

PINEDA, KANTÚN Y SLISKO. 2021. El problema de la corona de oro de Arquímedes: Un estudio de caso de las soluciones estudiantiles en México y Colombia. Revista Sigma, 17 (2). Páginas 1–14.

REVISTA SIGMA

Departamento de Matemáticas y Estadística

Volumen XVII N^o 2 (2021), páginas 1–14

Universidad de Nariño

El problema de la corona de oro de Arquímedes: Un estudio de caso de las soluciones estudiantiles en México y Colombia

Diana Carolina Pineda Pérez¹

Gabriel Kantún Montiel²

Josip Slisko Ignjatov³

Abstract.

This article presents an analysis of the solutions that give that middle school students may have in solving the *Golden Crown Problem of Archimedes* as presented in a middle school mathematics textbook, the problem that, according to some ancient stories, led historically to the discovery of the Archimedes' principle. In order to identify students' solutions, clinical interviews were developed. Four students were interviewed, two Colombian students in their second year of middle school and two Mexican students in their third year of middle school, both cases consisting of one man and one woman. The research was qualitative and carried out from the point of view of a case study, taking as a theoretical framework the Grounded Theory. Through this work it was possible to observe similarities and differences among the solutions diverse students of both nationalities with different backgrounds, in addition to their gender, and to make a parallel between the four students.

Keywords. Archimedes, case study, history of mathematics, students' solutions, Grounded Theory.

Resumen.

En este artículo se presenta un análisis de las soluciones que dan los estudiantes de secundaria en la solución del *problema de la corona de oro de Arquímedes* que presentó un libro de texto de matemáticas de secundaria, problema que, según ciertos relatos antiguos, condujo históricamente al descubrimiento del principio de Arquímedes. Con el objetivo de identificar las soluciones de los estudiantes, se elaboraron entrevistas clínicas. Se entrevistaron cuatro estudiantes, dos estudiantes colombianos en segundo de secundaria y dos estudiantes mexicanos en tercero de secundaria, ambos casos conformados por un hombre y una mujer. La investigación fue de tipo cualitativo y se llevó a cabo desde la perspectiva de un estudio de caso, tomando como marco teórico la Teoría Fundamentada. A través de esta investigación se lograron observar similitudes y diferencias entre las soluciones de los estudiantes de ambas nacionalidades en diferentes contextos; además de su género, y de realizar un paralelo entre los cuatro estudiantes.

Palabras Clave. Arquímedes, estudio de caso, historia de las matemáticas, soluciones de estudiantes, Teoría Fundamentada.

¹Estudiante de Maestría en Educación Matemática de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP), México. Email: diana.pineda@alumno.buap.mx

²Profesor investigador en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP), México. Email: gtkantun@cfcm.buap.mx

³Profesor investigador en la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP), México. Email: jslisko@cfcm.buap.mx

1. Introducción

Uno de los episodios famosos en la ciencia es el relato de la corona de Arquímedes⁴, el cual es uno de los que marcó el desarrollo histórico de la ciencia. Se lee así, pero no significa que la corona era de Arquímedes. Fue él quien resolvió el problema del rey Hierón, quien había mandado a realizar una corona de oro puro a un orfebre y tenía sus dudas acerca de que el material con que él realizó la corona no estuviera compuesta toda de oro.

La interpretación de la solución del “Problema de la corona de Arquímedes” ha generado diferentes controversias de lo que pudo haber ocurrido exactamente en el gobierno del rey Hierón. Históricamente se puede decir que la solución proporcionada por este gran personaje permitió comprobar que la corona no estaba hecha de oro puro. Por esto, un aspecto fundamental a ser estudiado es el análisis de la presentación de los acontecimientos históricos, específicamente del que se hace mención, en los diferentes libros de texto de matemáticas de secundaria de México, con el fin de observar como los estudiantes reaccionan frente a la solución de este tipo de problemas ya sea que estén proporcionados por el libro o no.

Este problema ha sido expuesto en libros de matemáticas y física; sin embargo, algunos exponen algo de la historia de manera reducida, esperando que la respuesta de los estudiantes sea similar a la que dio Arquímedes en el siglo I a. C.

En algunos libros de texto de matemáticas se observa que no se definen previamente los conceptos para proceder a resolver el problema. Por el contrario, este acontecimiento aparece como una introducción porque el propósito del autor o de los autores no es aportar para que los estudiantes comprendan alguna noción en el ambiente escolar sino de informar sólo a aquellos que tengan un interés en la historia de la matemáticas y de la física [8].

El estudiante recrea un viaje a través del tiempo al pasado para situarse en el lugar de Arquímedes y obtener sus propias conclusiones. Algunos investigadores resaltan “las aportaciones potenciales de la historia y filosofía de las ciencias en la enseñanza de las ciencias, y a utilizarlas explícitamente en la fundamentación de sus propuestas” [7], con el fin de desarrollar un modelo de enseñanza y aprendizaje como investigación.

