macaulay Graphs", to see [2]

Keywords. Hypergraph, Vertex Cover, Minimal prime, Cohen-Macaulay

Resumen. En este artículo se presenta una generalización de la segunda construcción de grafos Cohen-Macaulay, a hipergrafos simples, realizada por Rafael Villarreal en su artículo "Cohen-Macaulay Graphs", ver [2]

Palabras Clave. Hipergrafo, Cubrimiento por vértices, Ideal primo minimal, Cohen-Macaulay

Introducción

Dado un grafo $\mathcal{G}$ con n vértices $\{v_1, \ldots, v_n\}$, conjunto E de aristas y un campo k, si se considera el anillo de polinomios en n variables $k[x_1, \ldots, x_n]$ se le asocia a $\mathcal{G}$ el anillo cociente

$$k[x_1, \ldots, x_n]/I_{\mathcal{G}}$$

donde $I_{\mathcal{G}} = \langle x_i x_j \rangle_{\{v_i, v_j\} \in E}$ es el ideal generado por los monomios $x_i x_j$, donde v_i y v_j son adyacentes en $\mathcal{G}$. El objetivo principal consiste en relacionar las propiedades estructurales del grafo con las propiedades puramente algebraicas del anillo asociada. De manera similar, si $\mathcal{H}$ es un hipergrafo simple sobre un conjunto de vértices $\{v_1, \ldots, v_n\}$, se define el anillo de caras de $\mathcal{H}$, $\mathcal{R}(\mathcal{H})$, (ver [4]) del modo siguiente:

$$\mathcal{R}(\mathcal{H}) = k[x_1, \ldots, x_n]/I_{\mathcal{H}}$$

donde $I_{\mathcal{H}}$ es el ideal generado por los monomios $x_{i_1} \cdots x_{i_r}$ siempre que $\{v_{i_1}, \ldots, v_{i_r}\}$ sea una arista de $\mathcal{H}$. Son notables las relaciones entre las propiedades combinatorias y topológicas de los hipergrafos y las algebraicas de su anillo de caras, lo que hace interesante este estudio.

[1]Docente Tiempo Completo Ocasional Universidad de Nariño.Miembro del Grupo "Álgebra, Teoría de Números y Aplicaciones:ERM"Categoría A en Colciencias

[2]Docente Tiempo Completo Universidad de Nariño. Miembro del Grupo "Álgebra, Teoría de Números y Aplicaciones:ERM"Categoría A en Colciencias

Permitiendo así obtener nuevas clases de anillos con propiedades de interés, originalmente asociados con la geometría algebraica, tales como los anillos Cohen-Macaulay. Recordemos que un anillo R local noetheriano entonces R es Cohen-Macaulay si la profundidad del anillo es igual a su dimensión, en el caso que R no sea local se dice que R es Cohen-Macaulay si lo es su localizado $R_{\mathfrak{p}}$ para todo ideal primo $\mathfrak{p}$. En el caso del anillo cociente $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ se puede probar que es Cohen-Macaulay solamente localizando en su ideal primo maximal irrelevante $m_+ = (x_1, \ldots, x_n)$ (ver [4]).

Rafael Villarreal en 1990, fue uno de los primeros investigadores en obtener resultados acerca de esta clase de anillos asociados a grafos, en particular en su articulo "Cohen-Macaulay Graphs"(ver [2]) obtiene dos construcciones de grafos Cohen-Macaulay. En este articulo generalizamos su segunda construcción a hipergrafos simples utilizando ciertos conceptos generalizados de la teoría de grafos a hipergrafos y realizando una demostración análoga a la hecha por Villarreal.

1. Preliminares

Con el fin de entrar en la temática es necesario conocer algunos conceptos tanto combinatorios como algebraicos, los cuales emplearemos en la prueba del resultado principal, dentro de ellos algunos son generalizaciones a partir de la teoría de grafos.

Definición 1.1 (Hipergrafo, hipergrafo simple ([1]))**.** Sea $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ un conjunto finito de vértices. Un *Hipergrafo* sobre el conjunto V es una familia $\mathcal{H} = (F_1, \ldots, F_m)$ de subconjuntos de V tal que,

1. $F_i \neq \emptyset$ para todo $i = i, \ldots, m$.

2. $V = \bigcup\limits_{i=1}^{m} F_i$.

