Fernández y García. 2021. Aproximación a la propiedad de densidad de los números reales como límite de intervalos encajados: una propuesta de aula. Revista Sigma, 17 (2). Páginas 15–35.

REVISTA SIGMA

Departamento de Matemáticas y Estadística

Universidad de Nariño

Volumen XVII Nº 2 (2021), páginas 15–35

Aproximación a la propiedad de densidad de los números reales como límite de intervalos encajados: una propuesta de aula

Maribel Fernández Muñoz [1]

Adriana García Moreno [2]

Abstract: This article presents the results of the implementation of a classroom proposal, whose purpose is to bring 11th grade students from the Santander Technical Institute of Quilichao Cauca closer to the density property of real numbers through interval representation.

The choice of activities is supported by a historical and epistemological approach concerning the construction of reals, their properties, and representations, in addition to the guidelines of the Ministry of National Education [21] in which this concept is introduced. The analysis of the results obtained after the implementation is based on the methodological approaches of didactic micro-engineering. Finally, the main findings, the implications of the study and some suggestions for the future related to the teaching of this numerical set are presented.

Keywords. Density, real number, interval theory, approach.

Resumen: En este artículo se presentan los resultados de la implementación de una propuesta de aula, que tiene como propósito acercar a estudiantes de grado 11 del Instituto Técnico de Santander de Quilichao Cauca, a la propiedad de densidad de los números reales mediante la representación intervalar.

La elección de las actividades está respaldada de una aproximación histórica y epistemológica concerniente a la construcción de los reales, sus propiedades y representaciones, además de las orientaciones del Ministerio de Educación Nacional [21] en los que se introduce este concepto. El análisis de los resultados obtenidos después de la implementación está fundamentado en los planteamientos metodológicos de la micro-ingeniería didáctica. Por último, se presentan los principales hallazgos, las implicaciones del estudio y algunas sugerencias a futuro relacionadas a la enseñanza de este conjunto numérico.

Palabras Clave. Propiedad de densidad, número real, teoría intervalar, aproximación.

[1]Estudiante de Maestría en Educación Matemática de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla – México, email: maribel.fernandezm@alumno.buap.mx

[2]Docente Universidad del Valle, email: adriana.garcia.moreno@correounivalle.edu.co

1. Introducción

La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas implica procesos de transposición didáctica de las teorías formalmente constituidas, a la selección de saberes que serán enseñados en el aula para la construcción de conocimiento y desarrollo de pensamiento matemático [8]. Una de las estrategias didácticas propuestas para la movilización de dicho conocimiento, consiste en adaptar ejemplos de la vida cotidiana, con el fin hacer una aproximación a los conceptos matemáticos[3] que pueden llegar a beneficiar su comprensión, pero no siempre se pueden emplear ejemplos de este tipo; porque hay objetos matemáticos como los números reales, que no son inmediatos a la experiencia y requieren un grado de abstracción que se torna cada vez más complejo para su comprensión.

En especial, si se trata de estudiantes de educación media como lo expresa Scaglia [27] en su tesis doctoral acerca de las dificultades de representación en la recta numérica de los números reales y Crespo [10] en su propuesta acerca del significado y comprensión de los números irracionales; incluso en la educación superior como lo afirman Mora y Torres [24] en su investigación acerca de las concepciones de los números reales en estudiantes de Licenciatura en matemáticas. De ahí que es necesario centrar la atención en la búsqueda de estrategias que favorezcan la comprensión de este objeto matemático y particularmente que puedan dilucidar una relación secuencial y evolutiva entre los aprendizajes construidos en la educación media y la educación superior. En este sentido, el presente artículo nace de la reflexión obtenida de los resultados encontrados en el estudio titulado *Ventajas y limitaciones de la representación intervalar: una aproximación a la propiedad de la densidad de los números reales en el grado once. Un estudio de caso en la Institución Educativa Instituto Técnico* .

Varias investigaciones ([7], [16], [25]) dejan claras las dificultades de la enseñanza y el aprendizaje de los números reales y de los retos, sugiriendo hacer una propuesta de enseñanza, que permita hacer una aproximación a dicho concepto; estos trabajos afirman que su comprensión implica tener claras nociones matemáticas complejas como la de límite, convergencia y sucesión, entre otras; no obstante, es necesario proponer estrategias didácticas que articulen los conocimientos básicos construidos en la educación media con los de la educación superior.

Por otro lado, la Historia de las Matemáticas da cuenta de la complejidad del proceso evolutivo y cambiante de la consolidación de los números reales como objeto matemático, que tardó aproximadamente veinticinco siglos [16]; esto plantea que, los procesos transpositivos

[3] Plantea Duval [13] que, todo concepto matemático requiere de representaciones y movilizar diversos sistemas semióticos de representación de sus objetos. Lo que lleva a inferir que el concepto matemático es un proceso mental y cognitivo que surge, no propiamente del objeto, sino de las representaciones semióticas de ese objeto, por ejemplo:

> La idea de triángulo no es accesible a través de los sentidos, sino que es de naturaleza puramente mental. Sin embargo, para acceder al concepto de triángulo necesitamos imperiosamente sus representaciones para analizar sus propiedades que hacen que esa figura sea triángulo y no por ejemplo cuadrilátero. [11]

En este sentido, Chevallard (citado por [12]) un objeto matemático "es un emergente de un sistema de práxis donde se manipulan objetos que se descomponen en diferentes registros semióticos [. . .] es decir aquello que se escribe o se dibuja" (p. 14) de las distintas formalizaciones del número real a aquellos que son seleccionados para ser enseñados en el contexto escolar también lo son. De modo que, su enseñanza y consideración en la educación media, es uno de los grandes retos de los maestros de matemáticas y de la Educación Matemática en general.

La manera en la que comúnmente se enseñan los números reales se reduce a la adjunción de los conjuntos numéricos [3], en algunos libros de texto se aborda el concepto como la unión de los conjuntos de los números naturales, enteros, racionales e irracionales, señalando algunas propiedades que son inherentes a la estructura algebraica y reglas para sus operaciones, más no se mencionan propiedades que tienen que ver con su comprensión, tales como las propiedades de densidad y completez.

Ahora bien, con referencia a la propiedad de la densidad, se observa que una de las dificultades presentadas en su acercamiento es que, los estudiantes interpretan el conjunto numérico de los reales desde los conocimientos fundamentados a partir de los números naturales. En palabras de Broitman y otros [5]:

> Dados dos números decimales, por ejemplo 4,2 y 4,3; los niños suelen afirmar que no es posible hallar otros números entre ellos. Esto es así porque –como ya mencionamos- conciben a este nuevo conjunto numérico desde los conocimientos construidos a partir de los números naturales. (p. 6)

Reconociendo este tipo de problemáticas, el objetivo de este artículo es exponer resultados obtenidos a través de la puesta en marcha de actividades que persiguen favorecer el aprendizaje de la propiedad de densidad de los números reales con estudiantes de grado once, las cuales sugieren una noción de número real como límite de intervalos encajados. Así pues, es necesario especificar los componentes más notables en la construcción de los números reales a través de la historia, que comprenden las crisis de los fundamentos de las matemáticas: con los pitagóricos en el siglo V a.C. y en el siglo XIX d.C. con la fundamentación del análisis, para reconocer en la construcción histórica del concepto de número real, elementos didácticos que posibiliten la elección e implementación de actividades que conforman una propuesta de aula.

