Delgado y Jácome. 2022. Las sumas de Bernoulli. Revista Sigma, 18 (2). Páginas 10–16.

REVISTA SIGMA

Departamento de Matemáticas y Estadística

Universidad de Nariño

Volumen XVIII № 2 (2022), páginas 10–16

Las sumas de Bernoulli [1]

Leonel Delgado Eraso [2]

Libardo Manuel Jácome [3]

Abstract: In integral calculus courses, when Riemann sums are studied, it is frequent or almost mandatory to calculate the area under the curve $y = f(x)$, $x \geq 0$ and take as examples $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$ etc.

In the development of the problem you add as $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$, $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$ and applying the formula telescopic find the formulas for such expressions.

The idea developed is to proceed in the opposite direction, that is, knowing the area (basically the definite integral) of a region, find the sum $1^m + 2^m + 3^m + \ldots + n^m$.

Keywords. Bernoulli sum, mixtilinear triangles, sums of powers.

Resumen: En los cursos de cálculo integral cuando se estudian las sumas de Riemann es frecuente o casi obligatorio calcular el área bajo la curva $y = f(x)$, $x \geq 0$ y tomar como ejemplos $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$ etc.

En el desarrollo del problema aparecen sumas tales como $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$, $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$ y aplicando la fórmula telescópica se encuentran las fórmulas para tales expresiones.

La idea que se desarrolla es proceder al contrario, es decir conociendo el área (En el fondo la integral definida) de una región encontrar la suma $1^m + 2^m + 3^m + \ldots + n^m$.

Palabras Clave: suma de Bernoulli, triángulos mixtilíneos, sumas de potencias.

[1] Articulo Presentado por Docentes Hora Cátedra al Departamento de Matemáticas y Estadística, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales.

[2] Magister en Investigación de Operaciones y Estadística de la Universidad de Nariño.
Correo: lederudenar@hotmail.com

[3] Especialista en la enseñanza de la Matemática de la Universidad de Nariño. Correo: elo@udenar.edu.co

Las sumas de Bernoulli

A finales del siglo XVII era frecuente encontrar escritos de aritmética que utilizaban tablas numéricas con cálculos las cuales las manejaban los ingenieros y astrónomos.

El astrónomo francés Ismael Bouilleau elaboraba tablas para calcular las sumas de los cuadrados, cubos etc. de los primeros números naturales.

Jacob Bernoulli realizo su propia contribución para calcular las sumas de la forma:

$$1^m + 2^m + 3^m + \ldots + n^m.$$

La notación y la solución son diferentes a la que se realizará en el presente artículo.

Para calcular dichas sumas se usará el concepto de integral definida donde se destacan los conceptos de lo continuo y discreto.

Considerando como intervalo de integración $[0, n]$, como integrando la función:

$$f(x) = x^m, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

límites de integración $a = 0$, $b = n$

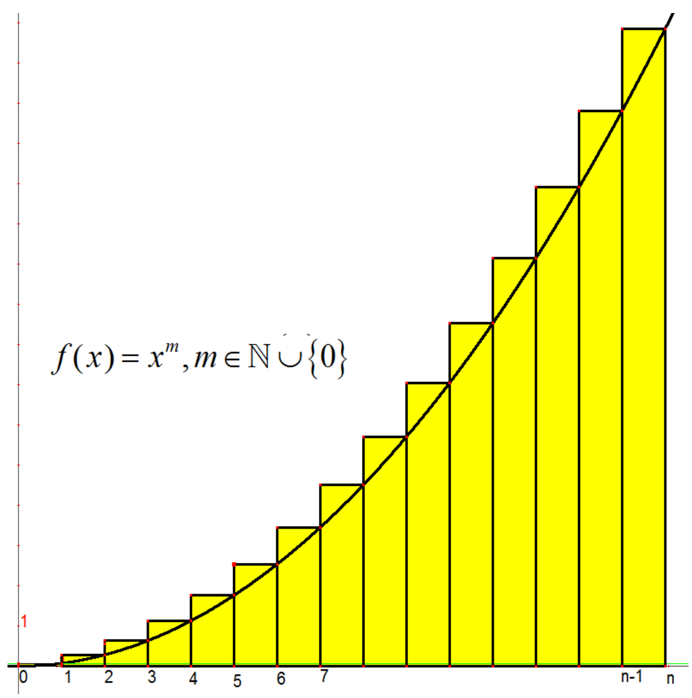

Figura 1: Área bajo la curva $f(x) = x^m$; $x \geq 0$. y triángulos mixtilíneos

Por la teoría del cálculo integral se puede establecer según la gráfica que la suma de las áreas de los rectángulos es igual al área bajo la curva $f(x) = x^m$ más la suma de las áreas de los triángulos mixtilíneos (triángulo formado por segmentos de recta y curvas).

