Villota y Daza. 2022. Estimación de la aceleración de la gravedad mediante la aplicación de la física estadística. Revista Sigma, 18 (1). Páginas 30–39.

REVISTA SIGMA

Departamento de Matemáticas y Estadística

Universidad de Nariño

Volumen XVIII Nº 1 (2022), páginas 30–39

Estimación de la aceleración de la gravedad mediante la aplicación de la física estadística

Álvaro Villota Viveros [1]

Henry Daza Chaves [2]

Abstract: Physics requires estimating constants, parameters and behaviors of the phenomena that govern universal mechanics. Observation and experimentation are two of his main tools. The values of the variables studied require the processing of statistical techniques to establish valid theories and conclusions. The present work uses the regression models of least squares and orthogonal regression to estimate the acceleration of gravity in a specific place through experimentation with a pendulum. The values estimated by the methods were $9.76m/s^2$ and $9.68m/s^2$ respectively.

Keywords: statistical physics, gravity's acceleration, pendulum, linear regression.

Resumen: La física requiere estimar constantes, parámetros y comportamientos de los fenómenos que rigen la mecánica universal. La observación y la experimentación son dos de sus principales herramientas. Los valores de las variables estudiadas requieren del procesamiento de las técnicas estadísticas para establecer teorías y conclusiones válidas. El presente trabajo emplea los modelos de regresión de mínimos cuadrados y regresión ortogonal para estimar la aceleración de la gravedad en un lugar especifico mediante la experimentación con un péndulo. Los valores estimados por los métodos fueron de $9.76m/s^2$ y $9.68m/s^2$ respectivamente.

Palabras Clave: física estadística, aceleración de la gravedad, péndulo, regresión lineal.

[1]Catedrático Universidad San Martín y Universidad Cooperativa sedes Pasto, ingeniero civil, médico y cirujano, Universidad del Cauca, Mg. Investigación Operativa y Estadística UTP, email: vvvillota@live.com

[2]Profesor programa Lic. Matemáticas, Escuela Ciencias de la Educación, Universidad Nacional Abierta y a Distancia, email: henry.daza@unad.edu.co

1. Introducción

Se entiende como física estadística aquella modalidad de la física que tuvo sus orígenes en la mecánica clásica newtoniana, que recurrió a la teoría de probabilidad, las funciones de densidad, de distribución y a las modalidades descriptivas e inferenciales para establecer estimaciones puntuales y de intervalos de parámetros involucrados en los fenómenos físicos.

Durante mucho tiempo, la aplicación de la estadística se limitó al ámbito macroscópico de las fuerzas mecánicas y electromagnéticas.

La evolución de la física condujo en asocio con la química al estudio de la materia, que emplea la estadística en la comprensión del movimiento de las partículas atómicas y al establecimiento de las leyes de la termodinámica que facilitaron, incluso, el planteamiento de hipótesis sobre el origen del universo y entendimiento de dimensiones espaciales, de masa y temporales.

En este artículo se propone la estimación de la constante "g" definida como la aceleración de la gravedad recurriendo al periodo de tiempo que tarda un péndulo normal en cumplir un ciclo completo en función de la longitud de la cuerda del instrumento.

2. Marco Teórico

En las ciencias naturales, la estimación de constantes es de interés para los investigadores, puesto que a través de las mismas se pueden estudiar y analizar distintos tipos de fenómenos. En este caso, nos ocupa la estimación de la constante de la aceleración de la gravedad en algún punto de la tierra, para lo cual existen distintos métodos, uno de ellos [1] es "a través de montajes como el péndulo simple".

De manera experimental y mediante el uso de la física estadística, se expone el procedimiento para la estimación de la aceleración de la gravedad en cualquier punto geográfico de la tierra, para lo cual debemos partir de unas definiciones básicas:

Aceleración de la gravedad (g): Aceleración con la que un cuerpo cae verticalmente en un punto de la tierra (m/seg^2).

Péndulo: Cuerpo sólido suspendido por una cuerda que se desplaza en una y otra dirección pasando por su posición vertical.

Oscilación: Movimiento cíclico completo de un cuerpo.

Periodo (T): Tiempo necesario para que se produzca una oscilación (medido en segundos).

Longitud (L): dimensión de la cuerda que suspende al péndulo (medida en metros).