En este aspecto, se puede pensar que la incorporación de la historia de las matemáticas podría permitir a los docentes obtener una fuente inagotable de recursos didácticos, de problemas interesantes, de diversión, de enriquecimiento personal, científico y profesional para el desarrollo de una clase [5], con el objetivo de motivar a los estudiantes en la adquisición de un nuevo conocimiento dentro de este campo.

De esta manera, como objetivo de esta investigación, se pretendió identificar las soluciones que presentan los estudiantes en el proceso de solución de una actividad enfocada en la reseña histórica del “problema de la corona de oro de Arquímedes” encontrado en un libro texto de matemáticas de secundaria.

Para el planteamiento de esta actividad se tomó como base el libro de texto matemáticas 1, Infinita Secundaria de ediciones Castillo escrito por Bosch Giral, C., Meda Guardiola, A.,

⁴Arquímedes (288 a. n. e – 212 a. n. e) fue un físico, ingeniero, astrónomo, matemático y geómetra griego. Se conocen pocos detalles de su vida, sin embargo, es considerado como uno de los científicos más importantes de la Antigüedad.

y Gómez, C. G. en el año 2018 [2]. En este libro de texto, el problema se presenta como introducción general al tema del cálculo de volumen de un objeto, sin embargo, la información que ofrece el texto inicial acerca de la historia del problema de la corona de Arquímedes no brinda las herramientas suficientes para que los estudiantes puedan dar respuestas correctas a todos los puntos de la actividad, por lo que se ven en la necesidad de recurrir a hacer suposiciones para tratar de dar una respuesta.

Para lograr el objetivo, se realizaron cuatro entrevistas clínicas a dos estudiantes colombianos en segundo de secundaria, ambos de 13 años, y a dos estudiantes mexicanos en tercero de secundaria con 14 años cada uno. Además, se tuvo en cuenta una perspectiva de estudio de caso para tratar de buscar similitudes y/o diferencias de las soluciones entre los estudiantes de Colombia y México; de elaborar un paralelo de los cuatro estudiantes entrevistados.

2. Marco Teórico

En esta investigación no hay una teoría que respalde el análisis de la aplicación de problemas históricos de matemáticas a estudiantes de secundaria, por lo que se recurre a la *Teoría Fundamentada* como nuestro marco teórico, desarrollada en Strauss y Corbin [9], en Bryant y Charmaz [3] y, en Charmaz [4]; pues “en aquellos temas que han sido poco abordados y en consecuencia no se dispone de teorías formales o sustanciales, o en aquellos que por reclamar ir más allá de las teorías requieren una visión más fresca, Glaser y Strauss (1967) propusieron la Teoría Fundamentada (TF) (en inglés Grounded Theory, GT) como una manera de aproximarse a la realidad social de una forma diferente” [6].

La Teoría Fundamentada es una estrategia metodológica que está enfocada en el análisis del comportamiento humano en la sociedad con el fin de construir conceptos que le permitan establecer una *Teoría Formal* a través de las teorías sustantivas que se puedan generar en la investigación. En esta investigación se percibe que la teoría sustantiva que permite establecer la teoría formal está relacionada con las reacciones que presentan los estudiantes al resolver un problema histórico que se presenta en los libros de texto de matemáticas.

3. Método

La investigación asociada al artículo es de corte cualitativo y se realizó desde una perspectiva de estudio de caso debido a que este “se utiliza para estudiar a profundidad una persona o un conjunto de individuos, a lo largo de cierto periodo, con la finalidad de recopilar información vívida y personal de los integrantes del estudio” [1]. Además, un estudio de caso se usa “cuando tenemos varios eventos o personas que por sus características sean objeto de comparación para realizar las concordancias y sus diferencias entre sí” [1]. En esta investigación observamos las soluciones e ideas de los estudiantes de secundaria al realizar una actividad relacionada con un acontecimiento matemático de hace siglos.

La Teoría Fundamentada considera que se puede aplicar un estudio de caso como técnica “cuando se quiere hacer un recorrido por la experiencia de un sujeto por sus particularidades es de especial interés explicar su desarrollo y circunstancias de la vida, a la luz de una nueva teoría” [1].

En esta dirección, la recolección de la información se realizó de manera individual a través de cuatro entrevistas clínicas realizadas a dos estudiantes de segundo de secundaria de la ciudad

de Cali, Colombia; y a dos estudiantes de tercero de secundaria de la ciudad de Puebla, México. Se decidió distinguir como “ C_1 ” y “ C_2 ” a los entrevistados que son de nacionalidad colombiana, un hombre y una mujer respectivamente, ambos de 13 años; y, como “ M_1 ” y “ M_2 ” a los que son de nacionalidad mexicana, un hombre y una mujer respectivamente de 14 años cada uno. A partir de esto, se realizó un paralelo entre los cuatro estudiantes.