En forma simbólica se puede escribir:

$$1f(1) + 1f(2) + 1f(3) + \ldots + 1f(n) = 1^m + 2^m + 3^m + \ldots + n^m = \int_0^n x^m\,dx + T_m$$

Es decir, lo discreto aparece en el lado izquierdo y en el otro lado lo continuo.

$$1^m + 2^m + 3^m + \ldots + n^m = \left.\frac{x^{m+1}}{m+1}\right|_0^n + T_m = \frac{n^{m+1}}{m+1} + T_m$$

$$T_m = \int_0^1 (1^m - x^m)\,dx + \int_1^2 (2^m - x^m)\,dx + \int_2^3 (3^m - x^m)\,dx + \ldots + \int_{n-1}^n (n^m - x^m)\,dx$$

Caso $m = 0$

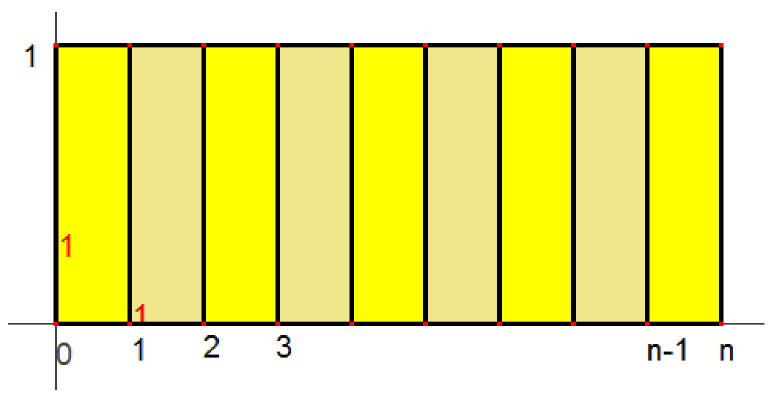

Figura 2: Área bajo la curva $f(x) = x^0$; $x \geq 0$.

$1^0 + 2^0 + 3^0 + \ldots + n^0 = n + T_0$

En este caso no se presentan los triángulos mixtilíneos por tanto $T_0 = 0$ de manera que

$$1 + 1 + 1 + \ldots + 1 = n$$

Caso $m = 1$

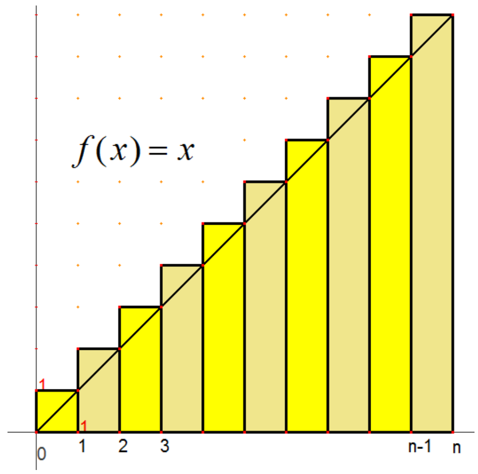

Figura 3: Área bajo la curva $f(x) = x^1$; $x \geq 0$. y triángulos mixtilíneos

$1^1 + 2^1 + 3^1 + \ldots + n^1 = \dfrac{n^2}{2} + T_1$

$$\begin{aligned}
T_1 &= \int_0^1 (1-x)\,dx + \int_1^2 (2-x)\,dx + \ldots + \int_{n-1}^n (n-x)dx \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}(1+1+\ldots+1) = \frac{n}{2}
\end{aligned}$$

Por tanto:

$$1^1 + 2^1 + 3^1 + \ldots + n^1 = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Caso $m = 2$