Cada F_i de llama una cara de $\mathcal{H}$. Además, si $F_i \subset F_j$ implica que $i = j$, entonces $\mathcal{H}$ se denomina un *hipergrafo simple.*

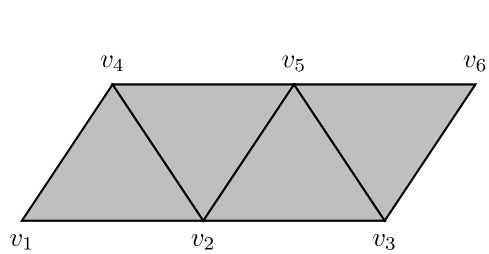
Un grafo es un hipergrafo en el cual cada cara consiste únicamente de dos vértices. En adelante solamente se consideran hipergrafos simples excepto que se diga lo contrario.

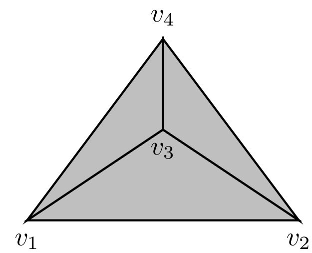
Definición 1.2 (Cubrimiento por Vértices)**.** Sea $\mathcal{H}$ un hipergrafo con conjunto de vértices V y conjunto caras $\{F_1, \ldots, F_m\}$. Un *cubrimiento por vértices* para $\mathcal{H}$ es un subconjunto C de V, con la propiedad que $F_i \cap C \neq \emptyset$ para todo i. Además si no existe subconjunto propio de C con esta propiedad, C se llama un *cubrimiento minimal por vértices* para $\mathcal{H}$.

Definición 1.3. El *número de cobertura por vértices* de $\mathcal{H}$, denotado por $\alpha(\mathcal{H})$, es el mínimo cardinal de cualquier cubrimiento por vértices, es decir:

$$\alpha(\mathcal{H}) = \text{mín}\{|C| \ : \ C \text{ es un cubrimiento por vértices para } \mathcal{H}\}$$

En el caso que todos los cubrimientos minimales de $\mathcal{H}$ sean de igual cardinalidad, $\mathcal{H}$ se denomina *unmixed.*





$\mathcal{H}_1 = (v_2v_4v_1, v_2v_4v_5, v_2v_5v_3, v_3v_5v_6)$ $\qquad$ $\mathcal{H}_2 = (v_1v_2v_3, v_1v_3v_4, v_2v_3v_4)$

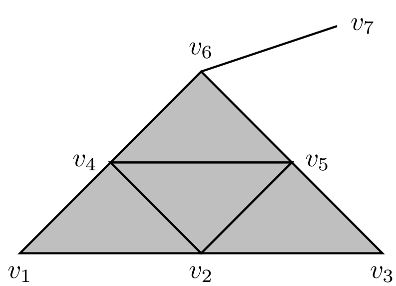
Observemos que cualquier cubrimiento minimal por vértices para $\mathcal{H}_1$ tiene cardinal 2, mientras que para el hipergrafo $\mathcal{H}_2$ se tiene que $C_1 = \{v_3\}$ y $C_2 = \{v_1, v_2\}$ son cubrimientos minimales por vértices.

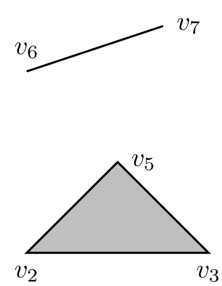
Definición 1.4 (Vértices adyacentes)**.** Sean $v, w \in \mathcal{H}$, se dice que v y w son vértices *adyacentes* si existe una cara F de $\mathcal{H}$ tal que $v, w \in F$.

Definición 1.5 (Remover vértices)**.** Sea $\mathcal{H}$ un hipergrafo y v un vértice de $\mathcal{H}$, el hipergrafo obtenido al remover el vértice v de $\mathcal{H}$ denotado por $\mathcal{H} \setminus \{v\}$ es el hipergrafo compuesto por todos los vértices de $\mathcal{H}$ distintos de v y de todas las caras F de $\mathcal{H}$ tales que $v \notin F$.

$$\mathcal{H} \setminus \{v\} = (F \in \mathcal{H} \mid v \notin \mathcal{H}).$$

Consideremos el hipergrafo $\mathcal{H} = (v_1v_2v_4, v_2v_4v_5, v_2v_3v_5, v_4v_5v_6, v_6v_7)$.





Tomando el vértice v_4 obtenemos el hipergrafo $\mathcal{H}\backslash\{v_4\} = (v_2v_3v_5, v_6v_7)$.