Estos datos se recolectaron con muestras de trabajo de los entrevistados en hojas; con las notas de campo del entrevistador; y, con la ayuda de grabaciones obtenidas a través del software de videollamadas y reuniones virtuales (zoom) en un espacio cerrado. De esta forma, el tiempo de duración de las entrevistas fue para C_1 de 50 minutos, C_2 de 24 minutos, M_1 de 30 minutos, y para M_2 de 35 minutos.

Se utilizó un cuestionario con cuatro preguntas abiertas en el que se pidió realizar algunas tareas sobre el problema de la corona de Arquímedes, las cuales tuvieron como objetivo brindar a los estudiantes las condiciones de la reseña histórica que aparece en un libro de texto de matemáticas de secundaria, con el fin de observar las soluciones e ideas de los estudiantes.

De esta manera, cada uno de los entrevistados resolvió los puntos propuestos en la siguiente actividad:

Instrucciones:

Lee el siguiente texto y luego responde lo que se pregunta.

Alrededor del siglo III a.n.e el rey Hierón II, gobernante de Siracusa (antigua Grecia), dio un lingote de oro a un orfebre para que le elaborara una corona. Al recibir la corona, el rey pidió verificar que en ella se hubiera empleado todo el lingote de oro. Arquímedes, uno de los más grandes matemáticos, explicó al rey que en la elaboración de la corona se había sustituido parte del oro por otro material.

- a) ¿Cómo supo Arquímedes que la corona no era de oro puro? Explica con detalle el método.
- b) ¿Qué medidas conserva un lingote de oro, ya sea perímetro, área o volumen, aun después de ser deformado? Explica.
- c) Si el lingote y la corona se guardan en cajas, ¿cuál de las dos cajas tendrá mayor capacidad? Explica.
- d) ¿Qué método empleó Arquímedes para ello? Descríbelo con ayuda de dibujos.

El análisis de los datos recolectados en cada una de las entrevistas clínicas se dio en diferentes momentos. En primer lugar, se transcribieron cada una de las cuatro entrevistas, poco después de realizadas para que la recolección de la información fuera más precisa y se tuvieran más presentes los diálogos, los tiempos de silencio por cada entrevistado, y las expresiones y/o gestos de cada uno de los entrevistados al igual que sus movimientos.

Después, se analizaron las entrevistas de los cuatro estudiantes por separado para comprender las perspectivas de cada entrevistado en general. Luego, se codificaron con ayuda de colores los datos de los textos que se transcribieron, seleccionando de esta manera las palabras claves y frases en común entre las entrevistas. Esto permitió visualizar mejor los datos recolectados y de interés.

Seguidamente, se procedió a agrupar y ordenar los datos de modo que se pudieran captar las tipologías, y destacar las diferentes reacciones que presentaron los entrevistados poniéndolas en evidencia. Esta categorización de los datos estuvo de la mano con las interpretaciones que se le dieron, para luego, buscar patrones entre las mismas categorías.

Las respuestas proporcionadas en la actividad por cada uno de los entrevistados fueron comparadas constantemente, con el fin de buscar las reacciones, ideas o formas de entender la relación de la breve reseña histórica del problema de la corona de Arquímedes que se expone, con cada uno de los ítems propuestos. Se buscó comparar y contrastar la comunicación de los entrevistados, al mismo tiempo que la profundidad en que abordaban las respuestas.

4. Análisis

A partir de la observación de los datos obtenidos en cada una de las entrevistas se hizo un análisis descriptivo, y al tener en cuenta el contexto histórico de la actividad y los datos obtenidos de las entrevistas se sintetizaron las soluciones de cada uno de los estudiantes en las siguientes tablas con su respectivo análisis:

Tabla 1: Interpretación de la solución del problema de la corona por parte de Arquímedes

Nacionalidad	Colombiana		Mexicana	
	Masculino	Femenino	Masculino	Femenino
Estudiante	C_1	C_2	M_1	M_2
Solución	Observó el color y la textura de la corona.	El oro es metal que se puede diferenciar de varias maneras; cantidad de oro empleado.	El oro tiene una característica particular.	Tenía una habilidad visual; emplearon dos materiales.

A partir, de cada una de las respuestas dadas por los estudiantes se puede apreciar de forma general que entre los cuatro estudiantes hay similitud, pues en todos los casos mencionan que Arquímedes resolvió el problema teniendo en cuenta el aspecto físico del oro. Además, C_1 y M_2 hacen mención que Arquímedes visualizó la corona para dar una respuesta, mientras que C_2 y M_1 manifiestan que el matemático observó que el oro tuviera características específicas.

Nacionalidad: Se percibe que los estudiantes con nacionalidad colombiana objetaron el aspecto físico de la corona, la cantidad de oro y por ende la existencia de otro material. Al igual que los estudiantes con nacionalidad mexicana.