De igual manera, su construcción formal deviene de la superación de diferentes obstáculos epistemológicos y tiene su apogeo con matemáticos como Cantor, Bachman y Weiss entre otros. Las estrategias empleadas para la superación de dichos obstáculos se constituyen en un importante aporte para la Educación Matemática, en tanto que brindan herramientas que posibilitan la construcción de propuestas de aula.

Como ya se mencionó, el concepto se aborda como la unión de los conjuntos de los números naturales, enteros, racionales e irracionales, señalando algunas propiedades que tienen que ver con la estructura algebraica y reglas para sus operaciones. Sin embargo, el Ministerio de Educación Nacional (MEN) menciona que para grado once es necesaria la introducción de las propiedades que tienen que ver con su comprensión, esenciales para un correcto entendimiento de otros conceptos que dependen de este; sobre esta base se discuten posteriormente los conceptos cruciales del Cálculo como el límite, la continuidad y la derivada [21].

Sumado a lo anterior, generalmente para las representaciones y operaciones de los números reales se recurre a la aproximación, olvidando algunas cifras decimales importantes que sirven para encontrar un resultado y más aún, la comprensión del infinito potencial que se encuentra en números como los irracionales, el cual está relacionado directamente con la noción del cálculo infinitesimal que se halla al momento de realizar operaciones con cantidades infinitamente pequeñas.

En el desarrollo de este artículo se proponen algunas alternativas de solución al problema de representación y aproximación a la propiedad de densidad de los números reales, para ello se consideran algunos referentes teóricos desde el punto de vista histórico y matemático (Euclides, Eudoxo, Platón, Arquímedes, Cantor, Bachman, Weiis), que posibilitaron la toma de decisiones importantes para la elección de algunas actividades que conforman las tareas de una propuesta de aula elaborada por [16], este grupo de actividades se efectuaron en un aula de clase, con el fin de acercar a los estudiantes a la noción de número real y su propiedad de la densidad.

El aprendizaje de los números reales, se considera un asunto de notable interés para el campo de la Educación Matemática; a partir de esta necesidad surgió la idea de que el trabajo fuera desarrollado en estas líneas, dirigido a la educación media, concretamente para estudiantes de grado Once del Instituto Técnico de Santander de Quilichao Cauca. El desarrollo del trabajo se presentó en cuatro momentos, en un primer momento se realizó una aproximación histórica y epistemológica, explorando los componentes más notables en la construcción de los números reales; en un segundo momento, de acuerdo con los referentes teóricos, se identificaron los elementos conceptuales más relevantes que permitieron la elección de actividades que hicieron parte de la propuesta de aula[4] ya elaborada, la cual no había sido implementada. En tercer lugar, se implementaron las actividades que componían las tareas de la propuesta de aula a un grupo de estudiantes de grado once. Por último, se hizo una confrontación entre el análisis a priori y análisis a posteriori que se obtuvo de los resultados de la implementación, lo que permitió identificar algunas ventajas y limitaciones de la propuesta, enfocada en favorecer en los estudiantes una comprensión intuitiva de la propiedad de la densidad, enmarcada en la construcción de los números reales como conjunto de intervalos encajados.

2. Aproximación histórica del número y la teoría intervalar

En este apartado se presentan algunos elementos esenciales en la historia que dieron lugar al número real y la teoría intervalar, los cuales están relacionados con las construcciones formales de este conjunto numérico a partir de sucesiones de intervalos encajados, puesto que, son construcciones que se relacionan con la teoría, siendo esta una alternativa importante ante el problema de representación de los números reales. En este mismo sentido, Garcia [16] menciona que “el inicio y evolución del análisis intervalar como ciencia de la computación ofrece alternativas ante el problema de representación del número real, presente también en la escuela” (p. 20).

2.1. De la inconmensurabilidad a la construcción del número real

Se reconoce que la construcción y aceptación del número real como un objeto matemático tardó alrededor de dos mil quinientos años (comprendidos entre el siglo V a.C. y el siglo XIX), durante todo este tiempo se originaron problemas, los cuales marcaron diferentes épocas. Según Recalde [26] la formación histórica de los números reales hasta consolidarse como un objeto matemático partió de las actividades de contar, medir y ordenar; sin embargo, existieron dos hechos de gran importancia que fueron determinantes en la historia

[4]Elaborada por la Maestra Adriana García Moreno en su trabajo *Los números reales como conjuntos de intervalos, ventajas y limitaciones de su consideración en la Educación Media.* [16]

de las matemáticas. Estos dos hechos son conocidos como las crisis de sus fundamentos. La primera crisis se da en la época de los pitagóricos, hacia el siglo V a.C., y aparece con las magnitudes conmensurables e inconmensurables; la segunda crisis aparece en el siglo XIX con la fundamentación del análisis, donde empezaron construcciones del número real por parte de Cantor y Dedekind.

De acuerdo con Crespo [10] en la época de los pitagóricos se anticipan los números irracionales con magnitudes inconmensurables, este hecho en la historia se conoce como la primera crisis de sus fundamentos, debido a que aparece una contradicción en la teoría perfecta y armónica que tenían los pitagóricos sobre lo que sería para entonces el concepto de número.

Collete [9] narra que un miembro de la escuela pitagórica llamado Hippasus de Metapontun (matemático presocrático, teórico de la música y filósofo), nacido en Grecia al sur de Italia en los años 500 a.C., descubrió la existencia de la inconmensurabilidad, la cual le costó el exilio de la escuela pitagórica, siendo para los pitagóricos una catástrofe, porque para ellos las razones eran consideradas como el atributo de la existencia, de la realidad, pensando que todo era medible, con este descubrimiento se eliminó el hecho de medir con precisión, lo que generó una alteración en el desarrollo de la geometría griega y de toda la matemática.

Toledo [28] y Crespo[10] argumentan que lo sucedido en esta época evidencia que los números irracionales son desde el inicio un asunto geométrico y no aritmético, hecho que ocasionó la división entre los conceptos de número [cantidad] y magnitud.

En la segunda crisis, el estudio de los fundamentos de las matemáticas ha sido desde hace un siglo competencia de la lógica, Ferreiros [15] se manifiesta que la propia matemática trata de dar cuenta de sus bases, convirtiéndose en una ciencia "reflexiva" que da lugar a la llamada metamatemática, este ha sido un fenómeno muy característico en el siglo XX. En el año 1800 el número real, era concebido como un concepto científico impuesto por el entorno, y por la presencia de magnitudes continuas en el mundo físico; sin embargo, en el año 1900 los números reales se consideran producto del pensamiento puro. Hilbert en 18 axiomas, cuya firmeza era la lógica, garantizó la construcción del conjunto de los números reales. En este sentido Garcia [16] comenta que:

> Esta nueva matemática que parecía alcanzar el propósito de una matemática consistente y sin contradicciones, que se explicaba por sí misma, tuvo sus dificultades ante las paradojas de la teoría de conjuntos y los métodos de demostración basados en el axioma de elección, es decir se presenta una crisis en los fundamentos de una matemática que pretendía ser infalible, consistente y autosuficiente. (p. 37)

Matemáticos como Dedekind, Cantor y Hilbert, en sus construcciones mejoraron en términos estructurales los aportes teóricos que dejaron los antiguos griegos. Hilbert define los números reales como "elementos de un conjunto dotado de estructura de cuerpo ordenado arquimediano y completo" [15, p. 410]. Sin embargo, el paso de una concepción de número real más cercana a las magnitudes continuas a una estructura abstracta y alejada de las intuiciones geométricas, que tardó alrededor de veinticinco siglos, refleja claramente la presencia y superación de un obstáculo en la construcción del conjunto de los reales. Grandes matemáticos del siglo XIX fueron esenciales para darle firmeza y rigurosidad matemática a la consolidación de los números reales como objeto matemático, cabe mencionar que los aportes de los griegos también jugaron un papel importante en dicha construcción, pese a que sus intentos por fundamentar la matemática fracasaron, estos se convierten en elementos fundamentales que retoman los matemáticos del siglo XIX para avanzar en la fundamentación.