Si la masa puntual se desplaza de su posición de equilibrio una amplitud pequeña, el periodo T de oscilación puede aproximarse mediante la siguiente expresión:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{1}$$

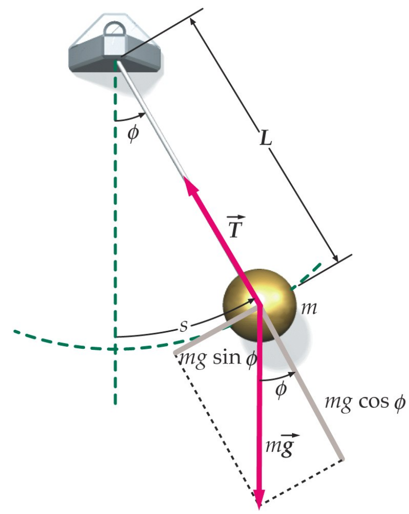

Figura 1: Montaje para péndulo simple. Tomado de: https://bit.ly/3PyPSg9

Y, al elevar ambos miembros de la desigualdad al cuadrado se tiene

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} L \tag{2}$$

Así las cosas, de la igualdad anterior puede tomarse como una ecuación lineal el siguiente modelo:

$$T^2 = F\,(L) \tag{3}$$

Donde

T^2 = Corresponde a la variable dependiente.

L = Corresponde a la variable independiente.

$\frac{4\pi^2}{g}$ = Corresponde a la pendiente de la recta.

3. Procesamiento cuantitativo de los datos

A continuación, se presenta la siguiente tabla que contiene información experimental para la estimación de la aceleración de la gravedad, para lo cual se emplean distintas longitudes de cuerda y se cronometran los periodos de oscilación.

En la tabla 1 Tcuadrado se ha obtenido al elevar al cuadrado los valores de la la columna T. Para el análisis de los datos se emplea lenguaje R.

	Longitud	T	Tcuadrado
1	0.35	1.20	1.40
2	0.40	1.30	1.70
3	0.25	1.00	1.00
4	0.45	1.30	1.70
5	0.50	1.40	2.00
6	0.30	1.10	1.20
7	0.55	1.50	2.30
8	0.60	1.50	2.30
9	0.65	1.60	2.60
10	1.00	2.00	4.00
11	0.70	1.70	2.90
12	0.75	1.70	2.90
13	0.72	1.70	2.90
14	0.23	0.90	0.80
15	0.57	1.50	2.30
16	0.54	1.50	2.30
17	0.56	1.50	2.30

Tabla 1: Datos obtenidos en el experimento

	Longitud	T	Tcuadrado
Mínimo	0.2300	0.900	0.800
1er cuartil	0.4000	1.300	1.700
Mediana	0.5500	1.500	2.300
Media	0.5365	1.435	2.153
3er cuartil	0.6500	1.600	2.600
Máximo	1.0000	2.000	4.000

Tabla 2: Medidas de resumen

4. Análisis descriptivo y exploratorio de los datos

De acuerdo con la tabla anterior, la longitud promedio de la cuerda está en 0.5365 metros y esta se encuentra en un rango de 0.23 y 1m, el periodo promedio por oscilación es de 1.435 segundos y se encuentra en un rango de 0.9 a 2 segundos.

En el gráfico de la figura 2, se aprecia una tendencia lineal con correlación positiva, por esta razón se recurre a un modelo de regresión lineal bivariada, donde la longitud de la cuerda representa la variable independiente y el tiempo cuadrado representa la variable dependiente.

Por otro lado, el coeficiente de correlación demuestra alta correlación lineal positiva entre las variables, por lo que se puede interpretar que a medida que crece la longitud de la cuerda del péndulo, aumenta el valor del periodo al cuadrado.

5. Análisis inferencial de los datos

A continuación, se presenta el análisis de varianza para el modelo de el tiempo cuadrado de oscilación del péndulo en función de la longitud de la cuerda.