Género: En cuanto a la diferencia de género, los estudiantes C_1 y M_1 tienen diferencias mínimas pero considerables, pues por un lado se considera sólo el aspecto físico de la corona, mientras que por la respuesta que se logra percibir de M_1 parece que además de eso, percibe que tiene una característica más particular y única que lo hace oro. Mientras que las estudiantes C_2 y M_2 , en otro plano tienen en cuenta la cantidad de oro usado y la existencia de la presencia de un segundo material que no es propiamente oro.

El problema de la corona de Arquímedes: Un estudio de caso de las soluciones estudiantiles en México y Colombia

Tabla 2: Descripción gráfica del problema de la corona de Arquímedes (colombiana)

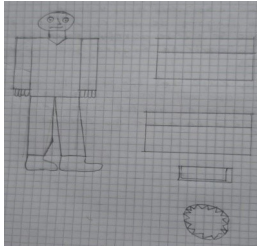

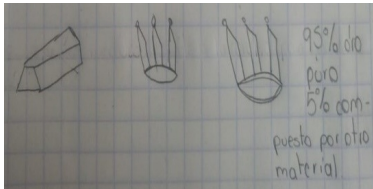
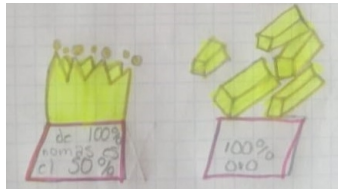
Nacionalidad	Colombiana	
Género	Masculino	Femenino
Estudiante	C_1	C_2
Representación gráfica		
Solución	Realizó el dibujo referente al punto anterior que correspondía a guardar el lingote y la corona en cajas respectivamente; y no a lo que se suponía que pedía la actividad que era realizar por medio de dibujos el proceso que empleo Arquímedes para determinar que la corona no era de oro puro.	Dibujó tres situaciones: (1) una balanza, con la cual indica que por el peso de la corona fue que se resolvió el problema; (2) un lingote que refleja que es todo de oro, y una corona que indica sólo partes de oro; y, (3) un lingote que pesa 500 gramos y una corona que pesa 250 gramos, es decir la mitad del peso de todo el lingote.

Tabla 3: Descripción gráfica del problema de la corona de Arquímedes (mexicana)

Nacionalidad	Mexicana	
Género	Masculino	Femenino
Estudiante	C_1	C_2
Representación gráfica		
Solución	Dibujó el proceso: (1) se entrega un lingote de oro; (2) realizan la corona; y (3) asigna porcentajes a la composición de la corona puesto que sabe que una parte está compuesta por otro material y esto le lleva a pensar que quizás sea sólo el 5% de la corona.	Coloreó tanto la corona como cinco lingotes. En la parte inferior de cada dibujo se ve que los lingotes son totalmente de oro, pues usa el 100%; mientras que en la corona se ve que sólo el 50% es oro porque le pusieron otro material.

De manera general podemos apreciar que los estudiantes C_2 , M_1 y M_2 , dibujaron lo concerniente al proceso de la solución del problema por parte de Arquímedes. Mientras que el estudiante C_1 , dibujo o relacionado con el punto anterior de la actividad. Además, se encuentra relación entre C_2 y M_1 que hicieron una especie de proceso. Entre M_1 y M_2 que tuvieron en cuenta porcentajes cualesquiera de la cantidad de oro y de otro material. Claramente C_1 tiene diferencia con los demás estudiantes; y M_2 fue la única que coloreo los dibujos.

Nacionalidad: Se identifica que a pesar de que uno de los estudiantes con nacionalidad colombiana no realizó el dibujo de lo que pedía la actividad, se tuvo en cuenta el peso y el color de la corona, además de la cantidad de oro utilizado en relación con el peso dado en gramos. Mientras que los estudiantes con nacionalidad mexicana tuvieron en cuenta los porcentajes de oro y de otro material.

Género En cuanto a la diferencia de género, los estudiantes C_1 y M_1 presentan grandes diferencias puesto que C_1 no realizó un dibujo con relación a lo que se pedía, mientras que M_1 dibujo el proceso de realización de la corona. Sin embargo, esta diferencia puede ser debido a que el estudiante M_1 pregunto insistentemente que debía de realizar en ese inciso. Mientras que las estudiantes C_2 y M_2 tienen similitud al usar los gramos como unidad de medida para el peso de la corona, además de considerar el uso de la mitad de oro en la elaboración de la corona; sin embargo, tienen diferencias en que M_2 fue más detallada con el dibujo al colorearlo, además de que C_2 presenta un proceso.

Tabla 4: Magnitudes de medida (perímetro, área o volumen) que conserva un lingote después de ser deformado

Nacionalidad	Colombiana		Mexicana	
	Masculino	Femenino	Masculino	Femenino
Estudiante	C_1	C_2	M_1	M_2
Solución	Conserva el volumen.	No conoce la diferencia entre área, volumen y perímetro.	Conserva el volumen.	Confunde la forma de la figura geométrica del trapecio con las magnitudes.