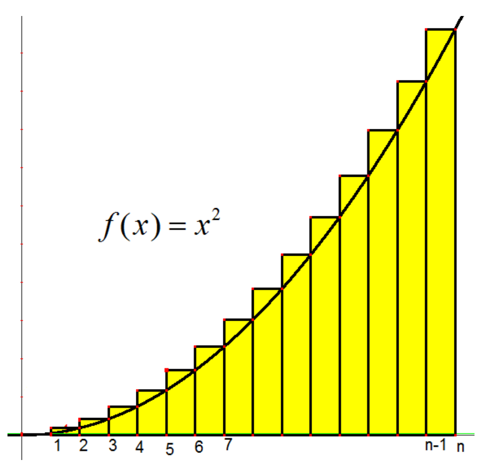

Figura 4: Área bajo la curva $f(x) = x^2$; $x \geq 0$. y triángulos mixtilíneos

$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n^3}{3}+T_2$

$$\begin{aligned}
T_2 &= \int_0^1 (1-x^2)\,dx+\int_1^2 (4-x^2)\,dx+\ldots+\int_{n-1}^n (n^2-x^2)\,dx\\
&= \frac{2}{3}+\frac{5}{3}+\ldots+\frac{3n-1}{3}=\frac{1}{3}(2+5+\ldots+3n-1)\\
&= \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}(3k-1)=\frac{1}{3}\left(3\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1\right)\\
&= \frac{1}{3}\left(3\frac{n(n+1)}{2}-n\right)=\frac{3n^2+3n-2n}{6}=\frac{3n^2+n}{6}
\end{aligned}$$

De donde:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n^3}{3}+T_2=\frac{n^3}{3}+\frac{3n^2+n}{6}=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Caso $m=3$

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\frac{n^4}{4}+T_3$$

$$\begin{aligned}
T_3 &= \int_0^1 (1-x^3)dx+\int_1^2 (8-x^3)dx+\ldots+\int_{n-1}^n (n^3-x^3)dx\\
&= \frac{3}{4}+\frac{17}{4}+\ldots+\frac{6n^2-4n+1}{4}\\
&= \frac{1}{4}(3+17+\ldots+6n^2-4n+1)\\
&= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}(6n^2-4n+1)\\
&= \frac{1}{4}\left(6\sum_{k=1}^{n}k^2-4\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(6\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-4\frac{n(n+1)}{2}+n\right)=\frac{2n^3+n^2}{4}
\end{aligned}$$

De donde $\quad 1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\dfrac{n^4}{4}+\dfrac{n^3}{2}+\dfrac{n^2}{4}=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$

Fórmula Condensada

$$1^m+2^m+3^m+\ldots+n^m=\left.\frac{x^{m+1}}{m+1}\right|_0^n+T_m=\frac{n^{m+1}}{m+1}+T_m$$

$$T_m=\int_0^1 (1^m-x^m)\,dx+\int_1^2 (2^m-x^m)\,dx+\int_2^3 (3^m-x^m)\,dx+\ldots+\int_{n-1}^n (n^m-x^m)\,dx$$

$$\int_0^1 (1^m - x^m)dx = \frac{m}{m+1}, \qquad \int_1^2 (2^m - x^m)dx = 2^m + \frac{1^{m+1} - 2^{m+1}}{m+1}, \qquad \dots \qquad ,$$

$$\int_{n-1}^n (n^m - x^m)dx = \left(n^m x - \frac{x^{m+1}}{m+1}\right)\Bigg|_{n-1}^n = \left(n^{m+1} - \frac{n^{m+1}}{m+1}\right) - \left(n^m(n-1) - \frac{(n-1)^{m+1}}{m+1}\right)$$

$$= n^m + \frac{(n-1)^{m+1} - n^{m+1}}{m+1}$$

Aquí se puede aplicar la fórmula correspondiente al binomio de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^{n-j} b^j$$

$$(n-1)^{m+1} = (n + (-1))^{m+1} = \sum_{i=0}^n \binom{m+1}{i} n^{m+1-i}(-1)^i$$

$$T_m = \left(\frac{m}{m+1}\right) + \left(2^m + \frac{1^{m+1} - 2^{m+1}}{m+1}\right) + \dots + \left(n^m + \frac{\sum_{i=0}^{m+1} \binom{m+1}{i}(-1)^i n^{m+1-i} - n^{m+1}}{m+1}\right)$$