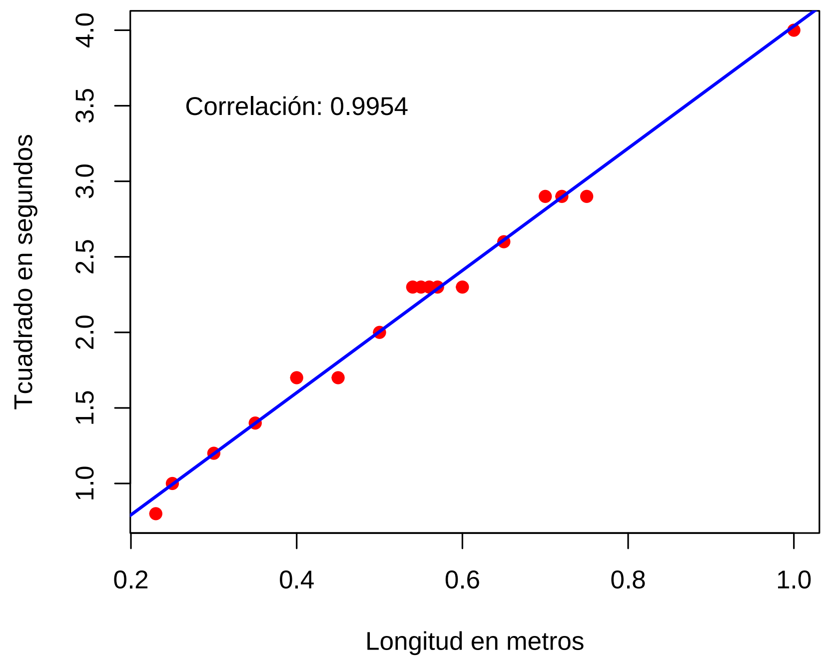

Figura 2: Gráfico de correlación del periodo cuadrado en función de la longitud de la cuerda

Los resultados mostrados en la tabla 3 indican que la estimativa para la longitud es significativa al 0.05.

Puesto que el p-valor del modelo ANOVA indicado en la tabla 4 es menor que 0.05, existe una relación estadísticamente significativa entre Tcuadrado y la longitud del péndulo con un nivel de confianza del 95 %.

El coeficiente de determinación R^2 indica que el modelo explica un 0.9908 de la proporción de la varianza total, lo que permite deducir que el ajuste es adecuado para predecir el parámetro de la pendiente que interesa en el estudio.

Expresión matemática del modelo de regresión lineal

$$Tcuadrado = -0.0166617 + 4.04422 * Longitud\ pendulo \tag{1}$$

En el gráfico de la figura 3 se aprecia el modelo ajustado con su respectiva recta de regresión y las franjas con un intervalo de confianza al 95 %.

Un aspecto importante al momento de desarrollar un modelo es realizar una inspección por medio de un diagnóstico. Los gráficos de la figura 4 permiten evidenciar una asociación lineal positiva entre los valores observados y los predichos del cuadrado del periodo de oscilación, es decir, a mayor valor observado, mayor valor predicho.

Por otro lado, los residuos estudentizados del modelo se muestran aleatorios y no siguen un patrón si se observan con relación a la longitud del péndulo, lo que es un indicio para no

	Estimativa	E.E	Valor t	P-valor
Intercepto	-0.0167	0.0574	-0.29	0.7755
longitud	4.0442	0.1007	40.18	0.0000
s	0.08013			
g.l	15			
R^2	0.9908			
R^2 Ajus.	0.9902			
F	1614	(1 y 15 g.l)		0.0000

Tabla 3: Coeficientes del modelo de regresión lineal

	g.l	SC	CM	Valor F	P-valor
longitud	1	10.37	10.37	1614.42	0.0000
Residuales	15	0.10	0.01		

Tabla 4: Análisis de varianza

rechazar la hipótesis de homocedasticidad.

El histograma así como el respectivo QQ-Plot conllevan a pensar que los residuales tuvieran problema de distribución normal, por lo cual se recurre a los test siguientes para verificar las hipótesis de normalidad, autocorrelación y homocedasticidad.

Validación de supuestos del modelo:

A través de R studio se obtienen los siguientes resultados:

Prueba de Normalidad:

```
Shapiro-Wilk normality test
data: studres(reg)
W = 0.93111, p-value = 0.2271
```

El Pvalor no descarta normalidad, cuando se emplea significancia de 0.05

Prueba de Autocorrelación serial

```
Durbin-Watson test
data: reg
DW = 2.2602, p-value = 0.6722
alternative hypothesis: true autocorrelation is greater than 0
```

El estadístico de Durbin-Watson (DW) examina los residuos para determinar si hay alguna correlación significativa basada en el orden en el que se presentan en el archivo de datos. Puesto que el valor-P es mayor que 0.05, no hay indicios de una autocorrelación serial en los residuos.