En general se observa que el estudiante C_1 es el único que asigna valores numéricos a cada una de las magnitudes de medidas, y C_2 decide no responder porque no recuerda las nociones de esas medidas. Mientras que M_2 no proporciona una respuesta coherente a la pregunta y trae a alusión el trapecio.

Nacionalidad: En cuanto a la nacionalidad, se nota de forma general que los estudiantes colombianos atribuyen valores numéricos para poder dar la respuesta, mientras que los estudiantes mexicanos sin necesidad de atribuir estos valores responden.

Género: En la diferencia de géneros C_1 y M_1 coinciden con la respuesta, pero C_1 asigna valores numéricos a dos de las magnitudes. Mientras que en C_2 y M_2 podemos observar que no dieron una respuesta que coincidiera con la pregunta planteada.

Tabla 5: Reconocimiento de la noción de capacidad

Nacionalidad	Colombiana		Mexicana	
Género	Masculino	Femenino	Masculino	Femenino
Estudiante	C_1	C_2	M_1	M_2
Solución	La caja del lingote. Al ser el lingote más pequeño va a poder ingresar más objetos que a la caja de la corona que es más grande.	La caja del lingote porque al transformar un material en otro va a perder capacidad.	La caja del lingote tiene mayor capacidad porque para hacer la corona es reducido.	La caja de los lingotes tiene mayor capacidad porque es oro y pesa, mientras que la corona conserva la mitad de oro y no pesa.

Evidentemente todos los estudiantes presentan dificultades con la noción capacidad y todos afirman que la caja que tendrá mayor capacidad es en la que se guarda el lingote. Por otra parte, C_1 , C_2 y M_1 presentan contradicción con la respuesta dada. C_2 y M_1 tienen relación porque ambos consideran que el lingote al ser transformado en la corona va a ser reducido y por ende va a perder capacidad. M_2 relaciona la capacidad y peso del oro, mientras que C_1 habla de añadir otros objetos a las cajas.

Nacionalidad: Los estudiantes con nacionalidad colombiana al igual que los mexicanos no tienen claridad con el término “capacidad”. Además, ambas nacionalidades tienen en cuenta la transformación del lingote en corona para considerar la caja con mayor capacidad. También podemos decir que hacen referencia al peso para hablar de esta noción.

Género: En la diferencia de géneros C_1 y M_1 al igual que C_2 y M_2 coinciden con que la caja del lingote tiene mayor capacidad. C_1 justifica que se pueden ingresar más objetos a la caja y M_1 que el lingote se disminuye. Mientras que C_2 piensa que el lingote va a perder capacidad y M_2 habla tener mayor peso.

Tabla 6: Interpretación del texto histórico por parte de los estudiantes

Nacionalidad	Colombiana		Mexicana	
Género	Masculino	Femenino	Masculino	Femenino
Estudiante	C_1	C_2	M_1	M_2
Idea	Arquímedes era inspector.	Estafaron a Arquímedes.	En el proceso de elaboración de la corona se observó que tenía otro material.	Los lingotes son de oro y la corona contiene otro material.

De manera general se analiza que ninguno de los cuatro estudiantes comprendió completamente el texto, sino partes de este pero que conservan una idea regular. Cada uno interpretó

una parte diferente del texto.

Nacionalidad: Los estudiantes colombianos mencionan a Arquímedes en su interpretación. Mientras que los estudiantes mexicanos no lo hacen. Además, los de nacionalidad mexicana se centran más en la cantidad de oro que tenía la corona, y por el contrario los de nacionalidad colombiana atribuyen la idea central del texto a Arquímedes.

Género: En la diferencia de género existe mucha divergencia. Por un lado, C_1 da su interpretación en torno a Arquímedes, y M_1 se basa en el proceso de elaboración de la corona. Y, por el otro, C_2 habla de que Arquímedes se dió cuenta que lo estafaron y M_2 que la corona contiene otro material.

Tabla 7: Estructura de las preguntas (coherencia con el texto inicial, dificultad y formulación)

Nacionalidad	Colombiana		Mexicana	
Género	Masculino	Femenino	Masculino	Femenino
Estudiante	C_1	C_2	M_1	M_2
Coherencia	Coherencia con la primera pregunta. $c, d =$ fáciles; $b =$ neutra y $a =$ difícil. $a, b, c, d =$ claras.	Coherencia con la primera pregunta. $a =$ fácil y $c, d =$ neutras. $a, b, c, d =$ claras.	Coherencia con la primera y cuarta pregunta. $a, b, d =$ neutras y $c =$ fácil. $a, b, c =$ claras y $d =$ confusa.	Coherencia con todas las preguntas. $a, b, c, d =$ difíciles. $a, d =$ confusas; $b, c =$ claras.