2.2. Inicio y consolidación de la teoría intervalar

La historia da cuenta que el análisis intervalar inicia con Arquímedes, si embargo, toma importancia en el año 1960 llegando a convertirse en tema de investigación, esto trajo consigo grandes aportes a la ingeniería. Moore [23], uno de los mayores investigadores sobre esta teoría, escudriñó sobre posibles alternativas que tratan de solucionar la dificultad existente al momento de representar números reales como $\sqrt{2}$ o π, puesto que estos poseen infinitas cifras decimales no periódicas y no es posible su representación en un ordenador o en el papel.

Del mismo modo que se presenta esta dificultad en el campo de la ingeniería, sucede en el ámbito educativo, puesto que, al introducir los números de naturaleza infinita periódica o infinita no periódica, en el salón de clases, se trata de convencer a los estudiantes de la existencia de estos números, lo que lleva a que difícilmente puedan comprender su naturaleza.

Por la razón anterior, Garcia [16] para su trabajo considera como principal eje el análisis intervalar, ya que, pese a que esta alternativa no había sido pensada para la Educación Matemática, es una forma de aproximarse a la representación de $\mathbb{R}$ teóricamente válido e intuitivamente más coherente con la práctica, que remedia de alguna manera los errores de aproximación y truncamiento.

3. Método

Se reconoce que, tanto en el diseño como en la elección de actividades, es de suma importancia tener en cuenta cómo se construye y comunica el conocimiento matemático. De acuerdo con Artigue [2] "la ingeniería didáctica se caracteriza en primer lugar por un esquema experimental basado en las "realizaciones didácticas" en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza." (p. 36). Estas realizaciones didácticas se manifiestan en las cuatro fases de desarrollo; siendo la ingeniería didáctica un ente fundamental para pensarse una clase de matemáticas, tomándose como modelo de apoyo su estructura metodológica de implementación. Se dice que desde la década de los 80 la ingeniería didáctica estaba principalmente ligada a las mediaciones o intervenciones didácticas en las clases, tomando así un carácter de secuencias de enseñanzas, las cuales permitían poner a prueba las habilidades y conocimientos posteriormente adquiridos, al haber realizado un breve estudio teórico de algún concepto en particular. Por lo tanto, la ingeniería didáctica en estos tiempos permite la evaluación de secuencias de enseñanzas y a su vez consigue producir medios o recursos que llevan a una mejor enseñanza. Ahora bien, en la teoría de las situaciones didácticas (TSD), Brousseau [6] menciona que para enseñar un determinado conocimiento es necesario recurrir a ciertos medios (materiales, textos, entre otros), los cuales generan en el estudiante un mayor acercamiento a las nociones matemáticas. De hecho, la ingeniería didáctica es la que se encarga de estudiar y producir dichos medios, convirtiéndose en un recurso importante al momento de desarrollar o implementar actividades en clases, lo que conduce a que el estudiante pueda interactuar e integrar nuevos conocimientos matemáticos, que le permitirán reforzar sus saberes previos.

En consecuencia, la investigación está orientada por la ingeniería didáctica (tomándose a la micro-ingeniería por tratarse de un estudio de caso) que, según Godino, et al. [17] "busca crear conocimiento sobre cómo se construye y se comunica el conocimiento matemático. Este conocimiento didáctico se refiere necesariamente a un enfoque teórico, que sirve de base en las distintas fases del proceso metodológico" (p. 1). Este trabajo se enmarca en las cuatro fases que sugiere este marco metodológico.

3.1. Desarrollo metodológico:

Fase 1 Análisis preliminar: En esta primera fase se hace una revisión de los referentes teóricos, una exploración histórica de los componentes más notables en la construcción de los números reales; que comprende la crisis de los fundamentos de las matemáticas, en los pitagóricos del siglo V a.C. y en el siglo XIX con la fundamentación del análisis, para reconocer los elementos didácticos que posibiliten su aplicación en el salón de clases y para su posterior análisis. Luego se hace un estudio de los referentes matemáticos más relevantes en la construcción de los números reales en el marco de una propuesta intervalar expuestos por Cantor, Bachman y Weiss para la elección de las actividades que hacen parte de una propuesta de aula ya elaborada, estas tareas son coherentes con el objetivo principal de este trabajo. Finalmente, se hace un análisis de los referentes didácticos y curriculares cuyo propósito es identificar las orientaciones teóricas y metodológicas que propone MEN para la enseñanza de la densidad de los números reales.

Fase 2 Análisis a priori: De acuerdo con los referentes teóricos se identifican los elementos conceptuales más relevantes que permiten hacer la elección de las actividades a partir del análisis a priori de cada una de las tareas que componen la propuesta de aula, esta fase permite anticiparse a los posibles comportamientos y acciones de los estudiantes, además de una visión clara de cada tarea propuesta, con relación al propósito, los contenidos matemáticos y los desempeños esperados de los estudiantes.

Fase 3 Experimentación: Se implementan las actividades elegidas a un grupo de estudiantes de grado 11 del Instituto Técnico de Santander de Quilichao Cauca, esta institución educativa fue seleccionada porque es una institución que ha tenido unos buenos resultados en las *Pruebas Saber*[5] en el área de matemáticas. Cuenta con un grupo de estudiantes que asisten a las Olimpiadas de matemáticas y una sala de sistemas bien dotada, con el software Geogebra; se han tenido en cuenta estas características para la selección del grupo focal porque interesa determinar si la implementación de la propuesta es factible; dado que hasta el momento no se han implementado en ninguna institución, es decir entre menos variables externas interfieran en su normal desarrollo será más objetiva su validación.

Para la implementación de la propuesta de aula se cuenta con la participación de un grupo de 10 estudiantes. El desarrollo de las actividades se realiza por parejas y al finalizar cada actividad, se socializan los resultados. De esta forma se recolectan cuatro tipos de registros susceptibles de análisis: los escritos, donde se evidencian las respuestas de los estudiantes; la observación, de la que se tomaron notas de campo; los registros de video, tomados de manera general y específica de las interacciones entre ellos; y las imágenes, en las que se muestran a los participantes en la exploración del applet en Geogebra y los procesos realizados mediante el uso de la calculadora.