$$T_m = \left(\frac{m}{m+1}\right) + \left(2^m + \frac{1^{m+1} - 2^{m+1}}{m+1}\right) + \dots$$
$$+ \left(n^m + \frac{\binom{m+1}{0}(-1)^0 n^{m+1} + \sum_{j=1}^{m+1} \binom{m+1}{i}(-1)^i n^{m+1-i} - n^{m+1}}{m+1}\right)$$

$$T_m = \left(\frac{m}{m+1}\right) + \left(2^m + \frac{1^{m+1} - 2^m + 1}{m+1}\right) + \dots + \left(n^m + \frac{\sum_{i=1}^{m+1} \binom{m+1}{i}(-1)^i n^{m+1-i}}{m+1}\right)$$

$$T_m = \sum_{k=1}^n \left[k^m + \frac{\sum_{i=1}^{m+1} \binom{m+1}{i}(-1)^i k^{m+1-i}}{m+1}\right] = \sum_{k=1}^n \left[\frac{\sum_{i=2}^{m+1} \binom{m+1}{i}(-1)^i k^{m+1-i}}{m+1}\right]$$

$$= \frac{1}{m+1} \sum_{k=1}^n \left[\sum_{i=2}^{m+1} \binom{m+1}{i}(-1)^i k^{m+1-i}\right]$$

En síntesis:

$$1^m + 2^m + 3^m + \dots n^m = \frac{n^{m+1}}{m+1} + \frac{1}{m+1}\sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{j=2}^{m+1}\binom{m+1}{i}(-1)^i k^{m+1-i}\right]$$

Ejemplo: Calcular $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ usando la fóruma anterior.

Solución:

$$\begin{aligned}
1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots n^2 &= \frac{n^3}{3} + \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{i=2}^{3}\binom{3}{i}(-1)^i k^{3-i}\right] \\
&= \frac{n^3}{3} + \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left[\binom{3}{2}(-1)^2 k + \binom{3}{3}(-1)^3\right] \\
&= \frac{n^3}{3} + \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}[3k-1] = \frac{n^3}{3} + \frac{1}{3}\left(3\sum_{k=1}^{n}k - \sum_{k=1}^{n}1\right) \\
&= \frac{n^3}{3} + \frac{1}{3}\left(3\frac{n(n+1)}{2} - n\right) = \frac{n^3}{3} + \frac{3n^2+n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

Si en la fórmula:

$$1^m + 2^m + 3^m + \dots + n^m = \frac{n^{m+1}}{m+1} + \frac{1}{m+1}\sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{i=2}^{m+1}\binom{m+1}{i}(-1)^i k^{m+1-i}\right]$$

Se hace $i = j+2$ entonces, cuando $i = 2, j = 0$ y cuando $i = m+1$ se tiene que $j = m-1$ entonces la fórmula queda:

$$1^m + 2^m + 3^m + \dots + n^m = \frac{n^{m+1}}{m+1} + \frac{1}{m+1}\sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{j=0}^{m-1}\binom{m+1}{j+2}(-1)^j k^{m-1-j}\right]$$

que desarrollando y aplicando propiedades se obtiene:

$$\begin{aligned}
1^m + 2^m + 3^m + \dots + n^m = \frac{n^{m+1}}{m+1} + \frac{1}{m+1}&\left[\binom{m+1}{2}(-1)^0\sum_{k=1}^{n}k^{m-1} + \right. \\
&\left. + \binom{m+1}{3}(-1)^1\sum_{k=1}^{n}k^{m-2} + \dots + \binom{m+1}{m-1}(-1)^{m-1}\sum_{k=1}^{n}k^0\right]
\end{aligned}$$

Según lo anterior se puede decir que para calcular $1^m + 2^m + 3^m + \dots n^m$ se deben conocer los resultados de las sumas:

$$1^0 + 2^0 + \dots + n^0, \quad 1^1 + 2^1 + \dots + n^1, \quad \dots \quad , 1^{m-1} + 2^{m-1} + \dots + n^{m-1}$$

Referencias

[1] Apostol, T. (2001). *Calculus.* Mexico: Reverte, 2001.

[2] Ruiz, F. (s.f.). *Sobre las sumas de Bernoulli.* Obtenido de: file:///C:/Users/PC2/Downloads/Dialnet-SobreLasSumasDeBernoulli-6636699.pdf