En general se observa que todos los estudiantes concuerdan en que el texto inicial les ayudo a responder la primera pregunta, y, además, dos coinciden con la cuarta pregunta. Por otra parte, C_1 y M_2 conciertan con que la primera pregunta estuvo difícil. La segunda y tercera preguntas fueron neutras para C_1 y M_1 . Para C_2 y M_1 la última pregunta estuvo neutra, y tanto la c como la b respectivamente manifiestan que la respondieron por lógica. De esta manera, para C_1 y C_2 todas las preguntas estuvieron formuladas de forma clara, y todos coinciden con esto en las preguntas b y c. Luego, para M_1 y M_2 el último punto es confuso.

Nacionalidad: Con la diferencia de nacionalidad se analiza que los estudiantes colombianos manifestaron que sólo encontraron coherencia del texto inicial con la primera pregunta. Mientras que los estudiantes de nacionalidad mexicana coinciden en la primera y cuarta pregunta. Por otro lado, el grado de dificultad de las preguntas difiere mucho entre cada estudiante más que de cada país, sin embargo, buscando una coincidencia en general se puede decir que los colombianos al igual que los mexicanos consideraron la segunda y última pregunta como neutra. La primera pregunta difícil y la tercera fácil. Además, ambas nacionalidades concuerdan con que la primera, segunda y tercera preguntas fueron claras en su formulación, y la última estuvo confusa.

Género: En la diferencia de género, C_1 y M_1 sólo concuerdan con la primera pregunta, al igual que C_2 y M_2 . No hay mucha diferencia entre género al dar la respuesta. En la dificultad de cada pregunta se puede notar que C_1 y M_1 concuerda con la segunda y tercera pregunta al considerarlas neutra y difícil respectivamente. Mientras que C_2 y M_2 divergen mucho y

por ende no coinciden en ninguna pregunta. Sin embargo, la formulación estuvo clara en las primeras tres preguntas para C_1 y M_1 , pero difieren en la d. Mientras que, para C_2 y M_2 solamente la segunda y tercera pregunta fue categorizada como clara, y divergen de la primera y la última.

Tabla 8: Conocimiento previo de la historia y de Arquímedes; y aprendizaje posterior de Arquímedes y la experiencia de resolver un problema de historia de las matemáticas

Nacionalidad	Colombiana		Mexicana	
Género	Masculino	Femenino	Masculino	Femenino
Estudiante	C_1	C_2	M_1	M_2
Conocimiento previo y aprendizaje logrado	No conocía la historia; quizás a Arquímedes. Posteriormente, Arquímedes fue un inspector del rey. Puede aprender mejor matemáticas con ejercicios de índole histórica, porque se pone en el lugar del personaje. Se conforma con actividades de este tipo.	No conocía la historia; quizás a Arquímedes. Posteriormente, Arquímedes fue inteligente. Se siente satisfecha de realizar este tipo de ejercicios de historia, porque se pone en el lugar del personaje. No se conforma con actividades de este tipo y prefiere las fórmulas y procedimientos matemáticos.	No conocía la historia; quizás a Arquímedes. Posteriormente, Arquímedes fue un matemático que hizo grandes aportes. Se siente bien al resolver problemas de índole histórica, porque diversas culturas han aportado al desarrollo de esta ciencia. Prefiere actividades de este tipo que involucren el uso de fórmulas y procedimientos matemáticos.	No conocía la historia; ni a Arquímedes. Posteriormente, Arquímedes fue un rey. Se siente extraña porque algunas preguntas estaban confusas, y bien al resolver preguntas de historia. Se conforma con actividades de este tipo porque considera que es más fácil que usar fórmulas.

A partir de cada una de las respuestas obtenidas se percibe que ninguno de los cuatro estudiantes tenía conocimiento previo de la historia expuesta. Después de la actividad, se observa que de manera general cada uno de los cuatro estudiantes concluyó aspectos diferentes de Arquímedes.

Además, se analiza que todos los estudiantes manifiestan sentirse cómodos al resolver problemas de matemáticas relacionados con la historia.

Nacionalidad: En el análisis de nacionalidad se observa que tanto los estudiantes colombianos como los estudiantes mexicanos no conocían la historia del problema de la corona de

Arquímedes. Posterior a la actividad, es notable que existe una divergencia entre los estudiantes de nacionalidad colombiana y mexicana, pues los primeros piensan que Arquímedes fue inteligente y un inspector que revisaba los artículos del rey; mientras que los segundos consideran que fue un gran matemático y que además un rey.

Los estudiantes con nacionalidad colombiana consideran apropiada esta actividad porque se ponen en el lugar del personaje que aparece en la historia, mientras que los de nacionalidad mexicana les interesa el problema porque permite ver el aporte de diferentes culturas a la matemática.

Género: C_1 y M_1 nunca habían escuchado hablar de esta historia, al igual que C_2 y M_2 . Ambos géneros no conocían la historia.