Fase 4 Análisis a posteriori y validación: En esta última fase se hace un contraste entre el análisis a priori que se revisa en la fase 2 y el análisis a posteriori que se hace de los resultados de la experimentación, para identificar las ventajas y limitaciones de la propuesta enmarcada al acercamiento de la propiedad de densidad de los números reales a través de la representación intervalar.

[5] Las pruebas Saber son evaluaciones externas estandarizadas aplicadas por el Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación -ICFES-, estas tienen como propósito evaluar el rendimiento académico logrado por los estudiantes de acuerdo con las competencias básicas establecidas por el Ministerio de Educación Nacional.

3.2. Estrategias e instrumentos para la recolección de la información

Esta investigación al ser un estudio de caso emplea como estrategia metodológica a la *observación participante completa*[6], ya que interesa observar la pertinencia de las actividades. Para ello se emplean videos, registros escritos (respuestas de los estudiantes y anotaciones) y audios, como medios para recolectar la información.

Ahora bien, como instrumento para la recolección de información, se tiene en cuenta el análisis a priori realizado por García [16] en su trabajo *Los números reales como conjuntos de intervalos, ventajas y limitaciones de su consideración en la educación media.*

3.3. Actividades de la propuesta

La elección de las actividades se hace a partir de la propuesta elaborada por García [16], configurándose en una serie de actividades para introducir la noción de número real como un conjunto de intervalos encajados y la aproximación a sus propiedades fundamentales, como lo son la completez y la densidad. A continuación, se presentan algunas de ellas:

Actividad 1

La primera actividad persigue que los estudiantes logren, a través de diferentes estimaciones, identificar errores de aproximación y redondeo en cálculos comunes.

Reflexionemos sobre los resultados de las operaciones con cantidades que se han truncado o aproximado. Veamos ¿qué sucede cuando operamos con cantidades que se han truncado o aproximado ya sea a la décima o a la centésima?

1. Aproxima los siguientes números a la centésima:

    a) $\frac{1}{3} \cong$

    b) $\pi \cong$

2. Con los resultados aproximados realiza las siguientes operaciones:

[6]En el estudio de caso se definen principalmente dos estrategias para la recolección de la información: la entrevista etnográfica, que puede ser hablada o escrita y la observación participante, que puede ser: completa, cuando el investigador se introduce totalmente en el escenario; activa, cuando el investigador intenta hacer lo que otros hacen en el escenario; moderada, cuando el investigador mantiene un equilibrio entre estar dentro y fuera del escenario o pasiva cuando el investigador, aunque está presente no interviene en la escena.

Tabla 1: Cálculos con y sin el uso de la calculadora.

a. Realiza los cálculos utilizando la calculadora científica directamente sin aproximar	b. Realiza los cálculos utilizando la calculadora científica con los resultados aproximados en el ejercicio 1
$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} =$	$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \cong (0,33)(0,33) =$
$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} =$	$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \cong (0,33)(0,33)(0,33)(0,33) =$
$\pi + \pi =$	$\pi + \pi \cong (3,14) + (3,14) =$
$\pi \cdot \pi =$	$\pi \cdot \pi \cong (3,14)(3,14) =$
$\frac{1}{3} \cdot \pi =$	$\frac{1}{3} \cdot \pi \cong (0,33)(3,14) =$

3. De acuerdo con los cálculos realizados en el cuadro anterior responde lo siguiente:

   a) Compara y establece las diferencias y similitudes entre los resultados de la columna a. y la columna b.

   b) Qué sucede cuando aproximamos una cantidad numérica y operamos con ella.

Actividad 2

Una vez los estudiantes han realizado los cálculos y reflexionado sobre la actividad anterior, se continúa con la introducción a la alternativa de aproximación –mediante encajamiento de intervalos cerrados y acotados por racionales– para representar los números racionales, en la que podrán encajar el número a partir de otros dos números racionales dados progresivamente, de tal manera que la diferencia entre estos sea cada vez más pequeña, es decir que tienda a ser cero. De manera paralela, en este proceso hay una proximidad a la construcción intuitiva de las nociones de *límite y convergencia.*

Aproximación a números racionales mediante encajamiento de intervalos cerrados y acotados por racionales. Hacia la aproximación intuitiva del concepto de límite y convergencia.

Lee con atención: un número racional se define por la relación de equivalencia $\frac{a}{b}$ con $b \neq 0$, donde a ,$b \in \mathbb{Z}$. Entre dos racionales siempre vamos a encontrar otro número racional. Sin embargo, números como $\frac{1}{6}$, presentan cierta particularidad en su expresión decimal, veamos cómo hacer una posible representación de este sin caer en errores de aproximación y representación.

Por ejemplo, sabemos que $\frac{3}{2} = 1,5$. Para obtener esta expresión de derecha a izquierda, basta con hacer la operación $3 \div 2 = 1.5$ y de izquierda a derecha se representa la expresión decimal como una fracción así: $1,5 = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$. Otro ejemplo, sería $0,32851$ es racional $0,32851 = \frac{32851}{100000}$. Si preguntas cuál es la mejor o la correcta, te pueden responder que tanto la fracción $\frac{3}{2}$, como la expresión decimal $1,5$ lo son.

1. Ahora, volvamos con $\frac{1}{6}$ y su expresión decimal. Divide 1 entre 6 para obtenerla.

   a) ¿El proceso de dividir es finito?

b) ¿Es posible expresar $\frac{1}{6}$ con un número limitado de cifras decimales en tu cuaderno?

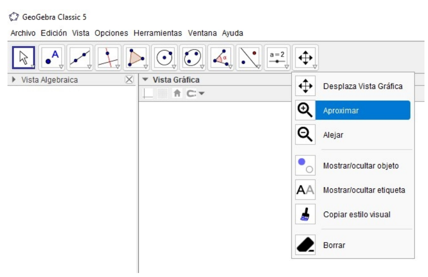
c) ¿Qué particularidad tienen esas cifras decimales?

d) Divide 1 entre 6 en la calculadora. ¿Crees que el valor que aparece en la calculadora es el correcto?

e) ¿Será posible hacer una representación decimal de $\frac{1}{6}$ de manera que no se trunque su resultado?

2. Veamos una forma de aproximarnos a $\frac{1}{6}$ usando el software GeoGebra. Ve al computador y abre el programa. Selecciona la herramienta aproximar:

Figura 1: Herramienta para aproximar en GeoGebra



3. Haz clic izquierdo sobre la recta en varias ocasiones hasta aproximarnos a $\frac{1}{6}$, primero a la décima $0,1$, luego a la centésima $0,16$ y por último a la milésima $0,166$. Cada vez que hagas estas aproximaciones, describe según lo que observas cuál es la décima, centésima, milésima (según sea el caso $0,1$ o $0,16$ o $0,166$) más próxima por la izquierda y la más próxima por la derecha. Consigna tus resultados en la tabla.

Tabla 2: Encajamiento de racionales

Número racional	En cada aproximación determina cuál es el número racional más próximo por izquierda y cuál es el número racional más próximo derecha			
	Décima	Centésima	Milésima	Diezmilésima
$\frac{1}{6}$	$0,0 < \frac{1}{6} < 0,2$			

a) De acuerdo con los valores más cercanos que has encontrado para $\frac{1}{6}$, ¿es posible encontrar otros más cercanos? Justifica.

b) ¿Es posible determinar cuántos números racionales hay alrededor de $\frac{1}{6}$?