Definición 1.6 (Ideal de Caras)**.** Sea $\mathcal{H} = (F_1, \cdots, F_m)$ un hipergrafo. Al ideal generado por los monomios $M_i = x_{i_1} \cdots x_{i_r}$ donde $F_i = \{v_{i_1}, \ldots, v_{i_r}\}$ es una cara de $\mathcal{H}$ se denomina el *idel de caras* asociado a $\mathcal{H}$, se denota por $I_{\mathcal{H}}$. Esto es,

$$I_{\mathcal{H}} = \langle x_{i_1} \cdots x_{i_r} \mid \{v_{i_1}, \ldots, v_{i_r}\} \in \mathcal{H} \rangle$$

En adelante x_i representará un vértice o una variable dependiendo del contexto. Si k es un campo, al hipergrafo $\mathcal{H}$ se le asocia el anillo cociente $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ definido como:

$$\mathcal{R}(\mathcal{H}) = k[x_1, \ldots, x_n]/I_{\mathcal{H}}.$$

Definición 1.7 (Hipergrafo Cohen-Macaulay)**.** Sea $\mathcal{H}$ un hipergrafo. Se dice que $\mathcal{H}$ es Cohen-Macaulay si su anillo asociado $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ es Cohen-Macaulay.

2. Generalización construcción de Hipergrafos Cohen-Macaulay

En esta sección se presenta el principal resultado del articulo, el cual es la generalización de la segunda construcción, que Rafael Villarreal realizo (ver [2]), referente a grafos Cohen-Macaulay. Para su demostración es necesario los siguientes resultados algebraicos.

Proposición 2.1.
Sea $R = k[x_1, \cdots, x_n]$ un anillo polinomial sobre un campo k. Si $I \subset R$ es un ideal monomial, entonces cada primo asociado de I es una ideal de caras.

Demostración. Ver [3].

Proposición 2.2.
El conjunto de los divisores de cero de M es la unión de los primos asociados de M. Es decir

$$\mathcal{Z}(M) = \bigcup_{\mathfrak{p} \in Ass_R(M)} \mathfrak{p}$$

donde $\mathcal{Z}(M)$ es el conjunto de los divisores de cero para M.

Demostración. Ver [3].

Lema 2.1.
Si $0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow L \longrightarrow 0$ es una secuencia exacta corta de módulos sobre un anillo local R, entonces

(a) Si $depth(M) < depth(L)$, entonces $depth(N) = depth(M)$.

(b) Si $depth(M) = depth(L)$, entonces $depth(N) \geq depth(M)$.

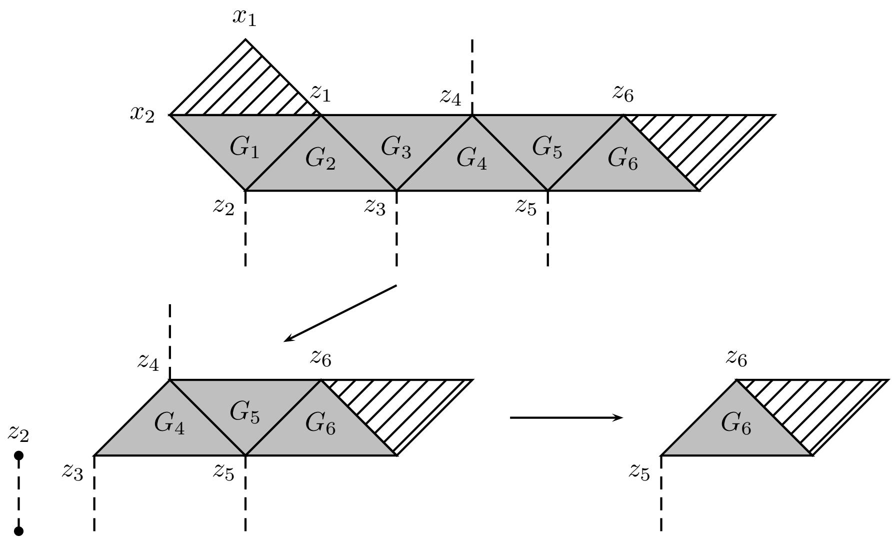
(c) Si $depth(M) > depth(L)$, entonces $depth(N) = depth(L) + 1$.

Demostración. Ver [3].