Seguidamente de la actividad, se puede inferir que C_1 y M_1 presentan reacciones diferentes en comparación con los de C_2 y M_2 . pues por un lado, el género masculino considera a Arquímedes como matemático e inspector; y por el otro, el género femenino piensa que es inteligente y que era un rey.

Añadido a esto, en la diferencia de género se identifica que C_1 y M_1 conciben apropiado el uso de la historia en la actividad propuesta, al igual que M_2 y C_2 . Por otro lado, C_1 y M_1 se conforman con actividades de matemáticas que hacen uso de la historia, pero M_1 propone que involucre el uso de procedimientos. Mientras que C_2 y M_2 difieren una de la otra porque mientras C_2 prefiere sólo realizar actividades de esta ciencia con procedimientos matemáticos, M_2 considera que es mucho mejor que no usar fórmulas.

Tabla 9: Impresiones acerca de la actividad y usos anteriores de la historia en la solución de problemas de matemáticas

Nacionalidad	Colombiana		Mexicana	
	Masculino	Femenino	Masculino	Femenino
Estudiante	C_1	C_2	M_1	M_2
Evaluación de la actividad	Decepción con la información proporcionada en el texto inicial. Nunca se le había presentado una actividad de historia.	Insatisfecho por no hacer cálculos. Nunca se le había presentado una actividad de las matemáticas.	Impresionado con la estructura de la actividad. No está seguro si antes se le había presentado una actividad de historia.	La actividad no estuvo aburrida ni difícil. Nunca se le había presentado una actividad de historia.

En este aspecto se puede decir que las impresiones que tuvieron acerca de la actividad es independiente, quizás porque la pregunta es ambigua y no todos tuvieron la misma reacción. Sin embargo, se puede relacionar que C_1 y C_2 se mostraron insatisfechos por diferentes razones, M_1 se muestra impresionado y M_2 es como si mencionará que estuvo neutral.

Nacionalidad: En cuanto a la diferencia de nacionalidad, se percibe que los estudiantes colombianos se muestran decepcionados por la estructura de la actividad, mientras que los estudiantes mexicanos se notan impresionados. Por otro lado, se identifica que tanto a los

estudiantes de nacionalidad colombiana como a los de nacionalidad mexicana no se les ha llegado a enseñar matemáticas haciendo uso de la historia ya sea poco o muy frecuente.

Género: La diferencia de género deja entrever que las reacciones divergen entre los cuatro, pues por un lado C_1 se siente devastado porque el texto inicial no brinda la información suficiente y M_1 está impresionado de resolver este tipo de actividad. Al igual que C_2 y M_2 , pues C_2 está incomoda por no tener que haber hecho procedimiento y M_2 manifiesta que no estuvo aburrida ni difícil. Adicionalmente, ambos géneros coinciden porque en ninguno de los casos se han desarrollado actividades haciendo uso de la historia de las matemáticas, y consideran que es la primera vez.

A partir del anterior análisis y los resultados obtenidos en cada una de las tablas, podemos inferir que con ayuda de las entrevistas clínicas, se dió lugar a que emergieran las siguientes categorías definidas para los diferentes desempeños que tuvieron los estudiantes:

- a) Interpretación de la solución del problema de la corona por parte de Arquímedes.
- b) Descripción gráfica del problema de la corona de Arquímedes.
- c) Magnitudes de medida (perímetro, área o volumen) que conserva un lingote después de ser deformado.
- d) Reconocimiento de la noción de capacidad.
- e) Interpretación del texto histórico por parte de los estudiantes
- f) Estructura de las preguntas (coherencia con el texto inicial, dificultad y formulación).
- g) Conocimiento previo de la historia y de Arquímedes; y aprendizaje posterior de Arquímedes y la experiencia de resolver un problema de historia de las matemáticas.
- h) Impresiones acerca de la actividad y usos anteriores de la historia en la solución de problemas de matemáticas.

Es a partir de cada una de estas categorías y de su análisis exhaustivo que surge una nueva teoría que en esta investigación podemos llamarla como *la Teoría Fundamentada de los desempeños de los estudiantes ante el problema de la corona de Arquímedes*. Pues, al tener como base este marco teórico, en esta investigación “no se descubren datos ni teorías. Más bien, somos parte del mundo que estudiamos y de los datos que recopilamos. Construimos nuestras teorías fundamentadas a través de nuestras implicaciones e interacciones pasadas y presentes con personas, perspectivas y prácticas de investigación” [4].

5. Conclusiones

Las soluciones e ideas que presentaron los estudiantes en la actividad propuesta en uno de los libros de texto de matemáticas de secundaria acerca del “problema de la corona de oro de Arquímedes” permiten observar de manera general que la estructura que tiene la actividad no es coherente ni suficiente. En primer lugar, todos coincidieron en que el texto inicial de la historia no brindó las herramientas suficientes para dar una respuesta acertada a cada uno de los puntos de la actividad, además de que sólo hubo un mínimo aporte por parte del libro para responder la mitad de las preguntas propuestas, mientras que la otra mitad están desfasadas del texto propuesto y corresponden a otros fines.