Actividad 3

Esta actividad tiene como propósito que el estudiante practique, con otros números racionales, el método de aproximación y representación utilizado en la actividad anterior, en el que deben identificar números racionales muy próximos a otros racionales, con esto identifican el rango de una buena estimación.

1. **Practiquemos lo aprendido**, usa el mismo proceso que utilizaste para aproximarte a $\frac{1}{6}$ con otros números racionales. Puedes usar la recta numérica y debes consignar los valores aproximados en la tabla.

Tabla 3: Encajamiento de racionales

Número racional	En cada aproximación determina cuál es el número racional más próximo por izquierda y cuál es el número racional más próximo derecha			
	Décima	Centésima	Milésima	Diezmilésima
$\frac{2}{3}$	$0,5 < \frac{2}{3} < 0,7$			
$\frac{35}{9}$				
$-\frac{27}{11}$				
$-\frac{1}{9}$				
Elije uno				

   a) Existen otros números racionales que se caracterizan por tener una expresión decimal como la de $\frac{1}{6}$, $\frac{35}{9}$, $-\frac{27}{11}$, $-\frac{1}{9}$? ¿Crees que es posible decir cuántos son? Justifica tus respuestas.

2. -1, 0, 100 y todos los números enteros son racionales, ¿crees que es posible aproximarnos a estos usando el proceso anterior? Inténtalo con algunos en la siguiente tabla. Puedes usar la recta numérica.

Tabla 4: Encajamiento de racionales

Número racional	En cada aproximación determina cuál es el número racional más próximo por izquierda y cuál es el número racional más próximo derecha			
	Décima	Centésima	Milésima	Diezmilésima
-1				
0				
100				

   a) ¿Crees que es posible aproximarse a cualquier número racional usando este método?

   b) ¿Cuántos número racionales crees que hay entre 0 y $\frac{1}{6}$? Justifica tu respuesta.

   c) ¿Cuántos números racionales crees que hay entre -1 y 1? Justifica tu respuesta.

   d) ¿Crees que a cada punto de la recta numérica le corresponde un número racional? Justifica tu respuesta.

Actividad 4

En la cuarta y quinta actividades se pretende que los estudiantes comprendan que, a pesar de que hay números –como $\sqrt{2}, e, \pi$– que no pueden representarse mediante un número finito de cifras decimales, ya sea a lápiz y papel o en un artefacto tecnológico, si se puede hacer una aproximación a estos a través del encajamiento de números racionales, de tal forma que al hacer la diferencia de los extremos de los intervalos esta sea cada vez más pequeña como se desee. En esta actividad se adapta una situación que fue relevante en la construcción histórica del número real –El Método de Exhaución– en la que ya se prefiguraba la teoría intervalar. En definitiva, en esta actividad se espera aproximar a números irracionales a partir del encajamiento de intervalos con números racionales, al mismo tiempo es un acercamiento, al concepto de límite y convergencia de manera intuitiva.

El caso de π

1. Recordemos lo aprendido:

    a) ¿Cuál es el procedimiento que normalmente utilizas para calcular el área de un círculo y la longitud de una circunferencia de radio r?

    b) De acuerdo con estos procedimientos responde ¿Qué representa el número π?

    c) ¿Qué diferencia hay entre π y números cómo $\frac{3}{2}, \frac{1}{6}$ y -1?

Se deja un espacio para que se escriban las respuestas, se socializan tres respuestas y luego se hace la siguiente reflexión:

Lee con atención: sabemos que el área del círculo se "calcula" mediante la fórmula $A = \pi r^2$ y la longitud de la circunferencia con la fórmula $L = 2\pi r$ y en algunas ocasiones, has aprendido que $\pi = 3,14$ o que se aproxima a ese valor. Pero ¿sabemos de dónde aparece esta fórmula? O ¿Qué representa π? Se dice que π es la razón entre la longitud de la circunferencia y su diámetro.

Hace muchos siglos 390 - 337 a. C., Eudoxo de Cnidos, preocupado por medir el perímetro y el área de un terreno circular, utiliza un método conocido como el *método de exhaución*, perfeccionado más adelante por Arquímedes y Euclides. Este método, riguroso y complejo, consiste en inscribir y circunscribir polígonos a una circunferencia, aumentando progresivamente los lados de los polígonos, de modo que el perímetro y el área de los polígonos inscritos y circunscritos, se aproximen al perímetro y el área de la circunferencia. Para comprenderlo mejor, vamos a escudriñar un poco en fragmentos de la historia de π.

Muchos matemáticos han intentado encontrar la forma de aproximarse cada vez más a π, pues es un decimal infinito no periódico. Desde hace muchos siglos, Arquímedes, Zu Chong Zhi, Francisco de Vieta, Wallis, Leibnitz y Euler entre otros. Según Bárcenas y Porras [4], hasta el momento con la ayuda de ordenadores hay una aproximación de más de seis mil cuatrocientos millones de dígitos decimales. En la actualidad, la determinación del número de dígitos en la aproximación de π mide la capacidad de cómputo de los nuevos ordenadores.

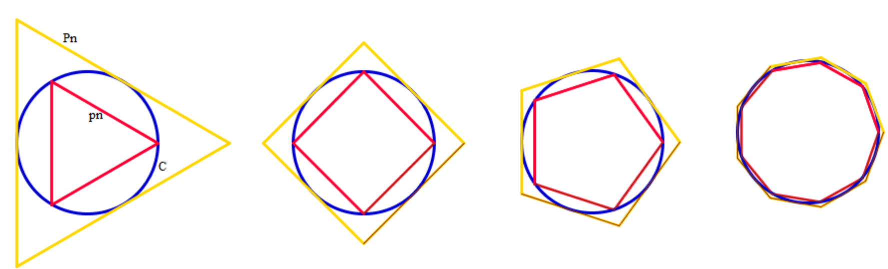
Sin embargo, dada la complejidad de lo propuesto por estos matemáticos, adoptaremos un método que proponen Bárcenas y Porras [4], que sin ser tan sofisticado como los de los otros autores mencionados, nos va a permitir aproximarnos a π. Podemos, primero hacerlo manualmente y luego con la ayuda del programa Geogebra para ilustrarlo mejor.

Este método, parte de la idea de Arquímedes de inscribir y circunscribir polígonos regulares en una circunferencia. En este orden, el perímetro de los polígonos inscritos (p_n) es menor que el de la circunferencia, y el perímetro de los circunscritos (P_n) es mayor que este, así:

$$p_n < C < P_n$$

Gráficamente algunas aproximaciones serían:

Figura 2: Método de Exhaución[7]



2. A medida que aumentan el número de los lados de los polígonos inscritos y circunscritos, ¿qué observas?

   Ahora, para calcular la longitud de la circunferencia tenemos que $C = 2\pi r$, el perímetro de los polígonos inscritos p_n se calcula mediante la fórmula $2n \sin\left(\frac{180°}{n}\right)$ y el de los circunscritos P_n mediante la fórmula $2n \tan\left(\frac{180°}{n}\right)$ Entonces reemplazamos en $p_n < C < P_n$ y obtenemos lo siguiente:

$$2n \sin\left(\frac{180°}{n}\right) < 2\pi r < 2n \tan\left(\frac{180°}{n}\right)$$

   Si tomamos la circunferencia de radio uno ($r = 1$) tenemos:

[7] Los polígonos circunscritos son de color amarillo, los inscritos de color rojo y la circunferencia es de color azul.

$$n \sin\left(\frac{180°}{n}\right) < \pi < n \tan\left(\frac{180°}{n}\right)$$

3. Ahora considerando a la circunferencia de radio 1 y dado que n es el número de lados del polígono, vamos a hacer varias aproximaciones a π, variando el número de lados desde el polígono más pequeño de $n = 3$, hasta otros con mayor número de lados.