Prueba de Homocedasticidad:

studentized Breusch-Pagan test

```
data: reg
BP = 0.023986, df = 1, p-value = 0.8769
```

El Pvalor, no descarta homocedasticidad.

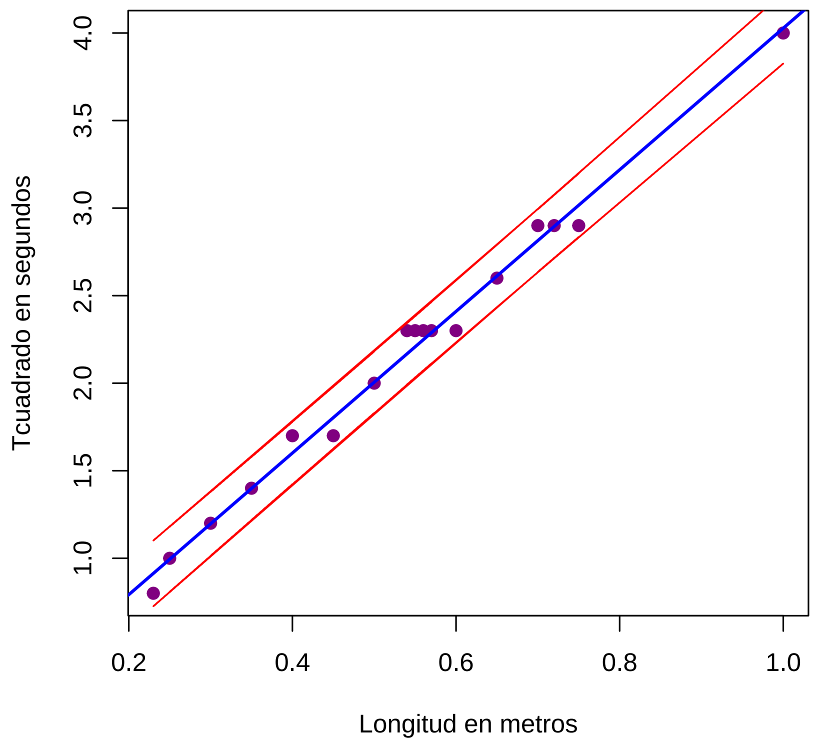

Figura 3: Gráfico del modelo ajustado

Intervalo de confianza para el parámetro de pendiente.

Intervalo de confianza para la pendiente al 95 %:

$$3.832225 \ \leq \ \beta_1 \ \leq 4.256206 \tag{2}$$

De acuerdo con lo anterior, el modelo cumple con los supuestos de normalidad y autocorrelación de los residuales, como homogeneidad de varianzas de los datos, por lo cual es válido.

6. Interpretación de los resultados

Los resultados obtenidos permiten estimar la aceleración de la gravedad en el lugar geográfico en el que se realizó el experimento, pues como