De esta manera, con la investigación realizada se logra identificar que los desempeños por los estudiantes de ambas nacionalidades mantienen relaciones notables. Los estudiantes de nacionalidad colombiana se identifican más expresivos al dar una respuesta, esto por el uso constante de gestos y movimientos con las manos, en comparación con los estudiantes de nacionalidad mexicana que no hacen uso tan frecuente de estas expresiones.

Por otra parte, en cuanto a la diferencia de género se observa que en los estudiantes tanto hombres como mujeres suelen desviar la mirada a un punto fijo antes de dar una respuesta, y ambos géneros se perciben analíticos al responder cada uno de los puntos de la actividad. Sin embargo, cabe señalar que durante la entrevista, los hombres se mostraron más espontáneos al hablar en comparación con las mujeres que se percibieron tímidas e inseguras; es decir, que los estudiantes de género masculino se observan más seguros al expresarse en comparación con el género femenino. Pero, en cuanto a la descripción gráfica del último punto, se debe resaltar que el género femenino mostró mejor destreza y cuidado para dibujar, pues consideró los detalles mínimos, en comparación al género masculino que manifestó no saber dibujar pero lo hizo.

Presentar un ejercicio de índole histórico propuesto en los libros de texto de matemáticas de secundaria, depende mucho de la estructura de la actividad, de la coherencia entre las preguntas y la historia que se exhibe. Sin embargo, en la actividad estudiada se logra identificar que los estudiantes presentaron dificultades en la resolución de cada uno de los puntos, manifestando que los relacionados con el contenido histórico dejaron a su imaginación la posible continuación de la historia. Pese a esto, se destaca que los estudiantes mostraron un agrado con realizar actividades de matemáticas relacionadas con la historia por las reacciones que tuvieron.

Este tipo de investigaciones permiten que exista una reflexión didáctica y epistemológica en los docentes de matemáticas al abordar estas cuestiones en sus clases y en los libros de texto que llevan a cargo en el proceso de enseñanza y aprendizaje de un saber matemático.

Con todo esto, podemos inferir que cada una de las tablas a través de las cuales se hicieron los análisis, permitieron exponer visualmente los hallazgos de la investigación, que son resultados emergentes que son propias de la Teoría Fundamentada. En este estudio de caso se codificaron ocho categorías para agrupar las soluciones de los estudiantes cuando se enfrentan a un problema relacionado con la historia de matemáticas. En tal sentido, la Teoría Fundamentada permitió realizar un análisis exhaustivo de cada una de las entrevistas clínicas, pues hacer uso de esta teoría para seleccionar los aspectos relevantes de las transcripciones requirió de un arduo trabajo.

Finalmente, se invita a los lectores a hacer uso de la Teoría Fundamentada para que respalden su investigación en aquellos temas que no se cuenta con teorías formales que sustenten el objetivo de sus estudios. Como se puede observar en esta investigación la Teoría Fundamentada emergió a partir de cada una de las ocho categorías definidas para las reacciones de los estudiantes.

Referencias

- [1] Balcázar, P., González, N., Gurrola, G., & Moysén, A. (2013). Estudio de caso. *In Investigación Cualitativa* (pp. 161–187). 3
- [2] Bosch C., Meda A., & Gómez C. (2018). *Matemáticas 1. Infinita Secundaria*. Ciudad de México, México: Ediciones Castillo. 3

- [3] Bryant, A., & Charmaz, K. (2007). *The SAGE Handbook of Grounded Theory*. <https://doi.org/10.4135/9781848607941.n16> 3
- [4] Charmaz, K. (2006). Constructing Grounded Theory. A Practical Guide Through Qualitative Analysis. In *SAGE Publications Ltd* (Vol. 18, Issue 1). <https://doi.org/10.1186/s12868-016-0320-5> 3, 12
- [5] González, P. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Suma*, 45, 17–28. 2
- [6] Páramo, D. (2015). La teoría fundamentada (Grounded Theory), metodología cualitativa de investigación científica. *Pensamiento y Gestión*, 39, 119–143. <http://www.scielo.org.co/pdf/pege/n39/n39a01.pdf> 3
- [7] Pérez, G. (1993). Contribución de la historia y de la filosofía de las ciencias al desarrollo de un modelo de enseñanza/aprendizaje como investigación. *Enseñanza de Las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, 11(2), 197–212. 2
- [8] Slisko, J. (2008). La historia de la física en la enseñanza. *El Cronopio*, 10, 16–21. 2
- [9] Strauss, A., & Corbin, J. (2002). *Bases de la investigación cualitativa: técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada*. http://www.academia.edu/download/38537364/Teoria_Fundamentada.pdf 3