   Puedes usar la calculadora para hacer estas aproximaciones, es decir toma los nueve decimales que arroja la calculadora y luego consigna los resultados en la siguiente tabla (al final de esta encontrarás un $n =?$, esto significa que puedes asignar el número de lados que elijas):

Tabla 5: Método de Exhaución.

Número de lados	Perímetro de polígonos inscritos: $n \sin\left(\frac{180°}{n}\right)$	Perímetro de polígonos circunscritos: $n \tan\left(\frac{180°}{n}\right)$	Escribe los valores en que π está comprendido $p_n < \pi < P_n$	Resta el valor mayor del menor. $P_n - p_n$
$n = 3$	$3 \sin\left(\frac{180°}{3}\right)$	$3 \tan\left(\frac{180°}{3}\right)$	$< \pi <$	
$n = 4$				
$n = 5$				
$n = 6$				
$n = 10$				
$n = 100$				
$n = 1000$				
$n = 10000$				
$n = 100000$				
$n = 1000000$				
$n =$				

   a) Ahora compara los resultados de la tabla con los valores que te muestra la calculadora científica de tu ordenador. ¿Qué diferencias y similitudes encuentras?

   b) Con respecto a la aproximación de la calculadora científica de tu ordenador ($\pi \cong 3,14159265358979323846264338327 95$) y los resultados que vas obteniendo a medida que el número de lados aumentan de los polígonos inscritos y circunscritos. ¿Qué observas? (Compara las décimas, centésimas, milésimas, diezmilésimas. . .)

c) A medida que haces las restas de los valores que representan a π, en el proceso de inscripción y circunscripción de polígonos, ¿Qué notas en los resultados? ¿Crees que en algún momento el resultado llegará a ser cero?

d) ¿Es posible hacer una mejor aproximación a π? Si tu respuesta es sí, explica ¿cómo es posible hacerlo?

Actividad 5

1. **Vamos a observar este proceso de manera gráfica en Geogebra**.

   En tu ordenador encontrarás en el escritorio un archivo llamado ***Método de exhaución***, ábrelo. Arrastra el punto n tanto como desees y observa la construcción.

Figura 3: Método de Exhaución Geogebra – 1

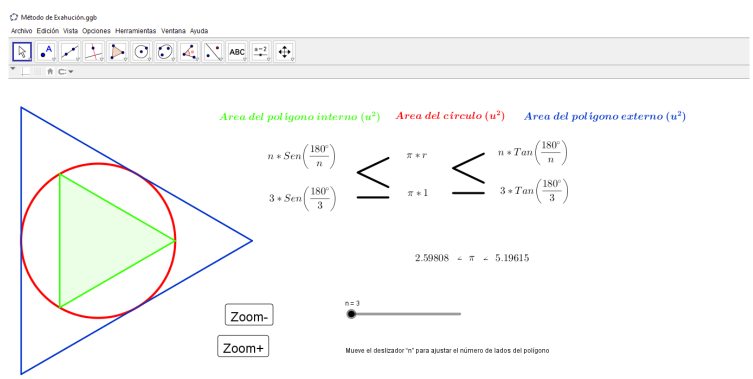


Figura 4: Método de Exhaución Geogebra – 2

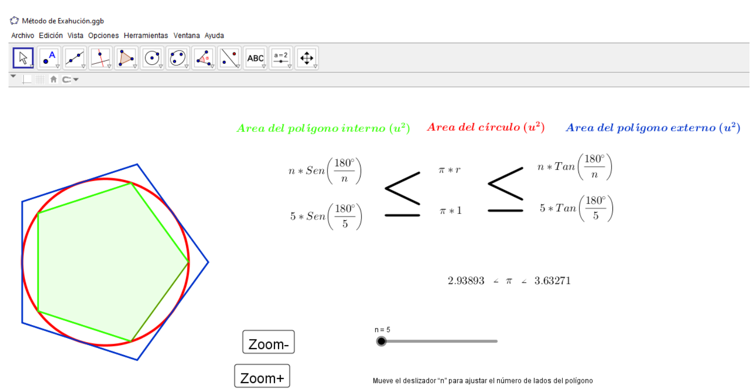
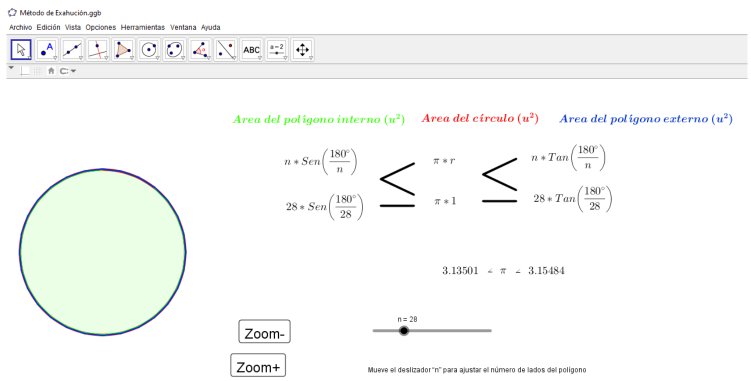


Figura 5: Método de Exhaución Geogebra – 3



a) ¿Qué observas al hacer el arrastre?, con respecto:

- Al número de lados de los polígonos inscritos, circunscritos y la circunferencia.
- La variación en los valores para los que π está comprendido a medida que el número de lados aumenta.

b) Arrastra el deslizador, hasta notar que se superponen los polígonos inscritos y circunscritos sobre la circunferencia (se observa en la imagen que coinciden, los polígonos inscritos, circunscritos y la circunferencia). Luego puedes darle Zoom a la pantalla, ¿Qué observas con respecto a los polígonos inscritos, circunscritos y la circunferencia? ¿Crees que es posible, que en algún momento los polígonos inscritos, circunscritos y la circunferencia coincidan?

c) ¿El valor que nos arroja la calculadora científica, es el valor de π? Justifica tu respuesta.

d) ¿De acuerdo con el comportamiento de la cola infinita de decimales que vas descubriendo de π, crees que es posible representar a π de la forma $\frac{a}{b}$ con $a, b \in \mathbb{Z}$ y $b \neq 0$? Justifica

e) De acuerdo con la respuesta de la pregunta anterior ¿π es un número racional? Justifica tu respuesta.

f) ¿Crees que el método de exhaución es un proceso válido para representar a π sin truncar su resultado? Justifica tu respuesta.