$$\hat{\beta}_1 = \frac{4\pi^2}{g} \tag{1}$$

entonces

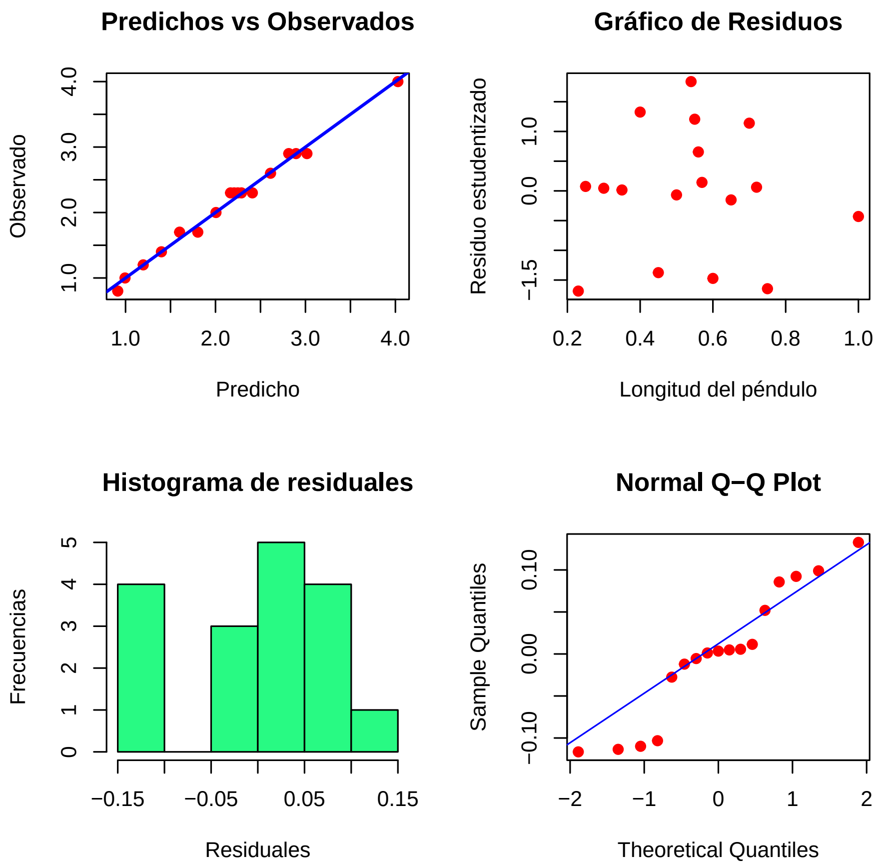

Figura 4: Gráficos de diagnóstico del modelo ajustado

$$g = \frac{4\pi^2}{\hat{\beta}_1} \tag{2}$$

Así que, al reemplazar β_1 por el valor estimado se tiene que

$$g = \frac{4\pi^2}{4.04422} = 9.76168893 \tag{3}$$

De este modo, la aceleración de la gravedad en el lugar del estudio es: 9.76168893 m/s^2

Por otro lado, al emplear **regresión ortogonal** [5] mediante la siguiente expresión del parámetro de pendiente,

$$\hat{\beta}_1 = \frac{V\left(T^2\right) - V\left(L\right) + \sqrt{\left(V\left(T^2\right) - V\left(L\right)\right)^2 + 4\left(Cov(T^2, L)\right)^2}}{2Cov(T^2, L)} \tag{4}$$

y reemplazando los respectivos valores para las varianzas y covarianza, se tiene que:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{0.61543253 - 0.03728166 + \sqrt{(0.61543253 - 0.03728166)^2 + 4(0.15077509)^2}}{2(0.15077509)}. \quad (5)$$

Al realizar los cálculos

$$\hat{\beta}_1 = 4.07964457 \quad (6)$$

Ahora

$$g = \frac{4\pi^2}{\hat{\beta}_1} = \frac{4\pi^2}{4.07964457} = 9.676925757 \quad (7)$$

El cálculo de la aceleración de la gravedad por regresión ortogonal es de 9.676925757 m/s^2, lográndose evidenciar resultados similares comparando con el método de mínimos cuadrados ordinarios.

7. Conclusiones

A través del presente artículo, se evidencia la importancia de la estadística en la física, concretamente en la estimación de magnitudes como la aceleración de la gravedad a través de la regresión lineal.

Se diseña un método estadístico que recurre a la experimentación con péndulos de distintas longitudes de cuerda y sus correspondientes mediciones de los periodos de los ciclos, que permite, mediante la regresión lineal bivariada, estimar la aceleración de la gravedad en cualquier punto de la tierra.

Para los datos del experimento que se presenta en este artículo, la aceleración de la gravedad en el lugar geográfico del estudio tiene un valor estimado de $g = 9.76168893 m/s^2$ (empleando regresión de mínimos cuadrados) y $g = 9.676925757 m/s^2$ (empleando regresión ortogonal), los cuales son muy cercanos al promedio aceptado universalmente.

Referencias

[1] Pérez, J. E. M. (2015) Obtención del valor de la aceleración de la gravedad en el laboratorio de física. Experiencia comparativa del sensor de un teléfono celular inteligente y el péndulo simple. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias*, 12(2), 341-346. 31

[2] Kadanoff, L. P. (2000). *Statistical physics: statics, dynamics and renormalization*. World Scientific.

[3] Reif, F. (2009). *Fundamentals of statistical and thermal physics*. Waveland Press.

[4] Huang, K. (2009). *Introduction to statistical physics*. Chapman and Hall/CRC.

[5] Villota Viveros, Á. D. J. (2018). *Estudio comparativo de rectas de regresión obtenidas mediante el método de mínimos cuadrados ortogonales*. Tesis de Maestria. Universidad Tecnológica de Pereira. 37