Sea $\mathcal{H}$ un hipergrafo definido sobre el conjunto de vértices $V = \{x_1, \ldots, x_n, z\}$. Denotemos por $\mathcal{H}_G$ el hipergrafo obtenido al remover de $\mathcal{H}$ el vértice z y por $\mathcal{H}_F$ al hipergrafo obtenido al remover de $\mathcal{H}_G$ los vértices adyacentes a z, es decir si suponemos que $x_1, \ldots, x_k$ son los vértices adyacentes a z en $\mathcal{H}$ se tiene,

$$\mathcal{H}_G = \mathcal{H} \setminus \{z\}$$
$$\mathcal{H}_F = \mathcal{H}_G \setminus \{x_1, \cdots, x_k\}$$

En la figura siguiente figura se muestra un ejemplo de la construcción de los hipergrafos $\mathcal{H}_G$ y $\mathcal{H}_F$ a partir de $\mathcal{H}$.



Sea $J = \langle M_1, M_2, \ldots, M_q \rangle$ el ideal de caras asociado a $\mathcal{H}$ y supongamos que $z|M_i$ para $i = 1, \ldots, r$ entonces sea $M_i' = \dfrac{M_i}{z}$. Luego si J, I y L denotan los ideales de caras de $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_G$ y $\mathcal{H}_F$ respectivamente se tiene que ellos satisfacen las siguientes relaciones,

$$J = (I, zM_1', zM_2', \ldots, zM_r')$$
$$(I, x_1, \ldots, x_k) = (L, x_1, \ldots, x_k)$$

En efecto, la primera relación es clara veamos que la segunda relación lo es,

($\Rightarrow$) Sea $M \in I$ (monomio). Si x_j divide a M para algún $j = 1, \ldots, k$ entonces $M \in (x_j)$ de ahí que $M \in (L, x_1, x_2, \ldots, x_k)$, ahora supongamos que para todo $j = 1, \ldots, k$, x_j no divide a M lo cual implica por construcción que $M \in L$. Por tanto $M \in (L, x_1, \ldots, x_k)$.

($\Leftarrow$) Es claro por construcción que $(L, x_1, \ldots, x_k) \subseteq (I, x_1, \ldots, x_k)$

Por otro lado si suponemos que $ht(J) = g + 1$ entonces se tienen las siguientes afirmaciones,

✓ Si $ht(J) = g + 1$ entonces $ht(I) \geq g$.

Prueba: Supongamos que $ht(J) = g + 1$ y $ht(I) < g$. Sea A' un cubrimiento minimal por vértices para $\mathcal{H}_G$ tal que $|A'| = ht(I)$, de ahí que $A' \cup \{z\}$ es un cubrimiento por vértices para $\mathcal{H}$ lo cual implica

$$ht(J) \leq |A' \cup \{z\}| = |A'| + |\{z\}| = ht(I) + 1 < g + 1$$

contradiciendo el hecho que $ht(J) = g + 1$. Por tanto $ht(I) \geq g$. $\square$

✓ $ht(I, x_1, \ldots, x_k) \geq g + 1$

Prueba: Dado que $J = (I, zM_1', \ldots, zM_r') \subseteq (I, x_1, \ldots, x_k)$, si $\mathfrak{p}$ es un ideal primo minimal de $(I, x_1, \ldots, x_k)$ entonces $\mathfrak{p}$ es un ideal primo tal que $J \subseteq \mathfrak{p}$. Por lo tanto

$$g + 1 = ht(J) \leq ht(I, x_1, \ldots, x_k)$$

$\square$

Teorema 2.1.
Si $\mathcal{H}$ es un hipergrafo Cohen-Macaulay entonces $\mathcal{H}_F$ es Cohen-Macaulay.

Demostración.
Sean $R = k[x_1, \ldots, x_n, z]$, $A = k[x_1, \ldots, x_n]$ y $ht(J) = g + 1$. Dado que $x_1, \ldots, x_k$ son los vértices adyacentes a z en $\mathcal{H}$ se tiene que el polinomio $f = z - x_1 - \cdots - x_k$ no pertenece a ningún ideal primo minimal de J, de ahí que por la proposición 2.1, f no pertenece a ningún ideal primo asociado de J. Entonces por la proposición 2.2, se tiene f es un elemento regular de R/J. Por hipótesis $\mathcal{H}$ es un hipergrafo Cohen-Macaulay, esto es $depth(R/J) = dim(R/J)$ y como

$$depth(R/J) = dim(R/J) = dim(R) - ht(J) = n + 1 - g - 1 = n - g,$$

existe una sucesión regular $\{f, f_1, \ldots, f_m\}$ tal que $\{f_1, \ldots, f_m\} \subseteq A_+$ donde $m = n - g - 1$. Observe que $\{f_1, \ldots, f_m\}$ es una sucesión regular sobre A/I, lo cual implica

$$depth(A/I) \geq n - g - 1. \tag{2.1}$$

De otro lado la sucesión

$$0 \longrightarrow R/(I, x_1, \ldots, x_k) \xrightarrow{z} R/J \xrightarrow{\psi} R/(I, z) \longrightarrow 0$$

es exacta, en efecto

- ✓ Es claro que z es regular sobre el anillo $R/(I, x_1, \ldots, x_k)$ por tanto la multiplicación por z es un monomorfismo.