4. Principales hallazgos

En la revisión historiográfica de la construcción del número real como objeto matemático desde los pitagóricos siglo V a.C. y la fundamentación del análisis en el siglo XIX, se identificaron sucesos históricos para la elección de las actividades, tales como el Método de Exhaución para introducir la noción de número real como un límite de intervalos encajados y el Método de Herón de Aznar para hacer cálculos aproximados a números irracionales. El referente matemático, proporcionó elementos teóricos para la comprensión del número real y su propiedad de la densidad y la teoría intervalar, el referente didáctico aportó elementos para la metodología del desarrollo del trabajo y por último el curricular facilitó las orientaciones educativas nacionales del concepto de número real para grado 11 de educación media.

La historia de las matemáticas revela que son un constructo social que parte de sus necesidades y de su cultura, hechos que están en constante evolución. Es así como a través de las construcciones del siglo V a.C. se logró observar que el método de Exhaución creado por Eudoxo como una estrategia de solución a los problemas planteados por el infinito y lo inconmensurable, muestra también que a partir de sucesiones de polígonos inscritos y circunscritos se prefiguran los números irracionales y en general la existencia del número real como un límite de intervalos encajados.

La teoría intervalar como ciencia de la computación describe una representación del número real mediante el uso de intervalos encajados, en la que se concibe al número real como el límite de sucesiones de intervalos encajados y no como usualmente se hace en la escolaridad condicionando a verse como un punto sobre la recta. Este modelo de representación de número real permite comprender que, ciertos números como π no pueden describirse con un número limitado de cifras decimales en el papel o en un ordenador, pero sí existe una forma de expresarlos mediante encajonamiento de intervalos de números racionales cuya diferencia sea tan pequeña como se quiera.

El estudio de las construcciones de los números reales propuestas por Cantor, Bachmann y Weiss permiten acercarse al concepto de número real desde una perspectiva intervalar, y se identifica la concepción de número real como el límite de sucesiones de intervalos encajados de números racionales, de la misma manera, que lo ha trabajado Cantor a través de clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy, así mismo permiten un acercamiento a la propiedad de la densidad de los números reales como planteó inicialmente en este trabajo. Además, estas construcciones, permiten inferir, que los elementos teóricos más relevantes para ser considerados en una propuesta de aula que pretenda movilizar una perspectiva intervalar son: el número real como un límite y otros conceptos asociadas como la convergencia, la continuidad, sucesión y el intervalo.

Una estrategia para hacer una aproximación a la propiedad de la densidad de los números reales, con un estudiante de educación media es a través de la intuición geométrica, pues históricamente se pudo evidenciar que algunos matemáticos y filósofos de la época, la utilizaron para plantear soluciones a diversos problemas, como es el caso de la duplicación del cuadrado que propone Platón en el Menón, pues ante la dificultad que se tenía al no haber una relación entre número y magnitud, para resolver este problema se acude a la geometría.

5. Implicaciones del estudio

La primera crisis de los fundamentos en el siglo V a.C. se dio como consecuencia de la aparición de las magnitudes inconmensurables y generó una ruptura en la cosmovisión de los pitagóricos, puesto que (ellos) consideraban que todas las magnitudes son conmensurables; es decir, lo que actualmente se entiende como las magnitudes que se pueden representar de la forma $\frac{a}{b}$ donde $a, b \in \mathbb{Z}$ y $b \neq 0$. Algo similar ocurre en el aula, porque para los estudiantes un factor limitante para la comprensión de las magnitudes inconmensurables es su concepción de que todo es conmensurable. Por esta razón es importante recurrir a estos problemas históricos e identificar y analizar las estrategias que los matemáticos en la antigüedad emplearon para solucionarlos y recrearlas en el aula, dándole así una función didáctica a la historia.

Los elementos fundamentales de la teoría intervalar en términos de problemas y estrategias de solución, para la representación de los números reales, permitió hacer la introducción de la propiedad de la densidad de este conjunto de manera que, los estudiantes comprendieron la noción de límite. Pues identificaron que un número real no necesariamente es la representación de un punto en la recta; sino que es aquel que está comprendido entre dos números racionales. Este acercamiento es crucial, porque al interpretar al número real como ese número que es menor que un conjunto de números racionales y mayor que otro conjunto de números racionales, en el trasfondo lo que quiere decir es que el estudiante comprendió la noción de límite o, en su defecto el número real como un límite.

Existen otros campos en los cuales la teoría intervalar es aplicada, a través de la necesidad de realizar cálculos sin errores de aproximación o redondeo, vista e incorporada también por algunos matemáticos para realizar sus construcciones y resolver problemas que para décadas atrás estaban ligados a pensamientos pitagóricos de que todo era medible. Ahora bien, en relación con la propiedad de la densidad esta teoría beneficia su acercamiento en los estudiantes, puesto que, en el momento de hallar los valores más próximos a la derecha y a la izquierda de un número, se observa que resultan infinitos números en ambos extremos, es decir, a medida en que se va encontrando un buen rango de estimación del intervalo se van identificando infinitos números que comprenden el inicial.

La teoría intervalar que tuvo sus orígenes con el método de exhaución expuesto por Eudoxo y perfeccionado por Arquímedes, se convierte en una alternativa para expresar números racionales e irracionales con naturaleza infinita mediante intervalos cerrados de racionales, hecho que en el aula posibilita el acercamiento de forma intuitiva y conceptual al número real y sus propiedades como lo es la densidad.

Algunas actividades realizadas con Geogebra permitieron que los estudiantes se aproximaran al concepto de la propiedad de densidad de los números irracionales, puesto que con la representación de los múltiplos y submúltiplos de un número irracional en la recta numérica identificaron que este proceso es infinito. La representación intervalar conduce a la comprensión de otros conceptos matemáticos, tales como el infinito actual y el infinito potencial. Por ejemplo, en el momento en el que el estudiante trata de encajar un número de naturaleza infinita periódica o infinita no periódica, estará haciendo uso del infinito potencial; ahora cuando intenta hallar un buen rango de estimación restando los extremos del intervalo para encajar a un número real, la resta de sus extremos cada vez resulta una cantidad infinitamente pequeña que tiende a cero, se aproxima al concepto del infinito actual.

La representación de los números reales expuesta a través de intervalos implica de manera implícita la noción de orden, es decir, para representar un número real, se necesitan considerar los números reales menores y mayores que el inicial, hecho que no sucede, por ejemplo, cuando éstos son representados como puntos de la recta numérica.

5.1. Sugerencias a futuro

Como se ha mencionado, no se implementaron las actividades que proponen operaciones con intervalos; sin embargo, se considera importante mencionar que una de las posibles dificultades que se pueden manifestar cuando se representan los números reales mediante intervalos encajados, es que para cálculos complejos se necesitan del uso de programas especializados como INTLAB o MATLAB, es decir, los estudiantes solo podrán realizar cálculos sencillos.

Las actividades elegidas no condujeron a que los estudiantes lograran definir formalmente a los números reales como un límite de sucesiones de intervalos encajados, sin embargo, fue posible –haciendo uso de Geogebra en la mayoría de las actividades– que se acercaran a la comprensión intuitiva de densidad, una de las propiedades fundamentales, lo que permitió que ellos lograran representar un número mediante intervalos de números racionales muy próximos a él. No obstante, cuando se les presentó la recta numérica a lápiz y papel, se observó que tuvieron dificultades para hallar números muy próximos con respecto a otro, puesto que, con Geogebra los visualizaban mientras que a lápiz y papel se les dificultaba imaginarlos.

Sin duda alguna, se reconoce que el concepto de número es una entidad abstracta, misma que es susceptible de subjetividad, en especial si se habla de los número reales que por su naturaleza, su introducción es bastante compleja en el aula, por ello se sugiere que el docente tenga en cuenta el diseño de actividades orientadas hacia esta representación, tomando como apoyo este estudio, deseando que le proporcione elementos que mejorarán las condiciones para desarrollar una práctica didáctica creativa de enseñanza y aprendizaje sobre este conjunto numérico y su propiedad de densidad, misma que beneficia, de manera paralela, el acercamiento a conceptos matemáticos que están ligados a este, como por ejemplo, límite, continuidad y convergencia, entre otros.

Finalmente, el número real –como objeto matemático– se cree posee una *realidad profunda*, por lo que resulta importante el estudio de su evolución como parte de la actividad humana. En este sentido, los profesores de matemáticas no deben olvidar esta idea en la elección, diseño o puesta en marcha de estrategias didácticas en el salón de clases que, como lo menciona Arboleda [1] es fundamental para “ubicarlo en el mundo de la noosfera, una dimensión de las ideas tan importantes para la educación como el mismo mundo de los saberes matemáticos” (p. 27), en la que a través de la transposición –de saberes sabios a saberes enseñados– se pueden *recrear* en el aula ciertos acontecimientos que fueron determinantes en la evolución y consolidación de este objeto.

Referencias

[1] Arboleda, L. (2011). Objetividad Matemática, Historia y Educación Matemática. En Recalde, L., y Arbeláez, G., (Ed.), *Los Números Reales como Objeto Matemático una perspectiva Histórico-Epistemológica*. (pp. 19-37). Cali, Colombia: Universidad del Valle. 33

[2] Artigue, M. (1995). El lugar de la didáctica en la formación de profesores. *Ingeniería didáctica en educación matemática*, 7-33. https://core.ac.uk/download/pdf/12341268.pdf 20

[3] Arredondo, J., Zúñiga, B. y Torres, J. (2004). Los números reales y procesos infinitos en el bachillerato. En L. Díaz (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Volumen 17. México: Clame (pp.918-923). 17

[4] Bárcenas, D. y Porras, O. (2002). Cálculo del número π mediante funciones Trigonométricas. *Divulgaciones Matemáticas*. 10 (2). 149-159. Recuperación de: https://www.emis.de/journals/DM/vX2/art4.pdf 27

[5] Broitman, C., Horacio I. y Quaranta, M. (2003). La enseñanza de los números decimales: el análisis del valor posicional y una aproximación a la densidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 6(1), 5-26. 17

[6] Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la Teoría de Situaciones Didácticas*. (D Fregona, Trad.). Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal. (Trabajo original publicado en 1986). 20

[7] Calderón, N. (2014). *Diferentes construcciones del número real*. [Trabajo de maestría]. Universidad Nacional, Bogotá, Colombia. 16

[8] Chevallard, Y (1998), *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*, Claudia Gilman (trad.), ed.Argentina, Aique (Psicología cognitiva y educación), pp. 45-66. Recuperado de https://www.terras.edu.ar/biblioteca/11/11DID_Chevallard_Unidad_3.pdf 16

[9] Collette, J. (1993). *Historia de la matemática*, Ed Siglo XXI. Vol. 1, página 78. España. 19

[10] Crespo, C. (2009). Acerca de la comprensión y significado de los números irracionales en el aula de matemática. México. *ALME*. No. 41.pp. 21-30. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/23035/1/Crespo2009Acerca.pdf 16, 19

[11] Damisa, C. y Ponzetti, S. (2015). Los objetos matemáticos y sus representaciones: ¿lo que ves es lo que es? En *V congreso uruguayo de educación matemática. Actas del CUREM 5*. 16

[12] D' Amore, B. (2001). Una contribución al debate sobre conceptos y objetos matemáticos. *Uno: Revista de didáctica de las matematicas*, (27), 51-78. 16

[13] Duval, R. (2004). *Los problemas Fundamentales en el Aprendizaje de la Matemáticas y las Formas Superiores del Desarrollo Cognitivo* (Vega, M. Trad.). Cali: Universidad del Valle 16

[14] Escobar Chocó, J., y Fernández Muñoz, M. (2019). *Ventajas y limitaciones de la representación intervalar: una aproximación a la propiedad de la densidad de los números reales en el grado once. Un estudio de caso en la Institución Educativa Instituto Técnico* [Trabajo de pregrado, Universidad del Valle]. Repositorio biblioteca Universidad del Valle https://bibliotecadigital.univalle.edu.co/handle/10893/18517

[15] Ferreiros, P. (2007). Kurt Gödel: Revolución en los fundamentos de las matemáticas. *ARBOR Ciencia, Pensamiento y Cultura*. 183 (725). 409-418. 19

[16] García, A. (2017). *Los números reales como conjuntos de intervalos, ventajas y limitaciones de su consideración en la educación media*. [Trabajo de maestría]. Cali, Colombia: Universidad del Valle. 16, 18, 19, 20, 22

[17] Godino, J. D., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A., y Wilhelmi, M. R. (2014). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico-semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 34(2/3), 167-200. 20

[18] Guacaneme Suárez, E. A. (2012). Teoría euclidiana de la proporción en la construcción de los números reales: ¿un asunto útil para un profesor? *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, (31), 113-131.

[19] Jiménez, C. (2012). *El análisis de intervalos. Aplicaciones en la ingeniería*. Universidad Pontifica de Comillas de Madrid.

[20] López, C. (2007). *La intuición y la matemática*. Universidad de Palermo, pp. 29-36.

[21] Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares básicos de competencias*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional. Recuperado de http://www.mineducacion.gov.co 15, 17

[22] Montesinos, J. (1991). *El Continuo y el Infinito en la Matemática Griega. Historia de la Geometría Griega*. Recuperado de http://fundacionorotava.org/media/web/files/page83__cap05_web.pdf

[23] Moore, R., Kearfott, B. & Cloud, M (2009). *Introduction to Interval Analysis*. SIAM, Society for Industrial and Applied Mathematics Philadelphia. 20

[24] Mora, L. y Torres, J. (2007). *Concepciones de estudiantes de licenciatura en matemáticas sobre números reales*. [Tesis de maestría]. Universidad Pedagógica Nacional. Colombia. 16

[25] Puerto, Y. E. (2011). *Unidad Didáctica para la Construcción y significación del concepto de número real con los estudiantes del grado undécimo*. [Tesis de maestría]. Universidad Nacional, Bogotá, Colombia. 16

[26] Recalde, L. (2011). Medida, número y magnitud en la antigüedad griega. En Recalde, L. y Arbeláez, G. (Ed.), *Los Números Reales como Objeto Matemático una perspectiva Histórico-Epistemológica*. (pp. 19-37). Cali, Colombia: Universidad del Valle 18

[27] Scaglia, S. (2000). Dos conflictos al representar números reales en la recta. Granada, España: Universidad de Granada. 16

[28] Toledo, S. (1991). *La Geometría Pitagórica. Historia de la Geometría Griega.*Recuperado de https://fundacionorotava.org/media/web/files/page83__cap04_web.pdf 19