- ✓ Veamos que $Ker(\psi) = Im(z)$. Sea $\overline{f} \in R/(I, x_1, \ldots, x_k)$ luego $z\overline{f} = 0$ en el anillo $R/(I, z)$, de ahí $Im(z) \subseteq Ker(\psi)$. Ahora sea $\overline{f} \in Ker(\psi)$, con lo cual se obtiene $f \in (I, z)$. Entonces basta considerar el caso que $f \in (z)$ es decir $f = gz$ para algún $g \in R$, lo cual implica $f \in Im(z)$ por tanto $Ker(\psi) \subseteq Im(z)$.

- ✓ Como $J \subseteq (I, z)$ se tiene que ψ es un epimorfismo.

Dado que $ht(I, x_1, \ldots, x_k) \geq g + 1$ se tiene

$$\begin{aligned} dim(k[x_{k+1}, \ldots, x_n]/L) = dim(A/(L, x_1, \ldots, x_k)) &= dim(A/(I, x_1, \ldots, x_k)) \\ &= dim(A) - ht(I, x_1, \ldots, x_k) \\ &\leq n - g - 1. \end{aligned}$$

Por otro lado R/J es Cohen-Macaulay de lo cual se obtiene

$$\begin{aligned} depth(R/J) &= dim(R/J) \\ &= dim(R) - ht(J) \\ &= n - g \\ &\geq n - ht(I) = dim(R/(I, z)) \end{aligned}$$

ya que $R/(I, z) \cong A/I$ y $ht(I) \geq g$. De ahí que

$$depth(R/J) \geq depth(R/(I, z)).$$

Basta considerar dos casos

(i) Si $depth(R/J) > depth(R/(I,z))$, entonces por el lema 2.1 se tiene

$$depth(R/(I, x_1, \ldots, x_k)) = depth(R/(I,z)) + 1$$

luego de la desigualdad 2.1 se tiene

$$depth(R/(I, x_1, \ldots, x_k)) \geq n - g.$$

Pero dado que z es regular sobre $R/(I, x_1, \ldots, x_k)$ y $R = A[z]$ se obtiene

$$depth(A/(I, x_1, \ldots, x_k)) \geq n - g - 1$$

y como $(I, x_1, \ldots, x_k) = (L, x_1, \ldots, x_k)$

$$depth(A/(I, x_1, \ldots, x_k)) = depth(k[x_{k+1}, \ldots, x_n]/L) \geq n - g - 1.$$

Por tanto $\mathcal{H}_F$ es Cohen-Macaulay.

(ii) Si $depth(R/J) = depth(R/(I,z))$, entonces por el lema 2.1 se tiene

$$depth(R/(I, x_1, \ldots, x_k)) \geq depth(R/J)$$

luego

$$depth(R/(I, x_1, \ldots, x_k)) \geq n - g$$

ya que $dim(R/J) = depth(R/J)$. Pero dado que z es regular sobre $R/(I, x_1, \ldots, x_k)$ y $R = A[z]$ se obtiene

$$depth(A/(I, x_1, \ldots, x_k)) \geq n - g - 1$$

y como $(I, x_1, \ldots, x_k) = (L, x_1, \ldots, x_k)$

$$depth(A/(I, x_1, \ldots, x_k)) = depth(k[x_{k+1}, \ldots, x_n]/L \geq n - g - 1$$

Por tanto $\mathcal{H}_F$ es Cohen-Macaulay.

$\square$

Referencias

[1] C. Berge, Hypergraphs, Combinatorics of finite sets, North-HollandMathematical Library, 45. North- Holland Publishing Co., Amsterdam, 1989.

[2] R. H. Villarreal, Cohen-Macaulay graphs, Manuscripta Math. **66** (1990), no. 3, 277–293. MR1031197 (91b:13031)

[3] R. H. Villarreal, Monomial algebras, Dekker, New York, 2001. MR1800904 (2002c:13001)

[4] S. Faridi, Cohen-Macaulay properties of square-free monomial ideals, J. Combin. Theory Ser. A **109** (2005), no. 2, 299–329. MR2121028 (2005j:13021)

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad de Nariño

e-mail: `fandresbenavides@gmail.com`
e-mail: `wfmutis@gmail.com`